한양대학교 2014학년도 신입학전형 서술형 전공 능력 검사
출제 의도 및 예시답안

1. 출제 의도 및 문제 해설

(1) [문제 1~3]의 출제 의도
- 미분의 정의 (혹은 접선의 정의)와 주기함수의 관계를 잘 이해하고 있는지를 평가
- 원시함수(혹은 정적분)과 주기함수의 관계를 잘 이해하고 있는지를 평가
- 주기함수에서 주기를 구하는 능력을 평가

(2) [문제 4~6]의 출제 의도
- 벡터의 덧셈, 실수의 곱 및 회전 변환의 의미를 잘 이해하고 있는지를 평가
- 좌표평면 상에서 벡터의 성분 표시를 이해하고 계산에 활용할 줄 아는가를 평가

(3) [문제 7~8]의 출제 의도
- 연속확률변수의 정의를 이해하는지를 평가
- 부분적분법을 사용하여 계산할 수 있는지를 평가

2 예시답안

[문제 1~3]

(1)

$$f'(x+a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+a+h)-f(x+a)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$= f'(x)$$

별해 1.
$f(x+a)=f(x)$이므로 양변을 미분하면, $f'(x+a)(x+a)' = f'(x)$
그러므로 $f'(x+a)=f'(x)$ 이다.

별해 2.
임의의 실수 x에 대해 $f(x+a)=f(x)$를 만족하므로 함수 $f(x)$의 그래프는 x축으로 a만큼

평행이동하면 겹쳐진다. 따라서 $x=x_0+a$에서의 $f(x)$의 접선도 $x=x_0$에서의 $f(x)$의 접선과 겹쳐진다. 따라서 임의의 실수 x_0에 대해서 $f'(x_0+a)=f'(x_0)$가 만족된다.

(2)

f는 연속함수이므로 f의 원시함수가 존재한다. $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$를 f의 원시함수라고 하자. 임의의 실수 x에 대하여 $\int_x^{x+a} f(t)\,dt = 0$가 성립하므로 임의의 실수 x에 대하여 $F(x+a)=F(x)$도 성립한다.
따라서 문제 (1)로부터 모든 실수 x에 대하여 $f(x+a)=f(x)$도 성립한다.

별해.
$\int_x^{x+a} f(t)\,dt = 0$의 양변을 x로 미분하면, $f(x+a)-f(x)=0$를 얻는다.
그러므로 모든 실수 x에 대하여 $f(x+a)=f(x)$가 성립한다.

(3)
문제 (1)에 의해 임의의 실수 x에 대하여 $f'(x+a)=f'(x)$를 만족하므로 f'는 주기함수이다. f'는 상수함수가 아니므로 f'는 양인 주기를 갖는다. f'의 주기가 b라고 하자. 그러면 제시문 (다)에 의해 $a=nb$인 양의 정수 n이 존재한다. 임의의 실수 x에 대하여 $f(x+a)=f(x)$이므로 $\int_x^{x+a} f'(t)\,dt = 0$이다.

$$\int_x^{x+a} f'(t)\,dt$$

$$= \int_x^{x+nb} f'(t)\,dt = \int_x^{x+b} f'(t)dt + \int_{x+b}^{x+2b} f'(t)\,dt + \cdots + \int_{x+(n-1)b}^{x+nb} f'(t)\,dt$$이고,

임의의 실수 x에 대하여 $f'(x)=f'(x+b)= \cdots = f'(x+(n-1)b)$이므로,

$$\int_x^{x+b} f'(t)\,dt = \int_{x+b}^{x+2b} f'(t)\,dt = \cdots = \int_{x+(n-1)b}^{x+nb} f'(t)\,dt$$이다.

따라서 $\int_x^{x+b} f'(t)\,dt = 0$이므로 문제 (2)에 의해 임의의 실수 x에 대해서 $f(x+b)=f(x)$이다. $f(x)$의 주기가 a이므로 어떤 양의 정수 m에 대하여 $b=ma$이다.
그러므로 $a=b$이다. 결국 f'의 주기도 a이다.

[문제 4~6]

(4)

$\overrightarrow{MQ}$는, $\overrightarrow{OB}$에 수직이고 음의 y방향이므로, 벡터 $\overrightarrow{OB}$를 270° 회전시킨 벡터와 같은 방향의 벡터이다.

따라서 $\theta = \frac{3\pi}{2} = 270^\circ$ (또는 $-\frac{\pi}{2} = -90^\circ$).

$|\overrightarrow{MQ}| = k|\overrightarrow{OB^{\theta}}| = k|\overrightarrow{OB}| = k \cdot 1 = k$이며 $|\overrightarrow{MQ}|$는 한 변의 길이가 1인 정삼각형의 중점까지의 거리이므로 $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{3}}{6}$이 된다.

따라서 $k = \frac{\sqrt{3}}{6}$.

(또는 준식 $\overrightarrow{MQ} = k\overrightarrow{OB^{\theta}}$에서 두 식 $k\cos\theta = 0$과 $k\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{6}$을 얻고 이를 만족하는 k와 θ를 구하는 것도 가능하다.)

$\overrightarrow{MQ} = \frac{\sqrt{3}}{6}\overrightarrow{OB}^{\frac{3\pi}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{6}(0, -1) = (0, -\frac{\sqrt{3}}{6})$이므로 중점 Q의 위치벡터 $\overrightarrow{OQ}$는

$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MQ} = (\frac{1}{2}, 0) + (0, -\frac{\sqrt{3}}{6}) = (\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6})$.

(5)

중점 P의 위치벡터 $\overrightarrow{OP}$는 예를 들어 세 벡터 $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{BL}$, $\overrightarrow{LP}$의 합으로 쓸 수 있다.

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BL} + \overrightarrow{LP}$

여기서,

$\overrightarrow{BL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}) = (\frac{a_1}{2} - \frac{1}{2}, \frac{a_2}{2})$

$\overrightarrow{LP} = \frac{\sqrt{3}}{6}\overrightarrow{BA}^{\frac{3\pi}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{6}(a_2, -(a_1 - 1)) = (\frac{\sqrt{3}}{6}a_2, -\frac{\sqrt{3}}{6}a_1 + \frac{\sqrt{3}}{6}))$

따라서

$$\overrightarrow{OP} = (1, 0) + (\frac{a_1 - 1}{2}, \frac{a_2}{2}) + (\frac{\sqrt{3}}{6}a_2, -\frac{\sqrt{3}}{6}(a_1 - 1))$$

$$= (\frac{a_1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}a_2 + \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6}a_1 + \frac{a_2}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}))$$

(다른 방법으로 $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OL} + \overrightarrow{LP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) + \overrightarrow{LP}$, 또는

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{OB} + \frac{\sqrt{3}}{3}\overrightarrow{OA}^{11\pi/6}$ 등 위에 예시된 것과 다른 벡터들의 조합을 이용해 계산하는 것도 가능하다.)

마찬가지로, 중점 R의 위치벡터 $\overrightarrow{OR}$은 두 벡터 $\overrightarrow{ON}$과 $\overrightarrow{NR}$의 합이므로,

$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{\sqrt{3}}{6}\overrightarrow{OA}^{\frac{\pi}{2}} = (\frac{a_1}{2}, \frac{a_2}{2}) + \frac{\sqrt{3}}{6}(-a_2, a_1)$$

$$= (\frac{a_1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}a_2, \frac{\sqrt{3}}{6}a_1 + \frac{a_2}{2})$$

(또는 $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AR}$ 등 여러 다른 벡터 조합의 합을 이용해 계산하거나, 회전과 실수곱으로 나타낸 식 $\overrightarrow{OR} = \frac{\sqrt{3}}{3}\overrightarrow{OA}^{\pi/6}$ 로부터 구할 수도 있다.)

(6)

삼각형 PQR에서

$$\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ}$$

$$= (\frac{a_1+1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}a_2, \frac{a_2}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}(a_1-1)) - (\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6})$$

$$= (\frac{a_1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}a_2, -\frac{\sqrt{3}}{6}a_1 + \frac{a_2}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}))$$

그리고,

$$\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OQ}$$

$$= (\frac{a_1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}a_2, \frac{a_2}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}a_1) - (\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6})$$

$$= (\frac{a_1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}a_2 - \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}a_1 + \frac{a_2}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6})$$

벡터 $\overrightarrow{QP}$를 Q를 중심으로 $\frac{\pi}{3}$ 회전시키면

$$\overrightarrow{QP}^{\frac{\pi}{3}} = ((\frac{a_1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}a_2)\cos\frac{\pi}{3} - (\frac{a_2}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}(a_1-2))\sin\frac{\pi}{3},$$

$$(\frac{a_1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}a_2)\sin\frac{\pi}{3} + (\frac{a_2}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}(a_1-2))\cos\frac{\pi}{3})$$

$$= (\frac{a_1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}a_2 - \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}a_1 + \frac{a_2}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}) = \overrightarrow{QR}$$

따라서 제시문 <다>에 의해 삼각형 PQR은 정삼각형이다.

[문제 7~8]

(7)

제시문에 의해 Θ의 기댓값은 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta \sin\theta \, d\theta$이다.

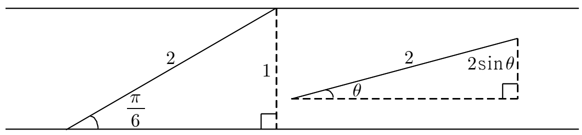
이를 부분적분법을 이용하여 계산하면 다음과 같다.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta \sin\theta \, d\theta = [\theta(-\cos\theta)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos\theta)\, d\theta$$

$$= [\sin\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

(8)

길이가 $2\,\mathrm{cm}$인 바늘을 마루에 떨어뜨릴 때, $0 \le \theta \le \frac{\pi}{6}$이면 바늘이 평행선과 만날 확률은 $2\sin\theta$이고, $\frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$이면 바늘이 평행선과 만날 확률이 1이다.



(따라서, 바늘이 평행선과 만날 확률은 다음과 같다.)

$$\left(\int_0^{\frac{\pi}{6}} 2\sin\theta\, d\theta + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 1\, d\theta\right) / \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\, d\theta$$

$$= \frac{2}{\pi}\left([-2\cos\theta]_0^{\frac{\pi}{6}} + [\theta]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{2}{\pi}\left(-\sqrt{3} + 2 + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{4 - 2\sqrt{3}}{\pi}$$