2013 수시 모의 출제 2차 문제 풀이

[문제 1] 다음 제시문 <가>~<다>를 읽고 물음에 답하시오.

<가> 함수 $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$가 모든 실수 x에 대해서 $f(g(x)) = g(f(x)) = x$를 만족하면, 함수 g는 함수 f의 역함수이고 함수 f는 함수 g의 역함수라 한다. 이때, 함수 f의 그래프와 함수 g의 그래프는 직선 $y = x$에 대칭이다.

<나> 연속 함수의 그래프는 끊어지지 않고 연속인 선을 이룬다. 그리고 그래프가 끊어지지 않고 연속인 선을 이루는 함수는 연속함수이다.

<다> 연속인 함수 f가 점 a에서 미분가능하면, 점 $(a, f(a))$에서 함수 f의 그래프에 대한 접선이 존재한다. 또한 점 $(a, f(a))$에서 함수 f의 그래프에 대한 y축에 평행하지 않는 접선이 존재하면 함수 f는 점 a에서 미분가능하다.

1. 함수 f가 연속함수이면, f의 역함수 g도 연속함수임을 보여라. [5점]

[풀이]
f가 연속함수이므로 f의 그래프는 끊어지지 않고 연속인 선을 이룬다.
g의 그래프는, 제시문 <가>에 의해 위의 선과 대칭이므로, 끊어지지 않고 연속인 선을 이룬다. 따라서 g는 연속함수이다. ---[5점]

2. 함수 f가 미분가능 함수이고 모든 실수 x에 대해서 $f'(x) \neq 0$이면 f의 역함수 g도 미분가능 함수임을 보여라. [10점]

[풀이]
f가 미분가능 함수이므로 f의 그래프 위의 모든 점에서 접선이 존재한다. 그리고 모든 실수 x에 대해서 $f'(x) \neq 0$이므로 각 접선은 x축에 평행하지 않다.
제시문 <가>에 의해 f의 그래프와 g의 그래프는 $y = x$에 대칭이고 합동이므로 함수 g 그래프의 모든 점에서 접선이 존재하고 각 접선은 y축에 평행하지 않다. 따라서 g도 미분가능 함수이다. ---------[10점]

3. 함수 f가 미분가능 함수이고 f의 도함수 $f'(x)$의 최소값이 2013이고 최대값이 2014일 때, f의 역함수 g의 도함수 $g'(x)$의 최소값과 최대값을 구하여라. [10점]

[풀이]
$f(g(x)) = g(f(x)) = x$이므로 $f'(g(x))g'(x) = 1$이다. 따라서 $f'(x)$의 최소값이 2013이면 $g'(x)$의 최대값은 $\frac{1}{2013}$이고, $f'(x)$의 최대값이 2014이면 $g'(x)$의 최소값은 $\frac{1}{2014}$이다. -------------------[10점]

[문제 2] 다음 제시문 <가>~<다>를 읽고 물음에 답하시오.

<가> $0 < x < 1$인 x를 이진법으로 표시하면 다음과 같다.

$$x = 0.b_1b_2b_3 \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} b_k 2^{-k}$$

이때 $b_k = 0$ 또는 1. 이진법으로 표시된 x의 소숫점 이동은 2^m을 곱하여 얻어진다. 예를 들어, $x = 0.b_1b_2b_3\cdots$에 대하여

$2^3x = b_1b_2b_3.b_4b_5b_6\cdots$ 이고 $2^{-2}x = 0.00b_1b_2b_3\cdots$ 이다

<나> $0 \le x \le 1$인 x에 대하여 증가 함수 f는 다음을 만족한다고 하자.

(1) $f(0) = 0,\ f(1) = 1$

(2) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{f(4x)}{16}, & 0 < x < \dfrac{1}{4} \\ \dfrac{5}{16} + \dfrac{f(4x-1)}{16}, & \dfrac{1}{4} \le x < \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{5}{8} + \dfrac{f(4x-2)}{16}, & \dfrac{1}{2} \le x < \dfrac{3}{4} \\ \dfrac{15}{16} + \dfrac{f(4x-3)}{16}, & \dfrac{3}{4} \le x < 1 \end{cases}$

<다> 위 함수 f의 정적분 $\int_0^1 f(x)dx$가 정의된다.

1. 제시문 <다>의 함수 f에 대하여 $f\left(\dfrac{1}{32}\right)$의 값을 구하시오. [5점]

[풀이]

$f(2^{-5}) = 2^{-4}f(2^{-3}) = 2^{-8}f(2^{-1}) = 2^{-8}\left(\dfrac{5}{8}\right) = \dfrac{5}{2^{11}}$. 그러므로 $f\left(\dfrac{1}{32}\right) = \dfrac{5}{2048}$. ----------------[5점]

2. 이진수 $t = 0.b_1b_2b_3b_4$에 대하여 제시문 <다>에서 정의한 함수 $f(t)$의 값을 구하시오. [25점]

[풀이]

먼저, 이진수 $t = 0.b_1b_2$에 대하여 $f(t)$을 구하자.

(경우1) $b_1 = b_2 = 0$일 때, $t = 0$이므로 $4t = 0$ 이고 $f(t) = 0 = 0.b_1b_2b_1b_2$.

(경우2) $b_1 = 0,\ b_2 = 1$일 때, $t = \dfrac{1}{4}$이므로 $4t-1 = 0$ 이고 $f(t) = \dfrac{5}{16}$. 이것을 이진법으로 표시하면

$f(t) = 0.0101 = 0.b_1b_2b_1b_2$

(경우3) $b_1 = 1,\ b_2 = 0$일 때, $t = \dfrac{1}{2}$이므로 $4t-2 = 0$ 이고 $f(t) = \dfrac{5}{8}$. 이것을 이진법으로 표시하면

$f(t) = 0.101 = 0.b_1b_2b_1b_2$

(경우4) $b_1 = 1,\ b_2 = 1$일 때, $t = \dfrac{3}{4}$이므로 $4t-3 = 0$ 이고 $f(t) = \dfrac{15}{16}$. 이것을 이진법으로 표시하면

$f(t) = 0.1111 = 0.b_1b_2b_1b_2$

즉 모든 경우에 $f(0.b_1b_2) = 0.b_1b_2b_1b_2$가 된다. --------------------------------[15점]

이제 <나>를 이용하면, 이진수 $t = 0.b_1b_2b_3b_4$에 대하여

$$f(0.b_1b_2b_3b_4) = 0.b_1b_2b_1b_2 + \frac{f(0.b_3b_4)}{16} = 0.b_1b_2b_1b_2b_3b_4b_3b_4$$

그러므로 $f(0.b_1b_2b_3b_4) = 0.b_1b_2b_1b_2b_3b_4b_3b_4$. -----------------------------------[25점]

3. 제시문 <다>의 함수 f에 대하여 정적분 $\int_0^1 f(x)\,dx$ 를 구하시오. [10점]

[풀이]

$I=\int_0^1 f(x)\,dx$ 라 하자.

$$I=\int_0^{1/4}\left[\frac{f(4x)}{16}\right]dx+\int_{1/4}^{1/2}\left[\frac{5}{16}+\frac{f(4x-1)}{16}\right]dx+\int_{1/2}^{3/4}\left[\frac{5}{8}+\frac{f(4x-2)}{16}\right]dx+\int_{3/4}^{1}\left[\frac{15}{16}+\frac{f(4x-3)}{16}\right]dx$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{5}{16}+\frac{5}{8}+\frac{15}{16}\right)+\frac{1}{16}I.$$ -------------- ----------------------------[5점]

따라서

$$I=\frac{1}{2}$$ ---[10점]

[문제 3] 다음 제시문 <가>~<다>를 읽고 물음에 답하시오.

<가> n이 양의 정수일 때, 다항식 $(1+x)^n$의 전개식을 조합의 수를 이용하여 나타내는 방법은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}(1+x)^n &= \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k x^k \\ &= 1 + {}_nC_1 x + {}_nC_2 x^2 + \cdots + {}_nC_n x^n \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n} {}_nC_k x^k\end{aligned}$$

<나> 사건 α가 일어날 확률이 p인 시행 A를 n회 시행할 때, 사건 α가 k회 일어날 확률은 ${}_nC_k p^k (1-p)^{n-k}$이다. 시행 A를 n번, 사건 β가 일어날 확률이 q인 시행 B를 m번 한다. 이 때 사건 α가 일어나는 횟수와 사건 β가 일어나는 횟수와의 합이 r일 확률은 다음과 같다.

$$P(r) = \sum_{k=0}^{r} {}_nC_k p^k (1-p)^{n-k} \times {}_mC_{r-k} q^{r-k} (1-q)^{m-r+k}$$

<다> 제시문 <나>에서 $p=q$인 경우 이는 사건 α가 일어날 확률이 p인 시행 A를 $n+m$회 시행하는 것과 같다. 따라서 이 때 사건 α가 r회 일어날 확률 $P_1(r)$은 ${}_{n+m}C_r p^r (1-p)^{n+m-r}$이다.

1. 제시문 <가>를 이용하여 다음 등식이 성립함을 간략하게 보이시오. [10점]

$$\sum_{k=1}^{n} {}_nC_k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (1+x)^k$$

[풀이]

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k x^k = 1 + \sum_{k=1}^{n} {}_nC_k x^k$$

$$\sum_{k=1}^{n} {}_nC_k x^k = (1+x)^n - 1$$ --[5점]

$$= x\{(1+x)^{n-1} + (1+x)^{n-2} + \cdots + 1\}$$

$$= x \sum_{k=0}^{n-1} (1+x)^k$$

그러므로 $\sum_{k=1}^{n} {}_nC_k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (1+x)^k$ ------------------------------------[10점]

2. 제시문 <가>와 $x=0$에서 $x=1$까지의 정적분을 이용하여 다음 합을 구하시오. [15점]

$$\frac{{}_nC_0}{1} + \frac{{}_nC_1}{2} + \cdots + \frac{{}_nC_k}{k+1} + \cdots + \frac{{}_nC_n}{n+1}$$

[풀이]

제시문 <가>에서 $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k x^k$

양변을 x의 함수로 보고 구간 $0 \leqq x \leqq 1$에 대하여 적분하면

$\int_0^1 (1+x)^n dx = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k x^k dx$ 이고 ------------------------------------[5점]

$$\left[\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k \left[\frac{x^{k+1}}{k+1}\right]_0^1$$

그러므로 $\frac{{}_nC_0}{1} + \frac{{}_nC_1}{2} + \cdots + \frac{{}_nC_n}{n+1} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$ --------------------------------[15점]

3. 제시문 <나>와 <다>를 이용하여 다음 등식이 성립함을 간략하게 보이시오. [10점]

$$_{n+m}C_r = \sum_{k=0}^{r} {}_nC_k \cdot {}_mC_{r-k}$$

[풀이]

<나>에서 $p=q$일 때 사건 α가 일어나는 횟수와 사건 β가 일어나는 횟수와의 합이 r일 확률 $P(r)$은 다음과 같다.

$$P(r) = \sum_{k=0}^{r} {}_nC_k p^k (1-p)^{n-k} \times {}_mC_{r-k} p^{r-k} (1-p)^{m-r+k}$$

$$= \sum_{k=0}^{r} {}_nC_k {}_mC_{r-k} p^r (1-p)^{n+m-r}$$

$$= p^r (1-p)^{n+m-r} \sum_{k=0}^{r} {}_nC_k {}_mC_{r-k}$$ ---------------------------------------[5점]

$p=q$일 때 사건 α가 일어나는 횟수와 사건 β가 일어나는 횟수와의 합이 r일 확률 $P(r)$은 사건 α가 일어날 확률이 p인 시행 A를 $n+m$회 시행할 때 사건 α가 r번 일어나는 확률과 같다.

따라서, <다>에 의해 $P_1(r) = {}_{n+m}C_r p^r (1-p)^{n+m-r}$이다.

그러므로

$$_{n+m}C_r = \sum_{k=0}^{r} {}_nC_k \cdot {}_mC_{r-k}$$ ---------------------------------------[10점]