한양대학교 2014학년도 신입학전형 수시 모의 출제 1차 풀이

자 연 계 | **서 술** | 오 전

수험번호 (   ) 응시번호 (   ) 성명 (   )

수험생 유의사항

1. 70분 안에 [논술 1] ~ [논술 4]의 답안을 작성하시오.
2. 수정 시 검정 볼펜으로 줄을 긋고 다시 쓰시오.
3. 답안지와 문제지를 함께 제출하시오.
4. 다음 경우는 0점 처리됩니다.
   1) 답안을 검정 볼펜으로 작성하지 않은 경우
   2) 자신의 신원을 드러내는 표기나 표현을 한 경우
   3) 수정액이나 수정테이프를 사용한 경우
   4) 답안을 해당 답란에 작성하지 않은 경우

[문제 1] 다음 제시문 <가>~<다>를 읽고 물음에 답하시오. (20점)

<가> 함수 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 가 모든 실수 x에 대해서 $f(x)=f(-x)$를 만족하면, 함수 $f(x)$는 우함수이고 $f(x)=-f(-x)$를 만족하면 함수 $f(x)$는 기함수이다.

<나> 함수 $f_1, f_2, \dots, f_n$이 모두 우함수이면 임의의 실수 $a_1, a_2, \dots, a_n$에 대하여 $a_1f_1+a_2f_2+\cdots+a_nf_n$는 우함수이고, 함수 $f_1, f_2, \dots, f_n$이 모두 기함수이면 임의의 실수 $a_1, a_2, \dots, a_n$에 대하여 $a_1f_1+a_2f_2+\cdots+a_nf_n$는 기함수이다.

<다> 임의의 함수 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$에 대해 함수 $f(x)+f(-x)$는 우함수이고 $f(x)-f(-x)$는 기함수이다.

1. $f(x)=1+x^1+x^2+\cdots+x^{2013}+x^{2014}$ **일 때,** $f(x)=g(x)+h(x)$**를 만족하는 우함수** $g(x)$**와 기함수** $h(x)$**를 구하시오.**

[풀이]

$(-x)^{2k}=(x)^{2k}$, $(-x)^{2k+1}=-(x)^{2k+1}$이므로, <나>에 의해

$g(x)=1+x^2+x^4+\cdots+x^{2014}$ 이고 $h(x)=x+x^3+x^5+\cdots+x^{2013}$이다. -----> (5점)

2. **임의의 함수** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$**에 대해,** $f(x)=g(x)+h(x)$**를 만족하는 우함수** $g(x)$**와 기함수** $h(x)$**가 항상 존재하는가?**

[풀이]

$f(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}+\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$ 이고 <나>과 <다>에 의해

$\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$은 y축 대칭함 $\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$은 y원점 대칭함수이다.

따라서, $g(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$, $h(x)=\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$가 항상 존재한다. -----> (10점)

3. **함수** $f(x)=e^x$**에 대해** $f(x)=g(x)+h(x)$**를 만족하는 우함수** $g(x)$**와 기함수** $h(x)$**를 구하시오.**

[풀이]

$f(x)=e^x$이므로 문제 2의 풀이에 의해 $g(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ 이고 $h(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ 이다. -----> (5점)

[문제 2] 다음 제시문 <가>~<다>를 읽고 물음에 답하시오. (30점)

<가> 좌표평면 $\mathbb{R}^2 = \{(x,y) \mid x, y$는 실수$\}$ 위의 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$ ($\vec{a}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$)에 대하여 다음과 같이 정의 한다.

$$\vec{a} \vee \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\sin\theta$$

(단, θ는 $\vec{a}$를 기준으로 반 시계방향으로 $\vec{b}$에 이르는 각의 크기)

<나> 임의의 평면 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$와 스칼라 k에 대하여 다음 등식이 성립한다.

(i) $(k\vec{a}) \vee \vec{b} = k(\vec{a} \vee \vec{b})$

(ii) $\vec{a} \vee (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \vee \vec{b}) + (\vec{a} \vee \vec{c})$

<다> 평행이 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$ ($\vec{a}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$)에 대하여, 모든 평면 벡터 $\vec{c}$는 다음과 같이 표현된다.

$$\vec{c} = \frac{\vec{c} \vee \vec{b}}{\vec{a} \vee \vec{b}}\vec{a} + \frac{\vec{c} \vee \vec{a}}{\vec{b} \vee \vec{a}}\vec{b}$$

1. 제시문 <가>, <나>를 근거로 하여 임의 두 벡터 $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$에 대해, $\vec{a} \vee \vec{b} = a_1b_2 - a_2b_1$이 성립함을 보이시오.

[풀이]

$\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$를 단위 벡터 $\overrightarrow{e_1} = (1,0)$, $\overrightarrow{e_2} = (0,1)$로 표현하면 다음과 같다.

$$\vec{a} = a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2}\,,\ \vec{b} = b_1\overrightarrow{e_1} + b_2\overrightarrow{e_2} \qquad \text{----> (5점)}$$

<나>에 의하여,

$$\begin{aligned}\vec{a} \vee \vec{b} &= \left(a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2}\right) \vee \left(b_1\overrightarrow{e_1} + b_2\overrightarrow{e_2}\right) \\ &= (a_1b_1)\left(\overrightarrow{e_1} \vee \overrightarrow{e_1}\right) + (a_1b_2)\left(\overrightarrow{e_1} \vee \overrightarrow{e_2}\right) + (a_2b_1)\left(\overrightarrow{e_2} \vee \overrightarrow{e_1}\right) + (a_2b_2)\left(\overrightarrow{e_2} \vee \overrightarrow{e_2}\right) \\ &= a_1b_2 - a_2b_1 \qquad \text{----> (5점)}\end{aligned}$$

2. 위치 벡터 $\vec{p}$를 지나고 방향 벡터 $\vec{a}$를 갖는 직선을 L_1, 위치 벡터 $\vec{q}$를 지나고 방향 벡터 $\vec{b}$를 갖는 직선을 L_2라 할 때, L_1과 L_2의 교점의 위치벡터 $\vec{x}$는 다음과 같이 구해진다.

$$\vec{x} = \frac{k_1}{\vec{a} \vee \vec{b}}\vec{a} + \frac{k_2}{\vec{b} \vee \vec{a}}\vec{b}$$

제시문 <가>~<나>를 근거로 k_1과 k_2를 구하시오.(단, $\vec{a}$와 $\vec{b}$ ($\vec{a}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$)는 평행하지 않음)

[풀이]

<다>에 의해 $\vec{x} = \dfrac{\vec{x} \vee \vec{b}}{\vec{a} \vee \vec{b}}\vec{a} + \dfrac{\vec{x} \vee \vec{a}}{\vec{b} \vee \vec{a}}\vec{b}$이다. 한편 $\vec{x} \vee \vec{a} = |\vec{x}|\,|\vec{a}|\sin\alpha$이므로 $|\vec{x} \vee \vec{a}|$는 두 벡터 $\vec{x}$, $\vec{a}$로 생성된 평행사변형의 면적이고, α는 $\vec{x}$를 기준으로 반 시계방향으로 $\vec{a}$에 이르는 각이다.

한편 직선 L_1은 위치 벡터 $\vec{p}$를 지나고 방향 벡터 $\vec{a}$를 갖는 직선으로 위치 벡터 $\vec{x}$를 지나므로

$$|\vec{x}|\sin\alpha = |\vec{p}|\sin\beta \qquad \text{----> (5점)}$$

여기서 β는 $\vec{p}$를 기준으로 반 시계방향으로 $\vec{a}$에 이르는 각이다. 즉

$$\vec{x} \vee \vec{a} = \vec{p} \vee \vec{a}$$

마찬가지로 $\vec{x} \vee \vec{b} = \vec{q} \vee \vec{b}$이다. 따라서

$$\vec{x} = \frac{\vec{q} \vee \vec{b}}{\vec{a} \vee \vec{b}}\vec{a} + \frac{\vec{p} \vee \vec{a}}{\vec{b} \vee \vec{a}}\vec{b}$$

그러므로 $k_1 = \vec{q} \vee \vec{b}$, $k_2 = \vec{p} \vee \vec{a}$. ----> (5점)

3. $|\vec{a}| = 1$인 벡터 $\vec{a}$에 대하여 함수 f와 g를 다음과 같이 정의할 때,

$$f(\vec{a}) = (1 + \vec{a} \vee \vec{e})^2, \qquad g(\vec{a}) = \frac{\vec{e} \vee \vec{a}}{2}$$

$f(\vec{a}) = g(\vec{a})$를 만족하는 $\vec{a}$를 모두 구하시오. (단, $\vec{e} = (1,0)$)

[풀이]

$\vec{e} \vee \vec{a} = \sin\theta$이므로 ($\theta$는 $\vec{e}$를 기준으로 반 시계방향으로 $\vec{a}$에 이르는 각의 크기) $\vec{a} \vee \vec{e} = -\sin\theta$이다.

이제 $f(\vec{a}) = g(\vec{a})$로부터

$$(1 - \sin\theta)^2 = \frac{1}{2}\sin\theta \quad \text{----> (5점)}$$

따라서 $2(\sin\theta)^2 - 5\sin\theta + 2 = 0$이고 $(2\sin\theta - 1)(\sin\theta - 2) = 0$. 그러므로 $\sin\theta = \frac{1}{2}$이고 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 또는 $\theta = \frac{5\pi}{6}$이다.

즉, $\vec{a} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 또는 $\vec{a} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$. ----> (5점)

[문제 3] 다음 제시문 <가>~<다>를 읽고 물음에 답하시오. (20점)

<가> 함수 f가 다음 조건을 만족하면 함수 f의 그래프가 위로볼록하다.

(조건 1) 함수 f는 두 번 미분가능한 함수이고 정의역 위의 모든 실수 x에 대하여 다음을 만족한다.

$$f''(x) < 0$$

(조건 2) 함수 f는 정의역 위의 모든 실수 $x,\ y$에 대하여 다음을 만족한다.

$$tf(x)+(1-t)f(y) \le f(tx+(1-t)y) \quad (0 \le t \le 1)$$

(조건 3) 함수 f는 미분가능한 함수이고 정의역 위의 모든 실수 $x,\ y$에 대하여 다음을 만족한다.

$$f(y)-f(x) \le (y-x)f'(x)$$

<나> 함수 f가 (조건 1)을 만족하면, 함수 f는 (조건 2)도 만족한다.

<다> 함수 f가 미분가능하고 (조건 2)를 만족하면, 함수 f는 (조건 3)도 만족한다.

1. $f(x) = \sqrt[3]{x}\ \ (x>0)$ 이고 $x, y > 0$일 때 다음이 성립함을 보이시오?

$$tf(x)+(1-t)f(y) \le f(tx+(1-t)y) \quad (0 \le t \le 1)$$

[풀이]

$f(x) = \sqrt[3]{x}\ \ (x>0)$ 라면, $f''(x) = \dfrac{-2}{9(x)^{5/3}} < 0\ \ (x>0)$ 이다. -----> (5점)

따라서 <나>에 의해 정의역 위의 모든 실수 $x,\ y$(즉 $x, y > 0$)에 대하여 다음을 만족한다.

$$tf(x)+(1-t)f(y) \le f(tx+(1-t)y) \quad (0 \le t \le 1).$$ -----> (5점)

2. 제시문 <나>를 이용하여 다음 합보다 큰 정수 중 최솟값을 구하시오.

$$S = \frac{1}{\sqrt[3]{2^2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[3]{1000^2}}$$

[풀이]

$x \ge 0$에 대하여 $f(x) = \sqrt[3]{x}$는 문제 1에 의해 만족한다.

$$\sqrt[3]{y} - \sqrt[3]{x} \le (y-x)\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

따라서 다음이 성립한다.

$$\sqrt[3]{k+1} - \sqrt[3]{k} \le \frac{1}{3\sqrt[3]{k^2}}, \quad \sqrt[3]{k-1} - \sqrt[3]{k} \le -\frac{1}{3\sqrt[3]{k^2}}$$ -----> (5점)

특히, $k = 2, 3, \ldots, 1000$에 대하여

(i) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{k^2}} \le \sqrt[3]{k} - \sqrt[3]{k-1}$를 적용하면 $S \le 3(\sqrt[3]{1000} - 1) = 27$

(ii) $\sqrt[3]{k+1} - \sqrt[3]{k} \le \dfrac{1}{3\sqrt[3]{k^2}}$를 적용하면 $S \ge 3(\sqrt[3]{1001} - \sqrt[3]{2}) > 3(10-1.3) = 26.1$.

따라서 S보다 큰 정수 중 최솟값은 27이다. -----> (5점)

[문제 4] 다음 제시문 <가>~<다>를 읽고 물음에 답하시오. (30점)

<가> n이 양의 정수일 때, 다항식 $(a+b)^n$의 전개식을 조합의 수를 이용하여 나타내는 방법은 다음과 같다.

$$(a+b)^n = {}_nC_0a^n + {}_nC_1a^{n-1}b + \cdots + {}_nC_ra^{n-r}b^r + \cdots + {}_nC_nb^n$$
$$= \sum_{r=0}^{n} {}_nC_r a^{n-r}b^r$$

<나> 사건 A가 일어날 확률이 p인 시행을 독립적으로 계속할 때 n회 시행에서 사건 A가 r회 일어날 확률은 ${}_nC_rp^rq^{n-r}$ $(q=1-p)$이다.

<다> 제시문 <나>에서 사건 A가 일어날 확률 p는 $0 < p < 1$을 만족한다.

1. 사건 A가 일어날 확률이 p인 시행을 A가 r회 일어날 때까지 독립적으로 계속할 때 n회 시행에서 끝나게 될 확률이 다음과 같다.

$${}_{n-1}C_{r-1}p^r(1-p)^{n-r}$$

이를 제시문 <나>를 이용하여 간략하게 보이시오.

[풀이]
$n-1$회 시행에서 사건 A가 $r-1$회 일어날 확률은 ${}_{n-1}C_{r-1}p^{r-1}(1-p)^{n-r}$ 이므로 n번째 시행에서 끝나게 될 확률은 $p \cdot {}_{n-1}C_{r-1}p^{r-1}(1-p)^{n-r} = {}_{n-1}C_{r-1}p^r(1-p)^{n-r}$ ----> (5점)

2. 사건 A가 일어날 확률이 p인 시행을 독립적으로 n회 시행했을 때, 사건 A가 짝수회 일어날 확률을 P_n이라 하자. 제시문 <가>와 <나>를 이용하여 $P_n = \dfrac{1+(1-2p)^n}{2}$를 보이시오.

[풀이]
n회 시행에서 사건 A가 r회 일어날 확률은 ${}_nC_rp^rq^{n-r}$ $(q=1-p)$

$$\sum_{r=0}^{n} {}_nC_rp^rq^{n-r} = (p+q)^n.$$

p대신 $-p$를 대입하면 $\displaystyle\sum_{r=0}^{n} {}_nC_r(-1)^rp^rq^{n-r} = (-p+q)^n = (1-2p)^n.$ ----> (5점)

위 두 등식을 더하면 $2({}_nC_0p^0q^n + {}_nC_2p^2q^{n-2} + \cdots) = (p+q)^n + (1-2p)^n = 1 + (1-2p)^n.$

그런데 $P_n = {}_nC_0p^0q^n + {}_nC_2p^2q^{n-2} + \cdots$이므로 $P_n = \dfrac{1+(1-2p)^n}{2}$이다. ----> (10점)

3. 사건 A가 일어날 확률이 p인 시행을 독립적으로 n회 시행했을 때, 사건 A가 짝수회 일어날 확률을 P_n이라 하자. 이 때 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} P_n = \frac{1}{2}$임을 보이시오.

[풀이] 문제2에 의해서 $P_n = \dfrac{1+(1-2p)^n}{2}$이고 <다>에 의해 $0 < p < 1$이므로,

$$\lim_{n\to\infty} P_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1+(1-2p)^n}{2} = \frac{1}{2}.$$ ----> (10점)