2019학년도 일반논술 전형 자연계열 문제지

==

【문제 1】 다음 제시문을 읽고 아래 질문에 답하시오.(30점)

(가) (사이값 정리)

함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,b]$에서 연속이고 $f(a) \neq f(b)$이면, $f(a)$와 $f(b)$ 사이의 임의의 실수 k에 대하여

$$f(c) = k$$

인 c가 열린구간 (a,b)에 적어도 하나 존재한다.

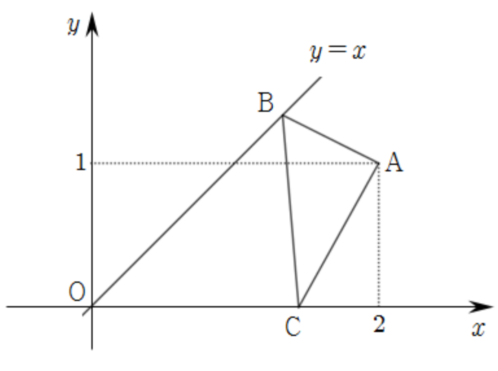
(나) 좌표평면 위의 한 점 또는 도형을 어떤 점이나 직선에 대하여 대칭인 점 또는 도형으로 옮기는 것을 각각 그 점 또는 그 직선에 대한 대칭이동이라고 한다. 좌표평면 위의 점 P(x,y)를 x축에 대하여 대칭이동한 점은 $(x,-y)$, y축에 대하여 대칭이동한 점은 $(-x,y)$, 원점에 대하여 대칭이동한 점은 $(-x,-y)$이다.

(문제 1-1) 닫힌 구간 $[1,3]$에서 연속인 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$에 대하여

$$\{f(1)-g(1)\}\{f(3)-g(3)\} < 0$$

이 성립하면, $f(c) = g(c)$를 만족하는 c가 열린구간 $(1,3)$에 적어도 하나 존재함을 설명하시오.

(문제 1-2) 아래 그림과 같이 좌표평면 위에 점 A$(2,1)$과 직선 $y=x$ 위의 점 B, x축 위의 점 C를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC가 있다. 삼각형 ABC의 둘레의 길이의 최솟값을 구하고, 이때의 점 B와 점 C의 좌표를 각각 구하시오.



[문항해설]

(문제 1–1) 사이값정리를 이용하여 이것을 $h(x)=f(x)-g(x)$ 함수에 활용할 수 있는가를 측정.

(문제 1–2) 점의 대칭이동 개념을 이용하여 삼각형의 둘레의 길이의 최솟값을 최단 거리 개념으로 구하는 문제.

[예시답안]

(문제 1–1 해설) $(f(1)-g(1))(f(3)-g(3)) < 0$ 이므로

$(f(1)-g(1))>0,\ (f(3)-g(3)) < 0$

또는 $(f(1)-g(1))<0,\ (f(3)-g(3)) > 0$ 이다.

(i) $(f(1)-g(1))>0,\ (f(3)-g(3)) < 0$ 일 때

$h(x) = f(x) - g(x)$라고 하자. 그러면 $h:[1,3] \to R$는 연속이고

$h(1) = f(1) - g(1) > 0$ 이고 $h(3) = f(3) - g(3) < 0$

이므로 사이값(중간값)정리에 의해서

$c \in (1,3)$가 존재하여 $h(c) = 0$, 즉, $f(c) = g(c)$이 성립.

(ii) 같은 방법으로, $(f(1)-g(1))<0,\ (f(3)-g(3)) > 0$ 일 때

$h(x) = f(x) - g(x)$라고 하자. 그러면 $h:[1,3] \to R$는 연속이고

$h(1) = f(1) - g(1) < 0$ 이고 $h(3) = f(3) - g(3) > 0$

이므로 사이값(중간값)정리에 의해서

$h(c) = 0$, 즉, $f(c) = g(c)$인 c가 열린구간 (a,b)에 적어도 하나 존재한다.

(문제 1–2 해설) 점 $A(2,\,1)$를 x축에 대칭 이동한 점을 A',

직선 $y = x$에 대칭 이동한 점을 A''이라고 하면,

$A'(2,\,-1)$, $A''(1,2)$이 된다.

여기서 직선 $A'A''$이 직선 $y = x$와 만나는 점이 B, x축과 만나는 점이 C일 때, 모두가 일직선상에 놓여야,

삼각형 ABC의 둘레의 길이는 최소가 된다.

따라서 최솟값은 선분 $A'A''$의 길이이고

$$\sqrt{(2-1)^2+(-1-2)^2} = \sqrt{10}$$

이다.

또한 두 점 $A'(2,\,-1)$, $A''(1,2)$을 지나는 직선의 방정식은 $y = -3x + 5$.

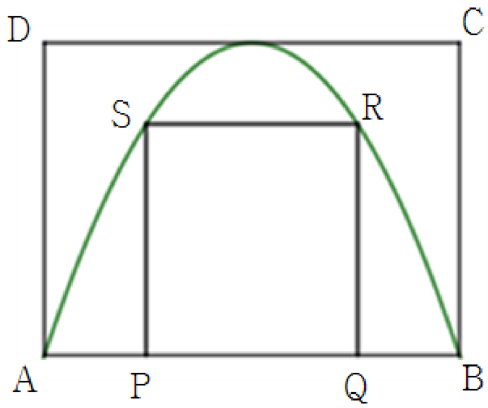
$y = -3x + 5$과 $y = x$의 교점을 구하면 $B = \left(\frac{5}{4}, \frac{5}{4}\right)$

$y = -3x + 5$과 x축의 교점을 구하면 $C = \left(\frac{5}{3}, 0\right)$

【문제 2】 아래 제시문을 읽고 문제에 답하시오.(30점)

미분가능한 함수 $f(x)$가 $f'(a)=0$이고 $x=a$의 좌우에서 (i) $f'(x)$의 부호가 양(+)에서 음(−)으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극대이고, 극댓값 $f(a)$를 갖는다. (ii) $f'(x)$의 부호가 음(−)에서 양(+)으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극소이고, 극솟값 $f(a)$를 갖는다.

가로의 길이가 8이고 세로의 길이가 6인 직사각형 ABCD의 내부에 두 점 A, B와 선분 CD의 중점을 지나는 포물선이 있다. 그림과 같이 직사각형 PQRS의 두 점 P, Q는 선분 AB 위에 있고, 두 점 R, S는 포물선 위에 있다.

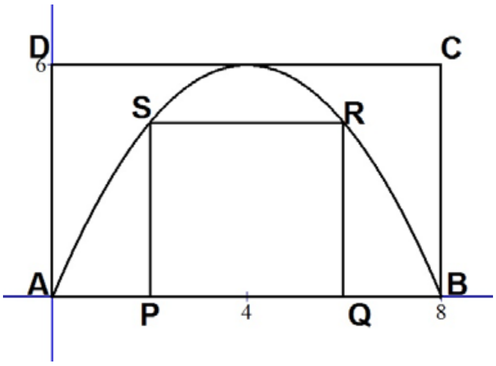


(문제 2-1) 직사각형 PQRS의 둘레의 길이의 최댓값을 구하시오.

(문제 2-2) 등변사다리꼴 ABRS의 넓이의 최댓값을 구하시오.

[문항해설]
(문제 2-1) 이차함수의 그래프의 식을 찾고, 주어진 범위에서 최댓값을 찾을 수 있는지를 측정
(문제 2-2) 삼차함수의 그래프의 개형을 그리고, 주어진 범위에서 최댓값을 찾을 수 있는지를 측정

[예시답안]
(문제2-1 해설) (방법-1)



그림과 같이 좌표축을 설정하고, 꼭지점의 좌표를 $S\,(x,y)$라고 하자.

그러면 직사각형의 둘레 A는

$$A = 2(\text{가로}+\text{세로}) = 2((8-2x)+y)$$

이다. 이때 포물선 $y = ax(x-8)$이라고 하자. 점 $(4,6)$을 지나므로 대입하면 $a = -\dfrac{3}{8}$을 얻고, 포물선은

$$y = -\frac{3}{8}x(x-8) = -\frac{3}{8}x^2+3x$$

이다. 따라서 직사각형의 둘레는

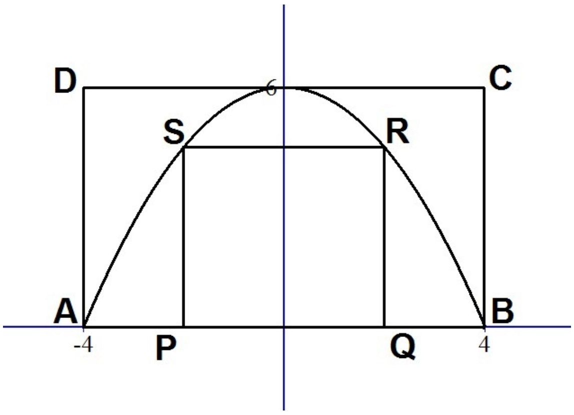
$$A = -\frac{3}{4}x^2+2x+16 = -\frac{3}{4}\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+\frac{4}{3}+16$$

로부터 $x = \dfrac{4}{3}$일 때 최댓값을 갖는다. 따라서 직사각형의 둘레의 최댓값은

$$A = \frac{4}{3} + 16 = \frac{52}{3}$$

이다.

(방법-2)



그림과 같이 좌표축을 설정하고, 꼭지점의 좌표를 $R(x, y)$라고 하자.

그러면 직사각형의 둘레 A는

$$A = 2(\text{가로} + \text{세로}) = 2(2x + y)$$

이다. 이때 포물선 $y = a(x+4)(x-4)$이라고 하자. 점 $(0, 6)$을 지나므로 대입하면 $a = -\frac{3}{8}$을 얻고,

포물선은

$$y = -\frac{3}{8}(x+4)(x-4) = -\frac{3}{8}x^2 + 6$$

이다. 따라서 직사각형의 둘레의 길이는

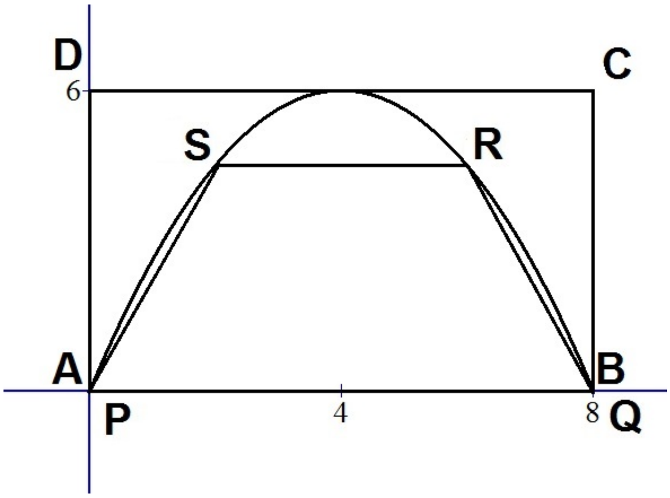
$$A = 4x + 2y = -\frac{3}{4}x^2 + 4x + 12$$

$$= -\frac{3}{4}\left(x - \frac{8}{3}\right)^2 + \frac{16}{3} + 12$$

이고 $x = \frac{8}{3}$일 때 최댓값을 갖는다. 따라서 직사각형의 둘레의 길이의

최댓값은 $A = \frac{16}{3} + 12 = \frac{52}{3}$.

(문제2-2 해설) (방법-1)



그림과 같이 좌표축을 설정하고, 꼭지점의 좌표를 $\mathrm{S}\,(x, y)$라고 하자.

그러면 등변사다리꼴의 넓이 S는

$$S = \frac{(\text{밑변}+\text{윗변})}{2} \times \text{높이} = \frac{1}{2}(8+8-2x)y = (8-x)y$$

이다. 이때 포물선 $y = ax(x-8)$이라고 하자. 점 $(4, 6)$을 지나므로 대입하면 $a = -\frac{3}{8}$을 얻고, 포물선은

$$y = -\frac{3}{8}x(x-8) = -\frac{3}{8}x^2 + 3x$$

이다. 따라서 등변사다리꼴의 넓이는

$$S = (8-x)y = (8-x)(-\frac{3}{8})x(x-8)$$

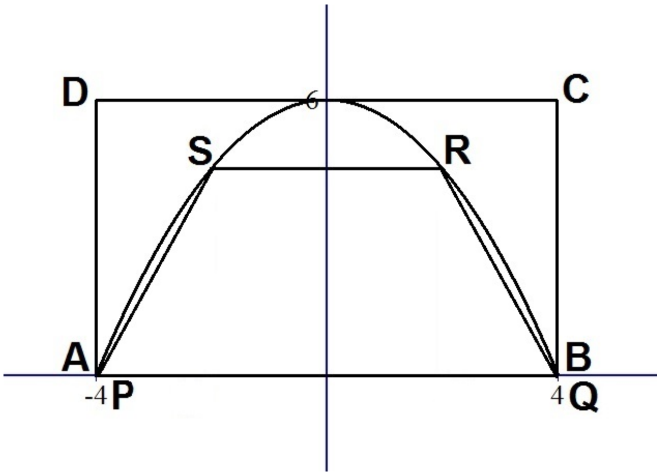
이고

$$\frac{dS}{dx} = \frac{9}{8}x^2 - 12x + 24 = 0$$

로부터 $x = 8(\text{부적합}),\ \frac{8}{3}(\text{적합})$이다. 따라서

등변사다리꼴의 넓이는 $S = \left(\frac{16}{3}\right)^2 = \frac{256}{9}$.

(방법-2)



그림과 같이 좌표축을 설정하고, 꼭지점의 좌표를 $R(x, y)$라고 하자.

그러면 등변사다리꼴의 넓이 S는

$$S = \frac{(\text{밑변}+\text{윗변})}{2} \times \text{높이} = \frac{1}{2}(8+2x)y = (4+x)y$$

이다. 이때 포물선 $y = a(x+4)(x-4)$이라고 하자. 점 $(0, 6)$을 지나므로 대입하면 $a = -\frac{3}{8}$을 얻고, 포물선은

$$y = -\frac{3}{8}(x+4)(x-4) = -\frac{3}{8}x^2 + 6$$

이다. 따라서 등변사다리꼴의 넓이는

$$S = (4+x)y = (4+x)(-\frac{3}{8}x^2+6)$$

이고

$$\frac{dS}{dx} = -\frac{9}{8}x^2 - 3x + 6 = 0$$

로부터 $x = -4(\text{부적합}),\ \frac{4}{3}(\text{적합})$이다. 따라서

등변사다리꼴의 넓이는 $S = \left(\frac{16}{3}\right)^2 = \frac{256}{9}$.

【문제 3】 아래 제시문을 읽고 문제에 답하시오.(40점)

(가) 좌표공간에서 점 (x_1, y_1, z_1)을 지나고 벡터 $\overrightarrow{u} = (a, b, c)$에 평행한 직선의 방정식은

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$$

이다. (단, $abc \neq 0$)

(나) 좌표공간에서 x, y, z에 대한 일차방정식

$$ax + by + cz + d = 0$$

은 벡터 $\overrightarrow{n} = (a, b, c)$에 수직인 평면을 나타낸다. (단, a, b, c, d는 상수이다.)

좌표공간에서 중심이 점 $\mathrm{P}(0, 0, 1)$이고 반지름의 길이가 1인 구

$$x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$$

을 S라고 하자. 점 $\mathrm{N}(0, 0, 2)$를 지나는 직선을 l이라고 할 때, 직선 l은 구 S와 xy평면을 지난다.

(문제 3-1) 점 $\mathrm{B}_1\left(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}, 0\right)$을 지나는 직선 l이 구 S와 만나는 점 중 점 N이 아닌 점을 A_1, 점 $\mathrm{B}_2(3, 1, 0)$을 지나는 직선 l이 구 S와 만나는 점 중 점 N이 아닌 점을 A_2라고 할 때, 세 점 $\mathrm{P}, \mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2$를 지나는 평면의 방정식을 구하시오.

(문제 3-2) 사면체 $\mathrm{NPA}_1\mathrm{A}_2$의 부피를 구하시오.

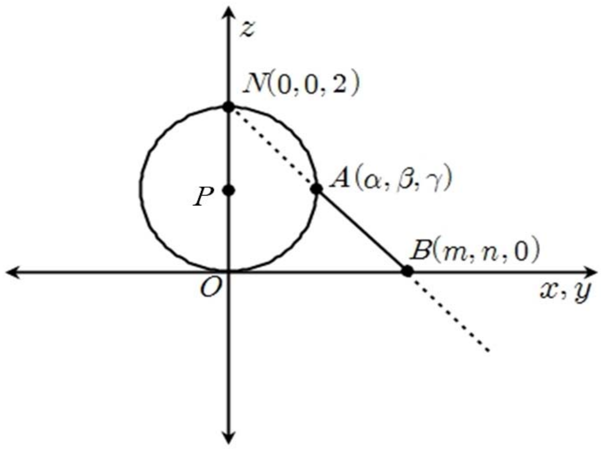
[문항해설]

(문제 3-1) 직선을 이용하여 구와 평면간의 대응을 알아보고, 세 점을 지나는 평면의 방정식을 구할 수 있는가 측정.

(문제 3-2) 삼각형의 넓이를 구하고 점과 평면사이의 최단거리를 구하여 부피를 구할 수 있는지 측정

[예시답안]

(문제 3-1)



위의 대응관계로부터, 한 점 $N(0,0,2)$에서 구를 통과하는 직선을 그릴 때 점 $N(0,0,2)$, $A(\alpha,\beta,\gamma)$ 그리고 $B(m,n,0)$는 동일 직선상에 있음을 알 수 있다. 따라서 점 $N(0,0,2)$을 지나고 벡터 $\overrightarrow{NA}=(\alpha,\beta,\gamma-2)$에 평행한 직선의 방정식은

$$\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z-2}{\gamma-2}$$

이다. 이때

$$\frac{\alpha}{m}=\frac{\beta}{n}=\frac{\gamma-2}{-2}=k \qquad \text{(단, } k\text{는 상수)}$$

라고 하자. 그러면

$$\alpha=km,\ \beta=kn,\ \gamma=2-2k$$

이고 점 (α,β,γ)가 구위의 점이므로

$$\alpha^2+\beta^2+(\gamma-1)^2=(km)^2+(kn)^2+(1-2k)^2=1$$

을 만족한다. 이 식으로부터 $k=\dfrac{4}{(m^2+n^2+4)}$를 구하고, 위 식에 대입하면

$$\alpha=\frac{4m}{m^2+n^2+4},\ \beta=\frac{4n}{m^2+n^2+4},\ \gamma=\frac{2(m^2+n^2)}{m^2+n^2+4}$$

이다. 따라서 점 $B_1\left(\frac{4}{5},\frac{2}{5},0\right)$에 대응되는 점은 $A_1=\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$

이고, 점 $B_2(3, 1, 0)$의 대응점은 $A_2 = \left(\frac{6}{7}, \frac{2}{7}, \frac{10}{7}\right)$이다.

이제 세 점P, A_1, A_2을 지나는 평면의 방정식을

$$ax + by + cz + d = 0$$

이라고 하자. 그러면 위의 세 점 P, A_1, A_2을 지나므로,

$$c + d = 0$$
$$2a + b + c + 3d = 0$$
$$6a + 2b + 10c + 7d = 0$$

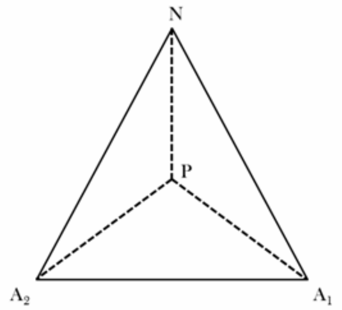
을 만족한다. 위 식으로부터

$$c = -d,\ b = -9d,\ a = \frac{7d}{2}$$

을 얻는다.
따라서 평면의 방정식은

$$\frac{7}{2}x - 9y - z + 1 = 0 \text{ 또는 } 7x - 18y - 2z + 2 = 0.$$

(문제 3-2)



사면체의 부피를 구하기 위하여, 주어진 점 N에서 평면

$$\frac{7}{2}x - 9y - z + 1 = 0 \quad \text{또는 } 7x - 18y - 2z + 2 = 0.$$

까지의 최단거리 h는

$$h = \frac{|\ ax_1 + by_1 + cz_1 + d\ |}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$= \frac{|\ 7/2 \times 0 - 9 \times 0 - 2 + 1\ |}{\sqrt{(7/2)^2 + (-9)^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{377}}$$

임을 알수 있다.

이제 삼각형 PA_1A_2의 넓이 S를 구해보자.

$P = (0, 0, 1)$, $A_1 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, $A_2 = \left(\frac{6}{7}, \frac{2}{7}, \frac{10}{7}\right)$일 때,

두 벡터 $\overrightarrow{PA_1} = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$, $\overrightarrow{PA_2} = (\frac{6}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7})$와 그 사잇각 θ에 대하여, 삼각형 PA_1A_2의 넓이 $S = \frac{1}{2}\ |\overrightarrow{PA_1}|\ |\overrightarrow{PA_2}|\sin\theta$ 를 구하자.

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{PA_1} \cdot \overrightarrow{PA_2}}{|\overrightarrow{PA_1}|\ |\overrightarrow{PA_2}|} = \frac{8}{21}$$

이므로 $\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-\left(\frac{8}{21}\right)^2} = \frac{\sqrt{29\times 13}}{21}$이다. 따라서

삼각형 PA_1A_2의 넓이 $S = \frac{1}{2}\ |\overrightarrow{PA_1}|\ |\overrightarrow{PA_2}|\sin\theta = \frac{\sqrt{377}}{42}$이다.

그러므로 사면체의 부피는

$$V = \frac{1}{3} \times S \times h = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{377}}{42} \times \frac{2}{\sqrt{377}} = \frac{1}{63}.$$