

2018학년도 일반논술 전형 자연계열 문제지

제시문 및 출제의도

=====

【문제 1】 다음 제시문을 읽고 아래 질문에 답하십시오.(50점)

(가) 함수 $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ 에서 x 의 값이 한없이 커질 때 y 의 값은 2.71828182845... 인 무리수에 수렴함이 알려져 있으며, 이 수를 e 로 나타낸다. 즉,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad \text{또는} \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

이다.

(나) 함수 $y = f(x)$ 에 대하여, 극한값 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ 가 존재하면 함수 $f(x)$ 는 $x = a$ 에서 미분가능하다고 하고, 이 극한값을 $x = a$ 에서 $f(x)$ 의 미분계수라고 한다.

(문제 1-1) 제시문(가)를 이용하여 식 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} = \ln a$ 가 성립함을 보이시오.

(단, $a > 0, a \neq 1$)

(문제 1-2) 도함수의 정의를 이용하여 함수 $y = \cos 2x$ 의 도함수를 구하십시오.

(문제 1-3) 함수 $f(x)$ 가 구간 $[a, b]$ 에서 연속일 때, 함수 $f(x)$ 의 a 에서 b 까지의 정적분

$\int_a^b f(x) dx$ 의 정의를 쓰고, 이 정의를 이용하여 다음 극한값을 구하십시오.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi^2}{n^2} \left(\cos \frac{\pi}{2n} + 2 \cos \frac{2\pi}{2n} + 3 \cos \frac{3\pi}{2n} + \dots + n \cos \frac{n\pi}{2n} \right)$$

【문제 2】 다음 제시문을 읽고 아래 질문에 답하시오.(50점)

(가) 첫째항 a_1 에 차례로 일정한 수를 곱하여 얻어진 수열을 등비수열이라 하고, 그 일정한 수 r 을 공비라고 한다. 이때 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} = r a_n$$

이 성립한다.

(나) 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 각 항을 차례로 덧셈 기호 $+$ 로 연결한 식

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

을 급수라 하고, 기호 \sum 를 사용하여 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 과 같이 나타낸다.

(문제 2-1) 첫째항 a , 공비가 r 인 등비수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 을 구하는 방법을 설명하고, 다음 등비수열의 첫째항부터 제16항까지의 합 S_{16} 을 구하시오.

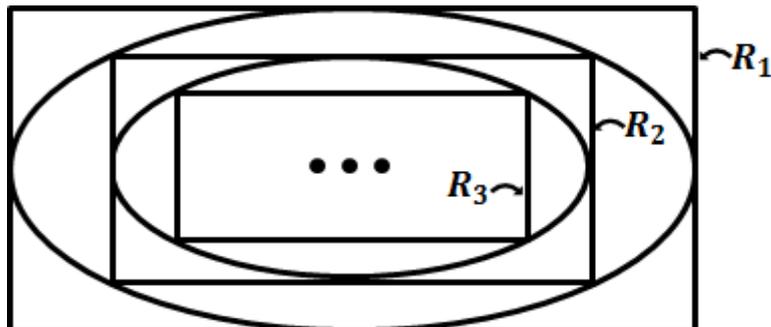
$$\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1, \sqrt{2}, 2, \dots$$

(문제 2-2) 급수의 수렴과 발산의 뜻을 설명하고, 아래 급수의 수렴과 발산을 조사하시오.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \sqrt{n+2} + (n+2) \sqrt{n}}$$

(문제 2-3) 가로길이가 8이고 세로길이가 4인 직사각형 R_1 의 내부에 아래 그림과 같이 내접하는 타원을 그리고, 이 타원에 내접하면서 넓이가 최대인 직사각형 R_2 를 그린다. 다시 이 직사각형에 내접하는 타원과 그 안에 내접하면서 넓이가 최대인 직사각형 R_3 을 그린다. 이와 같은 방법으로 타원과 직사각형을 한없이 그려 나갈 때, 직사각형 R_n

($n=1,2,3,\dots$)의 넓이를 a_n 이라고 하자. 이때, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 의 합을 구하시오.



1. 출제의도

(문제 1-1) 무리수 e 의 정의를 알고, 이것을 지수함수의 극한을 구하는 문제에 활용할 수 있는가를 측정한다.

(문제 1-2) 도함수의 정의와 삼각함수의 극한을 이용하여 삼각함수의 도함수를 구할 수 있는가를 측정한다.

(문제 1-3) 정적분의 뜻을 알고, 부분적분법을 이해하고 활용할 수 있는지 측정한다.

(문제 2-1) 등비수열의 성질을 활용하여 n 항까지의 합을 구할 수 있는가하는 문제를 측정한다.

(문제 2-2) 수열의 n 항까지 부분합의 수열 S_n 의 극한을 이용하여 수렴과 발산을 판정한다.

(문제 2-3) 타원과 직사각형의 내접관계를 통하여 내접하는 직사각형의 등비급수를 유도하고 합을 구할 수 있는가 측정.

2. 문항분석

(문제 1-1) 무리수 e 의 정의를 이용하여 지수함수에 대한 극한을 구하고 성립함을 보인다.

(문제 1-2) 도함수의 정의를 이용하여 삼각함수의 도함수를 계산하는 과정에 삼각함수의 극한을 이용하는 문제이다.

(문제 1-3) 정적분의 뜻을 쓰고, 정의에 따라 구한 정적분식을 부분적분법을 이용하여 계산한다.

(문제 2-1) 등비수열의 첫째항부터 제 n 항까지 합을 구한다.

(문제 2-2) 급수의 수렴과 발산의 뜻을 설명하고 이것에 따라 판정한다.

(문제 2-3) 타원과 직사각형의 내접관계를 통하여, 직사각형들의 넓이의 규칙을 찾아내고 그들의 등비급수의 합을 구하는 문제이다.