

# 2016학년도 수시모집 논술시험 의예과(수학)

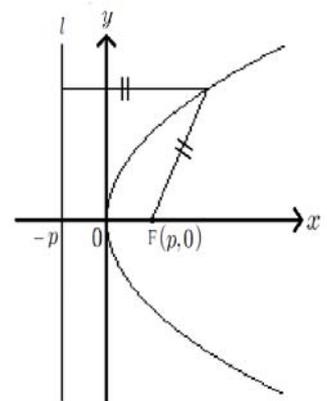
## 출제의도 및 제시문 분석

【문제 1】 아래의 제시문을 읽고 다음 질문에 답하시오. (60점)

(가) 평면이나 공간에서 영벡터가 아닌 두 벡터  $\vec{a}, \vec{b}$ 가 이루는 각의 크기가  $\theta$ 일 때 두 벡터의 내적은  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos\theta$  로 정의된다. 이를 벡터의 성분을 이용하여 나타내면 평면벡터의 경우  $\vec{a} = (a_1, a_2), \vec{b} = (b_1, b_2)$  일 때  $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$ 이고, 공간벡터의 경우  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$  일 때  $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$  이다.

(나) 평면 위의 한 점 F와 점 F를 지나지 않는 직선  $l$ 이 주어져 있을 때, 점 F와 직선  $l$ 로부터 거리가 같은 점들의 집합을 **포물선**이라고 한다. 이 때 점 F를 포물선의 초점, 직선  $l$ 을 포물선의 준선이라고 한다.

초점이  $F(p, 0)$ 이고 준선이  $x = -p$ (단,  $p > 0$ )인 포물선의 그래프는 오른쪽의 그림과 같고 그 방정식은  $y^2 = 4px$ 이다.



(다) 일차변환  $f: (x, y) \rightarrow (x', y')$ 이

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases} \quad (\text{단, } a, b, c, d \text{는 상수})$$

로 주어질 때, 이 식을 행렬로 나타내면  $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 이다.

이때 행렬  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 를 일차변환  $f$ 를 나타내는 행렬 또는 일차변환  $f$ 의 행렬이라고 한다. 원점을 중심으로 각의 크기  $\theta$ 만큼 회전하는 회전변환의 행렬은  $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ 로 표현되며, 원점을 중심으로 하는 닮음비가  $k$ 인 닮음변환의 행렬은  $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$ 이고  $x$ 축에 대한 대칭변환의 행렬은  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ 이다. 그리고 두 일차변환  $f, g$ 의 행렬을 각각  $A, B$ 라고 할 때, 합성변환  $g \circ f$ 의 행렬은  $BA$ 이다.

(문제1-1) 좌표평면 위의 한 직선  $l: ax+by+c=0$ 과 한 점  $A(x_1, y_1)$ 사이의 거리는  $\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 임을 보이시오. (15점)

(문제1-2) 직선  $\alpha: x+y+2=0$ 을 준선으로 갖고 점 F(1,1)을 초점으로 갖는 포물선을 좌표평면에 그리고, 제시문 (나)의 정의를 이용하여 주어진 포물선의 이차방정식을 구하시오. (15점)

(문제1-3) 일차변환  $f$ 를 나타내는 행렬이  $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 일 때 이 일차변환  $f$ 에 의하여 직선

$\beta: 3x+y-24=0$ 과 (문제1-2)의 포물선은 각각 어떤 도형으로 옮겨지는지 구하시오.(15점)

(문제1-4) 위 (문제1-3)에서 구한 두 도형에 의해 둘러싸인 영역의 넓이를 구하시오. 그리고 (문제1-2)의 포물선과 직선  $\beta: 3x+y-24=0$ 에 의해 둘러싸인 영역의 넓이를 유추하시오.(15점)

## 1. 출제의도

일차변환과 행렬, 이차곡선, 도형, 적분에 대한 개념 및 기본 지식을 갖추고 있는지, 그리고 이를 이용한 계산능력과 문제를 해결하는 능력, 종합적 추론능력 등을 측정하고자 하였다.

## 2. 문항분석

(문제1-1) 평면상의 점과 직선과의 거리에 관한 공식을 유도하는 문제로 벡터의 내적이나 평행개념 또는 연립방정식 풀이법을 적용하여 풀 수있다.

(문제1-2) 포물선의 정의를 이해하고 이를 수식으로 표현하여 정리

(문제1-3) 행렬계산을 통해 도형의 일차변환 파악

(문제1-4) 도형의 넓이계산과 일차변환의 합성에 관한 정보를 파악하여 변환 전 도형에 관한 정보 유추