

2016학년도 수시모집 논술시험 자연계열 출제의도 및 제시문 분석

<출제의도> : 순열, (중복)조합에 대한 개념의 이해와 활용 그리고 미지수의 점진적 처리 능력에 대한 문제해결 능력, 논리력, 표현력 등을 측정하도록 하였다.

【문제 1】 아래 제시문을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오. (45점)

(가) 자연수 n 에 대하여 $n!$ 은 n 이하의 모든 자연수의 곱으로 정의한다. 즉,

$$n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1$$

이며 $0! = 1$ 로 정의한다.

자연수 n 과 $0 \leq k \leq n$ 에 대하여, 이항계수 ${}_n C_k$ 는 n 개의 사물 중 k 개의 사물을 선택하는 방법의 수로 정의하며, 다음의 식으로 주어진다.

$${}_n C_k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

(나) 자연수 n 에 대하여, 등식 $x+y+z=n$ 의 음이 아닌 정수해의 순서쌍 (x, y, z) 의 개수를 a_n 이라 하자.

(다) 3명의 학생(ㄱ, ㄴ, ㄷ)이 똑같이 9천원씩 내고 식당에서 식사를 하였다. 그 식당에는 다양한 종류의 김밥, 라면, 음료수가 있었고, 세 학생은 각각 김밥, 라면, 음료수를 모두 주문했으며, 각자의 취향에 따라 학생들이 선택한 김밥, 라면, 음료수는 서로 달랐다.

학생들이 각자 고른 김밥의 가격은 모두 달랐지만, 세 학생이 먹은 김밥 값의 합은 9천원이었으며, 라면의 가격도 다 다르되 그 합은 9천원, 음료수의 가격도 다 다르되 그 합은 9천원이었다. 학생들이 고른 음식 중에서 가장 비싼 것은 ㄱ학생의 라면이었다. ㄴ학생의 김밥 값은 ㄴ이 고른 라면 값의 두 배였다. 단, 돈은 천원 단위이고 모두 자연수이다.

(문제1-1) 자연수 n 이 1 또는 2인 경우, 등식 $x+y+z=n$ 을 만족하는 음이 아닌 정수해의 순서쌍 (x, y, z) 를 모두 나열하고, 제시문 (나)에 정의된 a_n 의 초항 a_1 과 a_2 의 값을 각각 구하시오. (10점)

(문제1-2) $n=9$ 에 대해 등식 $x+y+z=n$ 을 만족하고 x 의 값이 1 이상, y 의 값이 2 이상, z 의 값이 3 이상을 만족하는 음이 아닌 정수해의 순서쌍 (x, y, z) 를 모두 나열하시오. 그리고 이 순서쌍의 개수 b_9 는 제시문 (나)의 a_3 과 같음을 보이시오. 또, 등식 $b_9 + 45 = a_9$ 가 성립하는데, 여기서 숫자 45는 어떤 조건들을 만족하는 정수해의 순서쌍 (x, y, z) 의 개수가 된다. 그 조건들을 찾으시오. (15점)

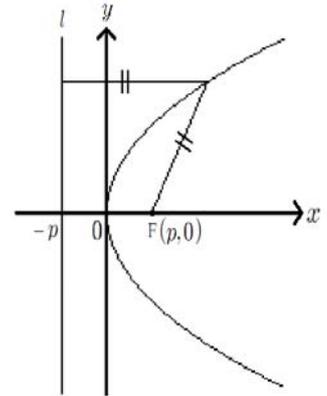
(문제1-3) 제시문 (다)에 나오는 ㄷ학생이 음료수를 사는 데에 쓴 돈은 얼마인지 찾고, 답의 이유를 명확히 설명하시오. (20점)

【문제 2】 아래의 제시문을 읽고 다음 질문에 답하시오. (55점)

(가) 평면이나 공간에서 영벡터가 아닌 두 벡터 \vec{a}, \vec{b} 가 이루는 각의 크기가 θ 일 때 두 벡터의 내적은 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos\theta$ 로 정의된다. 이를 벡터의 성분을 이용하여 나타내면 평면벡터의 경우 $\vec{a}=(a_1, a_2), \vec{b}=(b_1, b_2)$ 일 때 $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$ 이고, 공간벡터의 경우 $\vec{a}=(a_1, a_2, a_3), \vec{b}=(b_1, b_2, b_3)$ 일 때 $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ 이다.

(나) 평면 위의 한 점 F와 점 F를 지나지 않는 직선 l 이 주어져 있을 때, 점 F와 직선 l 로부터 거리가 같은 점들의 집합을 **포물선**이라고 한다. 이 때 점 F를 포물선의 초점, 직선 l 을 포물선의 준선이라고 한다.

초점이 $F(p, 0)$ 이고 준선이 $x = -p$ (단, $p > 0$)인 포물선의 그래프는 오른쪽의 그림과 같고 그 방정식은 $y^2 = 4px$ 이다.



(다) 일차변환 $f: (x, y) \rightarrow (x', y')$ 이

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases} \quad (\text{단, } a, b, c, d \text{는 상수})$$

로 주어질 때, 이 식을 행렬로 나타내면 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 이다.

이때 행렬 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 를 일차변환 f 를 나타내는 행렬 또는 일차변환 f 의 행렬이라고 한다. 원점을 중심으로 각의 크기 θ 만큼 회전하는 회전변환의 행렬은 $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ 로 표현된다.

(문제2-1) 좌표평면 위의 한 직선 $l: ax+by+c=0$ 과 한 점 $A(x_1, y_1)$ 사이의 거리는 $\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 임을 보이시오. (15점)

(문제2-2) 직선 $\alpha: x+y+2=0$ 을 준선으로 갖고 점 $F(1,1)$ 을 초점으로 갖는 포물선을 좌표평면에 그리고, 제시문 (나)의 정의를 이용하여 주어진 포물선의 이차방정식을 구하시오. (20점)

(문제2-3) 원점을 중심으로 각의 크기 $\frac{\pi}{4}$ 만큼 회전하는 회전변환에 의하여 직선 $\beta: 3x+y-8=0$ 과 (문제2-2)의 포물선은 각각 어떤 도형으로 옮겨지는지 구하시오. 그리고 앞에서 구한 두 도형에 의해 둘러싸인 영역의 넓이를 계산하시오. (20점)

【문제1】

1. 출제의도

순열, (중복)조합에 대한 개념의 이해와 활용 그리고 미지수의 점진적 처리 능력에 대한 문제해결 능력, 논리력, 표현력 등을 측정하기 위해 출제 하였다.

2. 문항분석

(문제 1-1)은 중복조합에 대한 기본 문제로, 방정식 $x+y+z=n$, ($n=1,2$)을 만족하는 음이 아닌 정수해를 찾는 문제이다.

(문제 1-2)는 중복조합에 대한 이해와 응용에 관한 문제이다. 어떤 제한된 조건을 갖는 등식 $x+y+z=9$ 을 만족하는 음이 아닌 정수해를 찾고, (문제1-1)의 해와의 관계를 분석하는 문제이다.

(문제 1-3)는 중복조합의 이해와 논리력, 미지수의 점진적 처리 능력에 대한 문제해결을 알아보는 문제이다. $x+y+z=9$ 를 만족하는 또 다른 제한된 조건을 갖는 음이 아닌 정수해들을 찾아서 이 정수해들의 상호 관련된 조건을 논리적으로 다루고 표현하는 문제이다.

【문제2】

1. 출제의도

일차변환과 행렬, 이차곡선, 도형, 적분에 대한 개념 및 기본 지식을 갖추고 있는지, 그리고 이를 이용한 계산능력과 문제를 해결하는 능력 등을 측정하고자 하였다.

2. 문항분석

(문제1-1) 평면상의 점과 직선과의 거리에 관한 공식을 유도하는 문제로 벡터의 내적이나 평행개념 또는 연립방정식 풀이법을 적용하여 풀 수 있다.

(문제1-2) 포물선의 정의를 이해하고 이를 수식으로 표현하여 정리하는 문제이다.

(문제1-3) 행렬에 의한 도형의 변환 계산을 통해 변환된 도형에 의해 둘러싸인 영역의 넓이를 적분식을 세워 구한다.