2015년도 수시모집 논술시험 자연계열
출제의도 및 제시문 분석

==

【문제 1】

(가) 수 체계는 인류의 역사와 더불어 확장되었을 뿐 아니라 수학에서 가장 기본적인 도구이며 동시에 탐구의 대상이 되어왔다. 초·중등 과정의 수학에서는 자연수, 유리수, 실수, 복소수까지 수 개념을 체계적으로 확장해 가는데, 이 과정에서 반드시 같이 논의되어야 하는 것이 연산의 정의와 성질이다.

유리수 집합(Q), 실수 집합(R), 복소수 집합(C)에서 3개 이상의 수를 연산할 때는 왼쪽에서 오른쪽으로 두 개씩 차례로 계산한다(예제1). 그러나 대부분의 학생들은 (예제2)에서 제시한 방법으로 계산할 것이다. 이와 같은 계산 과정에는 특별한 연산 성질들이 적용된다.

예제1. $4+13+1+(-7)+6=((((4+13)+1)+(-7))+6)$
$=(((17+1)+(-7))+6)=((18+(-7))+6)=(11+6)=17.$

예제2. $4+13+1+(-7)+6=4+13+(-7)+1+6=4+13+(-7)+(1+6)$
$=4+13+0=4+(13+0)=4+13=17.$

(나) 수 집합에서 덧셈이나 곱셈을 자연스럽게 계산하기 위해서 만들어진 성질들은 특별한 공통점을 갖는다. 이를 통해 수 집합의 연산 구조를 일반적인 집합으로 확장하는 것이 가능하다. 예를 들면, 네 개의 실수를 정사각형 모양으로 배열하여 괄호로 묶은 2×2 행렬들의 집합 $M_2(R)=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in R\right\}$에는 행렬의 덧셈과 곱셈이 정의되어 있다.

(문제 1-1) 제시문 (가)에서 설명한 수 집합의 덧셈에 대한 성질을 참고하여 (나)의 집합 $M_2(R)$의 행렬 덧셈과 곱셈에서 찾을 수 있는 연산의 성질을 모두 찾아서 그 예를 들어 설명하시오.

(문제1-2) 행렬 덧셈이나 행렬 곱셈의 성질을 근거로 제시하여, 다음 명제가 참인지 거짓인지 논리적으로 설명하시오.

명제: $M_2(R)$의 임의의 원소 A와 단위행렬 E에 대하여 $A^2-3A+2E=O$이면 $A=E$ 또는 $A=2E$이다.

연세대학교 YONSEI UNIVERSITY

1. 출제의도

초·중등 과정에서 배우는 수 개념을 체계적으로 확장하는데 필수적인 요소인 사칙연산과 그 성질들을 이해하고 활용할 수 있는 지식을 갖추고 있는지 확인한다.

2. 문항분석

행렬 집합의 연산의 성질을 수 개념의 연산 성질과 비교 분석하고 그 차이점을 알고 있는지에 대한 문제이다. [문제 1-1]은 행렬들의 덧셈과 곱셈 과정에서 나타나는 연산의 성질들을 찾는 문제이다. [문제 1-2]는 행렬에서 곱셈에 관하여 성립하지 않는 한 연산 성질을 알아보는 문제이다.

[문제 2]

우리가 배우는 수학은 숫자와 이를 이용한 수많은 명제들로 이루어져 있다. 모든 자연수 n에 대하여 어떤 명제가 성립함을 보이는 방법으로 아래와 같은 수학적 귀납법을 사용한다.

수학적 귀납법

자연수 n에 대한 명제 $p(n)$이 모든 자연수에 대하여 참임을 증명하려면, 다음과 같이 두 가지를 보이면 된다.

(1) $n=1$일 때, 명제 $p(n)$이 성립한다.

(2) $n=k$일 때, 명제 $p(n)$이 성립한다고 가정하면, $n=k+1$일 때에도 명제 $p(n)$이 성립한다.

위의 방법은 예를 들면 수열의 귀납적 정의나 자연수 집합과 연관된 많은 공식을 증명하는데 널리 사용되고 있다.

(문제 2-1) 장축의 길이가 $2a$, 단축의 길이가 $2b$인 타원의 넓이를 구하는 방법을 설명하고 그 근거를 제시하시오.

(문제 2-2) A_n을 장축의 길이가 2($n+1$), 단축의 길이가 2n인 타원의 넓이라 할 때, $S_n=\sum_{k=1}^{n}A_k$의 값을 구하고 그 값이 모든 자연수 n에 대하여 성립하는지 수학적 귀납법을 사용하여 설명하시오.

(문제 2-3) 자연수 집합에서 덧셈은 결합법칙이 성립하는 연산이다. 이 사실과 수학적 귀납법을 사용하여 아래의 교환법칙이 성립함을 보이시오.

교환법칙: 모든 자연수 m,n에 대하여 $m+n=n+m$이다

1. 출제의도

수학적 귀납법, 연산의 기본법칙, 수열과 급수, 적분에 대한 개념의 이해 정도와 기본 지식의 축적도, 그리고 문제해결 시 수학지식의 엄밀한 적용능력 등을 측정하도록 하였다.

2. 문항분석

[문제 2-1]은 주어진 타원의 식을 구하고 이를 이용하여 세운 주어진 도형의 넓이를 구하는 정적분 식을 계산한다. [문제 2-2]는 [문제 2-1]의 결과를 이용하여 주어진 급수식을 구하고, 이를 이용하여 자연수 n에 대한 명제를 만들고 이것을 지문에 제시된 수학적 귀납법을 사용하여 참임을 보이는 문제이다. [문제 2-3]은 자연수 집합에 정의된 한 연산의 특성을 수학적 귀납법을 사용하여 보이는 문제이다.