2. 출제의도·제시문 설명

가. 출제의도

[문제 1]과 [문제 2] 수학을 논리적으로 활용하는 능력

○ 교과서의 기본 내용을 바탕으로 수학적 개념에 대한 적절한 이해력과 논리력 측정
○ 고등학교 자연계 학생들이 학습하는 극한의 개념을 이해하고 계산할 수 있는지, 미분의 기본원리와 그 원리가 내포하고 있는 의미를 확실히 이해하고 논리적으로 활용할 수 있는지를 평가하는 문제이다.

[문제 3] 확률과 통계 영역을 논리적으로 활용하는 능력

○ 교과서의 기본 내용을 바탕으로 수학적 개념에 대한 적절한 이해력과 논리력 측정
○ 고등학교 자연계 학생들이 학습하는 확률과 통계 영역 중 정규분포에 관한 기본 원리와 개념을 이해하고 있는지, 이를 응용하여 실제 적용의 문제로 확대할 수 있는 지를 평가하는 문제이다.

나. 제시문 및 문항설명

[문제 1]

[1-1] 미분적분학에서 많은 중요한 결과들을 얻어내는 중요한 정리 중의 하나인 평균값의 정리의 기하학적 의미를 묻는 문제이다.
[1-2] 주어진 조건을 만족하는 식을 세우고, 또한 세운 식으로부터 값을 구하여 그 값의 극한을 계산하는 문제이다.

[문제 2]

[2-1] 문제 [2-2]와 [2-3]을 해결하는데 바탕이 되는 표를 작성하는 문제이다.
[2-2] 점 x 에서 함수의 값과 그 점에서 변화율을 알면 그 점의 근처에 있는 점에서의 함수값을 근사적으로 계산할 수 있다 사실과 또한 함수의 미분 가능성을 활용하여 그 점에서 변화율을 근사적으로 계산할 수 있다는 사실로부터 주어진 점에서 함수 값을 추정하는 문제이다.

[2-3] 문제 [2-2]에서 한 추정이 옳은 지 확인해보는 문제이다.

[2-4] 문제 [2-2]와 [2-3]의 결과를 비교해 함수의 미분과 증분의 차이에 의한 오차, 그리고 변화율의 근사값도 주어진 점과 그 근처의 점이 가깝지 않으면 오차가 커진다는 사실을 알고 있는지 확인하는 문제이다.

[문제 3]

[3-1] 함수식을 이해하고 이를 표준정규분포의 확률 문제로 전환하는 문제이다.

[3-2] 실제로 한 학생이 받은 점수에 대한 등급만 받게 된 경우 이에 대한 실제 점수의 조건부 확률을 구한다.

[3-3] 실제로 수능 등급의 기준이 어떻게 정해지는 지를 앞의 예제를 통해 확대 적용해 보는 문제이다. 등급의 폭을 적절히 정하면 주어진 등급을 구하는 함수를 찾을 수 있다.

3. 평가기준 및 예시답안

[문제 1]

【1-1】

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$는 곡선 위의 두 끝점 $(a,\ f(a))$와 $(b,\ f(b))$을 연결하는 직선 L 의 기울기이고, $f'(c)$는 $x=c$에 대응하는 곡선위의 점 $(c,\ f(c))$에서 접선의 기울기이므로, 평균값의 정리는 곡선위에 직선 L 에 평행인 접선을 갖는 점 $(c,\ f(c))$가 적어도 한 개는 존재함을 나타낸다.

【1-2】

$$f(1+h)=f(1)+h\,f'(1+\theta h)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+h}=\frac{1}{1}+h\left(-\frac{1}{(1+\theta h)^2}\right)$$ (여기까지 5점)

$$\Rightarrow \frac{h}{(1+\theta h)^2}=\frac{h}{1+h}$$

$$\Rightarrow (1+\theta h)^2=1+h$$

$$\Rightarrow h\,\theta^2+2\theta-1=0$$

$$\Rightarrow \theta=\frac{-1+\sqrt{1+h}}{h} \quad (\Leftarrow 0<\theta<1)$$ (여기까지 10점)

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0}\theta=\lim_{h\to 0}\frac{-1+\sqrt{1+h}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(-1)^2-(1+h)}{h(-1-\sqrt{1+h})}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{1+\sqrt{1+h}}=\frac{1}{2}$$ (여기까지 15점)

[문제 2]

【2-1】

$$\text{연료소모량}(l)=\frac{\text{연료비(원)}}{\text{연료 }1l\text{의 가격(원)}}$$ (여기까지 2점)

$$\text{주행연비}(km/l)=\frac{\text{주행거리}(km)}{\text{연료 소모량}(l)}$$ (여기까지 5점)

이므로

	1	2	3
주행속도(km/시)	70	78	90
연료 소모량(l)	60	50	60
주행연비(km/l	16	18	16

【2-2】

h 가 충분히 작으면

② $\Rightarrow f(a+h) \fallingdotseq f(a)+hf'(a)$ 따라서

$f(80)=f(78+2) \fallingdotseq f(78)+2f'(78)$ (여기까지 5점)

그런데 우리는 함수 $f(x)$는 모르지만 $f(x)$가 미분가능하기 때문에

$f'(78)=\lim_{x\to 78}\frac{f(x)-f(78)}{x-78} \fallingdotseq \frac{f(70)-f(78)}{70-78}=\frac{16-18}{-8}=\frac{1}{4}$ 의 근사값을 계산할 수 있다. (여기까지~10점)

따라서 주행속도가 80일 때 주행연비의 근사값은

$f(80) \fallingdotseq f(78)+2f'(78) \fallingdotseq 18+2\times\frac{1}{4}=18.5(km/$시$)$로 추정할 수 있다.

(여기까지 15점)

[참고]

$f'(78)=\lim_{x\to 78}\frac{f(x)-f(78)}{x-78} \fallingdotseq \frac{f(90)-f(78)}{90-78}=\frac{16-18}{12}=-\frac{1}{6}$

(여기까지 6점)

※ 두 점 사이의 간격을 가깝게 택하지 않으면 오차가 커져 불합리한 결과를 초래할 수 도 있다. 주어진 점에서 가까운 다른 한 점을 이용하여 함수의 값을 계산할 수 도 있음에도 불구하고 더 멀리 떨어진 다른 한 점을 택하여 함수의 값이나 변화율을 계산하면 오차의 범위가 커진다.

$f(80) \fallingdotseq f(78)+2f'(78) \fallingdotseq 18+2\times(-\frac{1}{6}) \fallingdotseq 17.67$ (여기까지 11점)

【2-3】

주행속도 x 와 주행연비 $f(x)$는 이차함수 $f(x)=ax^2+bx+c$인 관계가 성립하는데 이 그래프는 세 점 (70, 16), (78, 18), (90, 16)를 지난다. 따라서

$70^2a + 70b + c = 16$
$78^2a + 78b + c = 18$
$90^2a + 90b + c = 16$

이므로

$a=-\frac{1}{48},\ b=\frac{10}{3},\ c=-\frac{461}{4}$ 이다.

따라서 주행연비 함수는

$f(x) = -\frac{1}{48}x^2 + \frac{10}{3}x - \frac{461}{4}$ ------- (1) 이다. (여기까지 5점)

또는 이차함수는 대칭성을 가지므로 이 대칭성에 의해 두 점 (70, 16), (90, 16)은 $x = 80$에 대하여 대칭이다. 따라서 $f(x) = a(x-80)^2 + p$라 할 수 있고 이 식에 두 점 (78, 18), (90, 16)를 대입하면, $a = -\frac{1}{48}$, $p = \frac{217}{12}$이므로

$f(x) = -\frac{1}{48}(x-80)^2 + \frac{217}{12}$ ------- (2) 이다. (여기까지 5점)

참고로 (1)과 (2)는 같은 함수이다.

따라서 주행속도가 80일 때 주행연비는 (2)로부터

$f(80) = \frac{217}{12} \fallingdotseq 18.083(km/\text{시})$ (여기까지 10점)

이다.

【2-4】

(i) 위의 【2-2】에서 사용된 식 $f(a+h) \fallingdotseq f(a) + hf'(a)$에서 $\triangle y = f(a+h) - f(a)$는 곡선의 y 좌표 증분이다. 그런데 $\triangle y$ 의 근사값으로 곡선위의 점 $(a,\ f(a))$에서 h 에 대응하는 접선의 y 좌표 증분 $dy = hf'(a)$ 를 택했으므로 오차가 존재한다. (그림으로 설명 가능함) (5점)

(ii) 함수 $f(x)$가 미분가능 하다는 전제로부터 변화율을 계산하기 위해 다음 식을 사용했는데

$$f'(78) = \lim_{x \to 78} \frac{f(x) - f(78)}{x - 78} \fallingdotseq \frac{f(70) - f(78)}{70 - 78}$$

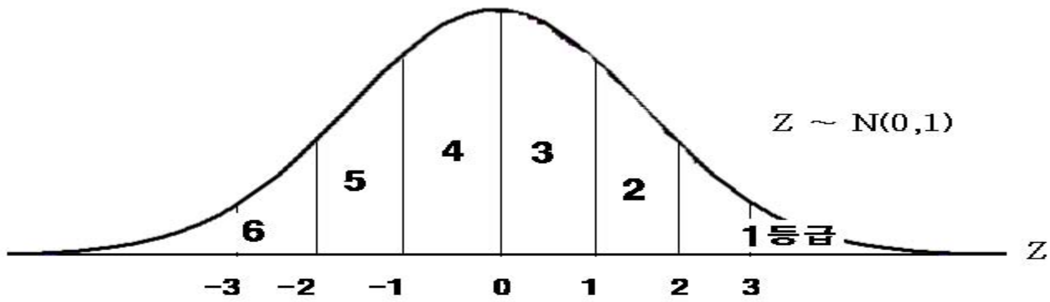
$x = 70$과 $x = 78$사이에는 간격이 크므로 $f'(78)$의 값에 오차가 존재한다. (그림으로 설명 가능함) (5점)

[문제 3]

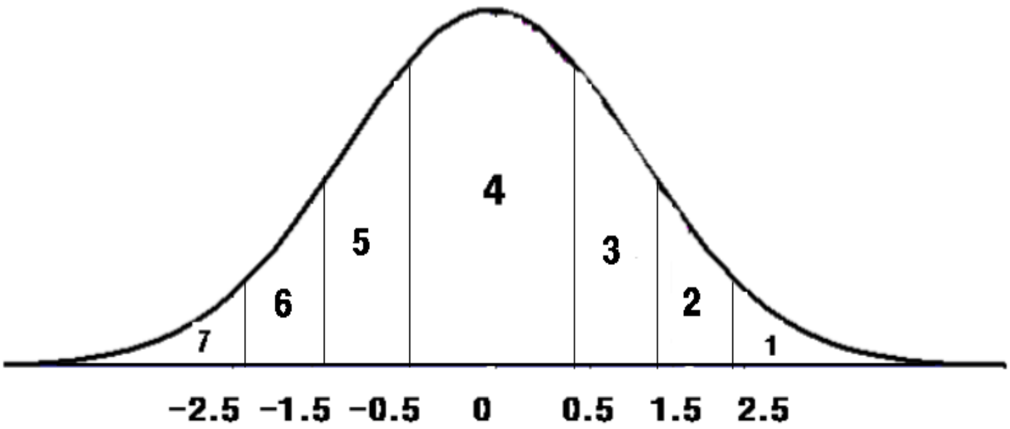
[3-1]

여러 가지로 접근 할 수 있다. 쉬운 방법은 함수를 성적 범위로 다시 표현한 후 (그림참조) 표준화된 범위로 변형하면 쉽게 계산 할 수 있다.

방법 A;



방법 B;



즉,

$G_6^{10}(x) = 1,$	$x \ge 70$	혹은 $G_6^{10}(z) = 1,$	$z \ge 2$
$= 2,$	$60 \le x < 70$	$= 2,$	$1 \le z < 2$
$= 3,$	$50 \le x < 60$	$= 3,$	$0 \le z < 1$
$= 4,$	$40 \le x < 50$	$= 4,$	$-1 \le z < 0$
$= 5,$	$30 \le x < 40$	$= 5,$	$-2 \le z < -1$
$= 6,$	$x < 30$	$= 6,$	$z < -2$

$G_7^{10}(x) = 1,$	$x \ge 75$	혹은 $G_7^{10}(z) = 1,$	$z \ge 2.5$
$= 2,$	$65 \le x < 75$	$= 2,$	$1.5 \le z < 2.5$
$= 3,$	$55 \le x < 65$	$= 3,$	$0.5 \le z < 1.5$
$= 4,$	$45 \le x < 55$	$= 4,$	$-0.5 \le z < 0.5$
$= 5,$	$35 \le x < 45$	$= 5,$	$-1.5 \le z < -0.5$
$= 6,$	$25 \le x < 35$	$= 6,$	$-2.5 \le z < -1.5$
$= 7,$	$x < 25$	$= 7,$	$z < -2.5$

따라서, 표에 의한 정답은 다음과 같다.

방법 A

등급	수능 등급컷
1	3%까지
2	16%
3	50%
4	84%
5	97%
6	100%

방법 B

등급	수능 등급컷
1	1%까지
2	7%
3	31%
4	69%
5	93%
6	99%
7	100%

(각 방법에 5점씩 배정)

[3-2]

먼저 한 학생을 뽑으니 A,B 두 방법 모두 2등급이 나오는 확률은 $P(1.5 \le Z \le 2)$ 혹은 $P(65 \le X \le 70)$로 0.04이다. (여기까지 5점)

다음은 조건부 확률로 푼다. 한 학생이 67.5점 이상이고 두 방법 모두 2등급일 확률은 $P(67.5 \le X \le 70)$ 혹은 $P(1.75 \le Z \le 2)$ 로서 확률은 0.01이다.
따라서, 구하는 조건부 확률은

$$P(X \ge 67.5, 1.5 \le Z < 2 | 1.5 \le Z < 2) = \frac{P(1.75 \le Z < 2)}{P(1.5 \le Z < 2)} = 0.01/0.04 = 25\%$$ 가 된다.

[3-3]

위의【3-1】을 다시 표현하면 $Z = \dfrac{X-m}{\sigma}$이므로 $X = m + \sigma Z$가 된다. 따라서,

$$G_6^{10}(x) = 8 - [\frac{x}{10}] = 8 - [\frac{m+\sigma z}{10}] = 8 - [\frac{50+10z}{10}] = 3 - [z]$$

$$G_7^{10}(x) = 9 - ((\frac{x}{10})) = 9 - ((\frac{m+\sigma z}{10})) = 9 - ((\frac{50+10z}{10})) = 4 - ((z))$$가 된다.

따라서, 변형된 함수는 각각 아래와 같다.

방법 A : $c = 6$. $\quad G_6^{10}(z) = 3 - [z], \quad -3 \le z < 3$

$= 1, \quad z \ge 3$

$= 6, \quad z \leftarrow 3.$

방법 B : $c=7,\qquad G_7^{10}(z)=4-((z)),\quad -3.5 \le z < 3.5$

$$
\begin{aligned}
&= 1, && z \ge 3.5 \\
&= 7, && z \leftarrow 3.5.
\end{aligned}
$$

위의 형태를 9등급으로 확장시키면 등급의 수가 홀수일 경우 가운데 등급이 5가 되고 일정 폭 $w=k\sigma(k \le 1)$로 좁혀 생각 할 수 있다.

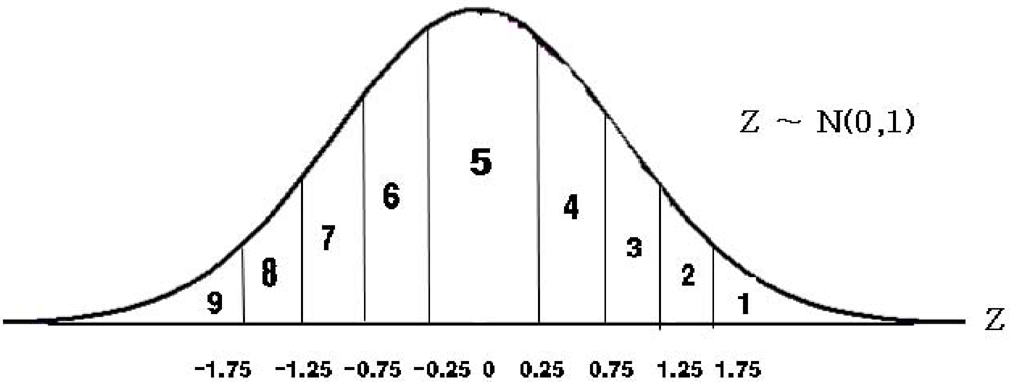
(이러한 시도를 했으면 7 ~ 8점)

주어진 표에서 가능한 시도를 할 수 있는데 $w=\frac{1}{2}\sigma$로 잡으면 (다음 그림 참조)

$$
\begin{aligned}
G_9^w(x) = 5-((\frac{z}{1/2})) = 5-((2z)) = 5-((\frac{2(x-50)}{10})) = 15-((\frac{x}{5})),&\qquad 27.5 \le x < 72.5 \\
= 1,&\qquad x \ge 72.5 \\
= 9.&\qquad x < 27.5
\end{aligned}
$$

가 되고, 주어진 2008년도 등급이 만족됨을 볼 수 있다. 또한, 정규분포의 분포함수를 이용하여 평균을 중심으로 폭의 간격을 5점으로 나누어 등급을 매겨가도 같은 답을 얻을 수 있다.

9등급;



(여기까지 15점)