

II. 자연계열

1. 논술 모의고사 문제

【문제 1】 미분적분학에서 많은 중요한 결과들을 얻어내는 중요한 정리 중의 하나는 평균값의 정리이다. 다음 질문에 답하시오.

【평균값의 정리】 함수 $f(x)$ 가 폐구간 $[a, b]$ 에서 연속이고, 개구간 (a, b) 에서 미분가능하면

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \quad \text{-----} \quad \textcircled{1}$$

인 $c \in (a, b)$ 가 적어도 하나 존재한다.

참고로 식 ①은 다음과 같이 나타낼 수도 있다. 여기서 $b - a = h$ 이고 $0 < \theta < 1$ 이다.

$$f(a+h) = f(a) + h f'(a+\theta h) \quad \text{-----} \quad \textcircled{2}$$

【1-1】 식 ①을 바탕으로 한 평균값의 정리는 기하학적으로 어떠한 의미들을 갖는가? (10점)

【1-2】 함수 $f(x) = \frac{1}{x}$ 가 평균값의 정리의 식 ②로부터 얻어지는

$$f(1+h) = f(1) + h f'(1+\theta h)$$

를 만족할 때 h 가 충분히 작아지면 θ 의 어떤 값으로 수렴할 수 있는가?(15점)

【문제 2】 한 승용차 A의 주행연비(연료 1l에 대한 자동차의 주행거리)를 조사하기 위하여 주행속도를 달리하여 주행한 거리와 소모된 연료비를 조사하였다. 다음 표는 조사결과 중에서 3가지 경우만을 나타낸 것이다. 이를 바탕으로 하여 다음 물음에 답하시오. (여기서 자동차가 출발하여 주행속도에 도달하는데 소모된 연료와 주행거리는 무시했다.)

	1	2	3
주행속도(km/시)	70	78	90
주행거리(km)	960	900	960
연료비(원)	90,000	75,000	90,000

【2-1】 승용차 A의 연료 소모량과 주행연비에 관한 표를 만드시오.(연료 1l의 가격은 1,500원).(5점)

	1	2	3
주행속도(km/시)	70	78	90
연료 소모량(l)			
주행연비(km/l)			

【2-2】 승용차 A의 주행속도 $x(km/시)$ 에 대한 주행연비 $f(x)(km/l)$ 가 미분 가능한 함수라는 조건만으로도 주행 속도가 $80km/시$ 일 때 주행연비를 【문제 1】의 식 ②를 근거로 하여 추정할 수 있는가?(15점)

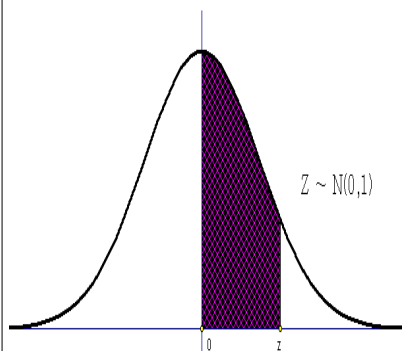
【2-3】 일반적으로 자동차의 주행속도 x 와 주행연비 $f(x)$ 사이에는 2차함수의 관계가 성립한다고 한다. 승용차 A도 이러한 관계를 만족시킨다면 승용차 A의 주행속도가 $80km/시$ 일 때 주행연비를 계산해 봄으로써 【2-2】의 결과와 확인해보시오.(10점)

【2-4】 위의 【2-3】에서 계산된 승용차 A의 주행연비를 참값이라고 한다면 【2-2】와 【2-3】에서 계산된 주행 연비에는 어떠한 오차들이 존재하가? (10점)

【문제 3】 많은 인원들이 동시에 치루는 시험의 등급을 정하는 절차(예로서 대입 수능 시험)를 찾아보려 한다. 이를 위해 다음의 가상의 자료로 시작하자. 전국의 대학생들을 상대로 입학 후 동일한 영어 시험을 치른 결과 영어 점수 X 는 100점 만점에 평균 $m=50$ 점, 표준편차 $\sigma=10$ 점의 정규분포(즉 $X \sim N(50,10^2)$)를 따름을 알게 되었다. 학생들의 점수를 학생들에게 공개하지 않고 등급으로 구분하여 교육을 달리 실시하려 한다. 이를 위해 사전에 원하는 등급의 수(c)가 주어진다. 등급별 점수의 폭(w)은 일정하게 시작하되 주어진 등급의 수에 일치하도록 끝 등급을 중심으로 등급을 합칠 수 있다. 다음의 문제를 풀면서 시험의 등급을 정하는 절차를 생각해 보기로 한다. 확률 계산을 위해 다음의 표준정규분포표 ($Z = \frac{X-m}{\sigma} \sim N(0,1)$)를 이용하라. 계산상의 편이를 위하여 $P(Z \geq 3) = 0$ 으로 간주한다.

표준정규분포표

	$P(0 \leq Z \leq z)$
0.25	0.10
0.50	0.19
0.75	0.27
1.0	0.34
1.25	0.39
1.5	0.43
1.75	0.46
2.0	0.47
2.25	0.48z
2.5	0.49
3.0	0.50



2008학년도 수능 등급

등급	수능 등급컷
1	4%까지
2	11%
3	23%
4	40%
5	60%
6	77%
7	89%
8	96%
9	100%

먼저 아래와 같이 등급을 표시하는 두 함수 $G_c^w(x)$ (w =등급의 폭, c =주어진 등급의 수)를 다음과 같이 정의하자. 단 $[a]$ 는 a 를 넘지 않는 최대 정수, $((a))$ 는 a 에 가장 가까운 정수로 정의하되 정수의 중앙에 위치하면 큰 수로 정의하기로 한다. (예로서 $[2.7] = 2, ((2.5)) = 3$)

$$\begin{aligned} \text{방법 } A : c=6, \quad G_6^{10}(x) &= 8 - \left[\frac{x}{10} \right], \quad 20 \leq x < 80 \\ &= 1, \quad x \geq 80 \\ &= 6, \quad x < 20. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{방법 } B : c=7, \quad G_7^{10}(x) &= 9 - \left(\left(\frac{x}{10} \right) \right), \quad 15 \leq x < 85 \\ &= 1, \quad x \geq 85 \\ &= 7, \quad x < 15. \end{aligned}$$

예로서 한 학생이 $X=43$ 을 받았다면, 방법 A로는 4등급, 방법 B로는 5등급이 된다.

【3-1】 A, B 두 방법에 의해 2008학년도 등급표처럼 각각 등급표를 작성하시오.(10점)

【3-2】 등급만을 공개하기 때문에 시험을 치른 학생에 따라 만족도가 차이가 있다. 예로서 한 학생이 69점을 받았을 경우 A, B 두 방법 모두 2등급을 받게 되는데, 이 학생의 경우 백분율 공개가 더 유리하다고 판단되어 불만을 느낄 수 있다. 그 경계에 해당하는 점수를 67.5점이라 하자. 김연세 군은 A, B 두 방법 모두 2등급을 받았다. 김 군이 등급 공개 방식에 불만족스럽게 생각 할 확률을 구하시오.(10점)

【3-3】 위에는 2008학년도 수능을 9등급으로 세분화한 등급제의 범위가 주어졌다. 주어진 등급을 보고 방법 A 혹은 B를 확대하여 그 함수 $G_9^w(x)$ 를 유추해 구하시오.(15점)