2019학년도 수시모집
자연계열 논술고사

1. 일반정보

유형	☑ 논술고사 ☐ 면접 및 구술고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 문제 1	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학Ⅱ, 확률과 통계
	핵심개념 및 용어	확률, 두 사건의 종속과 독립, 확률변수의 기댓값
예상 소요 시간	40분 / 전체 120분	

2. 문항 및 제시문

문제 1 (20점)

> 1부터 10까지의 자연수를 모두 사용하여 임의의 순서로 나열하는 시행의 결과를 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{10}$이라고 하자.

(1) $a_1 < a_2$인 사건을 A라고 할 때, 확률 $\mathrm{P}(A)$를 구하시오.

(2) $a_1 < a_2$인 사건을 A라고 하고 $a_2 < a_3$인 사건을 B라고 할 때, 사건 A와 사건 B가 독립인지 종속인지 근거를 제시하여 판단하시오.

(3) $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$인 사건을 C라고 할 때, 확률 $\mathrm{P}(C)$를 구하시오.

(4) $a_1 < a_2 < \dots < a_n$을 만족하는 자연수 n의 최댓값을 확률변수 X라고 하자.

예) $\underline{5}, 2, 9, 3, 1, \dots$: $X=1$

$\underline{3, 4, 8}, 5, 1, \dots$: $X=3$

확률변수 X의 기댓값 $\mathrm{E}(X)$가 $1 < \mathrm{E}(X) < 2$을 만족함을 보이시오.

3. 출제 의도

순열과 조합, 확률, 두 사건의 독립과 종속, 이산확률변수의 기댓값의 정의를 아는지 평가한다. 기댓값 $\mathrm{E(X)}$를 구하는 것이 아니라 $1 < \mathrm{E(X)} < 2$를 만족하는지 물어서 학생들이 창의적으로 다양한 방법을 생각할 수 있도록 하였다.

4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

		과목명	교육과정 및 성취기준
제시문1	1	교육과정	[수학Ⅱ] - (다) 수열 - ① 등차수열과 등비수열 ① 수열의 뜻을 안다. (61쪽)
		성취기준·성취수준	[수학Ⅱ] - (3) 수열 - (가) 등차수열과 등비수열 수학2311. 수열의 뜻을 설명할 수 있다. (107쪽)
	2	교육과정	[확률과 통계] - (나) 확률 - ① 확률의 뜻과 활용 ① 통계적 확률과 수학적 확률의 의미를 이해한다. (69쪽)
		성취기준·성취수준	[확률과 통계] - (2) 확률 - (가) 확률의 뜻과 활용 확통1211/1212. 통계적 확률, 수학적 확률의 의미와 확률의 기본 성질을 이해한다. (143쪽)
	3	교육과정	[확률과 통계] - (가) 순열과 조합 - ② 순열과 조합 ① 순열의 뜻을 알고, 순열의 수를 구할 수 있다. (68쪽)
		성취기준·성취수준	[확률과 통계] - (1) 순열과 조합 - (나) 순열과 조합 확통1121. 순열의 뜻을 알고, 순열의 수를 구할 수 있다. (139쪽)

		과목명	교육과정 및 성취기준
문제1-1	1	교육과정	[확률과 통계] - (나) 확률 - ① 확률의 뜻과 활용 ① 통계적 확률과 수학적 확률의 의미를 이해한다. (69쪽)
		성취기준·성취수준	[확률과 통계] - (2) 확률 - (가) 확률의 뜻과 활용 확통1211/1212. 통계적 확률, 수학적 확률의 의미와 확률의 기본 성질을 이해한다. (143쪽)
	2	교육과정	[확률과 통계] - (가) 순열과 조합 - ② 순열과 조합 ① 순열의 뜻을 알고, 순열의 수를 구할 수 있다. (68쪽) ② 조합의 뜻을 알고, 조합의 수를 구할 수 있다. (68쪽)
		성취기준·성취수준	[확률과 통계] - (1) 순열과 조합 - (나) 순열과 조합 확통1121. 순열의 뜻을 알고, 순열의 수를 구할 수 있다. (139쪽) 확통1122. 조합의 뜻을 알고, 순열의 수를 구할 수 있다. (139쪽)

		과목명	교육과정 및 성취기준
문제1-2	1	교육과정	[확률과 통계] - (나) 확률 - ② 조건부확률 ② 사건의 독립과 종속의 의미를 이해하고, 이를 설명할 수 있다. (69쪽)
		성취기준·성취수준	[확률과 통계] - (2) 확률 - (나) 조건부확률 확통1222-1. 사건의 독립과 종속의 의미를 이해하고, 이를 구별할 수 있다. (144쪽)
	2	교육과정	[확률과 통계] - (가) 순열과 조합 - ② 순열과 조합 ① 순열의 뜻을 알고, 순열의 수를 구할 수 있다. (68쪽) ② 조합의 뜻을 알고, 조합의 수를 구할 수 있다. (68쪽)
		성취기준·성취수준	[확률과 통계] - (1) 순열과 조합 - (나) 순열과 조합 확통1121. 순열의 뜻을 알고, 순열의 수를 구할 수 있다. (139쪽) 확통1122. 조합의 뜻을 알고, 순열의 수를 구할 수 있다. (139쪽)

		과목명	교육과정 및 성취기준
문제1-3	1	교육과정	[확률과 통계] - (나) 확률 - ① 확률의 뜻과 활용 ① 통계적 확률과 수학적 확률의 의미를 이해한다. (69쪽)
		성취기준·성취수준	[확률과 통계] - (2) 확률 - (가) 확률의 뜻과 활용 확통1211/1212. 통계적 확률, 수학적 확률의 의미와 확률의 기본 성질을 이해한다. (143쪽)
	2	교육과정	[확률과 통계] - (가) 순열과 조합 - ② 순열과 조합 ① 순열의 뜻을 알고, 순열의 수를 구할 수 있다. (68쪽) ② 조합의 뜻을 알고, 조합의 수를 구할 수 있다. (68쪽)
		성취기준·성취수준	[확률과 통계] - (1) 순열과 조합 - (나) 순열과 조합 확통1121. 순열의 뜻을 알고, 순열의 수를 구할 수 있다. (139쪽) 확통1122. 조합의 뜻을 알고, 순열의 수를 구할 수 있다. (139쪽)

		과목명	교육과정 및 성취기준
문제1-4	1	교육과정	[확률과 통계] - (다) 통계 - ① 확률분포 ② 이산확률변수의 기댓값(평균)과 표준편차를 구할 수 있다. (70쪽)
		성취기준·성취수준	[확률과 통계] - (3) 통계 - (가) 확률분포 확통1312-1. 이산확률변수의 기댓값(평균)을 구할 수 있다. (145쪽)
	2	교육과정	[확률과 통계] - (나) 확률 - ① 확률의 뜻과 활용 ② 확률의 기본 성질을 이해한다. (69쪽)
		성취기준·성취수준	[확률과 통계] - (2) 확률 - (가) 확률의 뜻과 활용 확통1211/1212. 통계적 확률, 수학적 확률의 의미와 확률의 기본 성질을 이해한다. (143쪽)

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	수학 Ⅱ	신항균 외	지학사	2018	123-125
	수학 Ⅱ	우정호 외	동아출판	2016	130-133
	수학 Ⅱ	김창동 외	교학사	2016	111-112
	확률과 통계	신항균 외	지학사	2018	18-27, 61-99, 102-112
	확률과 통계	류희찬 외	천재교육	2016	24-27, 76-117, 122-130

5. 문항 해설

(1)~(3) k개의 수 $a_1, a_2, \cdots, a_k$를 늘어놓을 때 $a_1 < a_2 < \cdots < a_k$인 사건의 확률이 $\frac{1}{k!}$ 인 사실을 관찰하고, $\mathrm{P}(A\cap B) \neq \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$인지 조사하여 사건 A, B가 종속인지 독립인지 판별하는 문제이다.

(4) (1)-(3)의 결과를 활용하여 기댓값의 범위를 유추할 수 있는지 묻는 문제이다.
위의 (1)-(3)로부터 $\mathrm{P}(X\geq 2), \mathrm{P}(X\geq 3), \mathrm{P}(X\geq 4)$을 알 수 있고

$$\mathrm{P}(X=1) = \mathrm{P}(X\geq 1) - \mathrm{P}(X\geq 2)$$
$$\mathrm{P}(X=2) = \mathrm{P}(X\geq 2) - \mathrm{P}(X\geq 3)$$
$$\mathrm{P}(X=3) = \mathrm{P}(X\geq 3) - \mathrm{P}(X\geq 4)$$

을 알 수 있다.

그러므로

$$\mathrm{E}(X) \geq 1 \cdot \mathrm{P}(X=1) + 2 \cdot \mathrm{P}(X=2)$$

이고

$$\mathrm{E}(X) \leq 1 \cdot \mathrm{P}(X=1) + 2 \cdot \mathrm{P}(X=2) + 3 \cdot \mathrm{P}(X=3) + 10 \cdot \mathrm{P}(X\geq 4)$$

로부터 확률변수 X의 기댓값 $\mathrm{E}(X)$가 $1 < \mathrm{E}(X) < 2$을 만족하는 것을 알 수 있다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	답 $\mathrm{P}(A) = \frac{1}{2}$ 제시 (1점) 과정을 설명함 (3점)	4
(2)	확률 $\mathrm{P}(A\cap B) = \frac{1}{6}$, $P(B) = \frac{1}{2}$ 구하기 (2점) $\mathrm{P}(A\cap B)$와 $\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$를 비교하여 독립/종속을 판별 (2점)	4
(3)	답 $\mathrm{P}(C) = \frac{1}{24}$ 제시 (1점) 과정을 설명함 (3점)	4
(4)	$X = 1, 2, 3, 4$일 때의 확률을 구함 (2점) 기댓값의 개념을 알고 수식으로 표현 (2점) $1 < E(X) < 2$ 임을 보임 (4점)	8

7. 예시 답안

(1) a_1, a_2를 제외한 나머지 8개의 항을 고정하고 a_1, a_2를 순서를 바꾸어 얻는 2개의 수열 중 하나의 수열이 조건을 만족하므로 $\mathrm{P}(A) = \frac{1}{2}$ 이다.

*별해) 10개의 자연수를 임의의 순서로 나열하는 경우의 수는 10!이다. 이 중 $a_1 < a_2$이 되는 경우의 수는 ${}_{10}\mathrm{C}_2 \times 8!$이므로, $a_1 < a_2$이 되는 사건 A의 확률 $\mathrm{P}(A)$는 $\frac{{}_{10}\mathrm{C}_2 \times 8!}{10!} = \frac{1}{2}$ 이다.

(2) (1)과 같은 논리로 $a_2 < a_3$이 되는 사건 B의 확률 $\mathrm{P}(B)$도 $\frac{1}{2}$ 이다.

사건 $A\cap B$ 는 $a_1 < a_2 < a_3$를 만족하는 사건인데, a_1, a_2, a_3를 제외한 나머지 7개의 항을 고정하고 a_1, a_2, a_3를 순서를 바꾸어 얻는 6개의 수열 중 하나의 수열이 $a_1 < a_2 < a_3$를 만족하므로 확률 $\mathrm{P}(A\cap B)$는 $\frac{1}{6}$ 이다.

따라서, $\mathrm{P}(A\cap B) \neq \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B) = \frac{1}{4}$ 이므로 이 두 사건은 종속이다.

*별해)

(1)과 같은 논리로 $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}$ 이다.

(1)과 같은 논리로 사건 $A\cap B$ 는 $a_1<a_2<a_3$를 만족하는 사건인데, $a_1<a_2<a_3$를 만족하는 경우의 수는 ${}_{10}\mathrm{C}_3\times 7!$이므로 $a_1<a_2<a_3$이 되는 사건의 확률 $\mathrm{P}(A\cap B)$는 $\frac{{}_{10}\mathrm{C}_3\times 7!}{10!}=\frac{1}{6}$ 이다.

따라서, $\mathrm{P}(A\cap B)\neq \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{4}$ 이므로 이 두 사건은 종속이다.

(3) (1)과 같은 논리로 a_1,a_2,a_3,a_4를 제외한 나머지 6개의 항을 고정하고 a_1,a_2,a_3,a_4를 순서를 바꾸어 얻는 $4!=24$개의 수열 중 하나의 수열이 조건을 만족하므로 구하는 확률 $\mathrm{P}(C)$는

$\frac{1}{24}$ 이다.

*별해)

(1)과 같은 논리로, $a_1<a_2<a_3<a_4$이 되는 사건의 확률 $\mathrm{P}(C)$는

$\frac{{}_{10}\mathrm{C}_4\times(10-4)!}{10!}=\frac{1}{4!}=\frac{1}{24}$ 이다.

(4) 위의 (1)-(3)로부터

$$\mathrm{P}(X\geq 1)=1$$
$$\mathrm{P}(X\geq 2)=\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$$
$$\mathrm{P}(X\geq 3)=\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{6}$$
$$\mathrm{P}(X\geq 4)=\mathrm{P}(C)=\frac{1}{24}$$

임을 알 수 있다.

따라서

$$\mathrm{P}(X=1)=\mathrm{P}(X\geq 1)-\mathrm{P}(X\geq 2)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$
$$\mathrm{P}(X=2)=\mathrm{P}(X\geq 2)-\mathrm{P}(X\geq 3)=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$$
$$\mathrm{P}(X=3)=\mathrm{P}(X\geq 3)-\mathrm{P}(X\geq 4)=\frac{1}{6}-\frac{1}{24}=\frac{1}{8}$$

이다.

그러므로

$$\mathrm{E}(X)\geq 1\cdot \mathrm{P}(X=1)+2\cdot \mathrm{P}(X=2)=1\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{3}>1$$

이고

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X)&\leq 1\cdot \mathrm{P}(X=1)+2\cdot \mathrm{P}(X=2)+3\cdot \mathrm{P}(X=3)+10\cdot \mathrm{P}(X\geq 4)\\&=1\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{3}+3\cdot\frac{1}{8}+10\cdot\frac{1}{24}\\&=\frac{47}{24}<2\end{aligned}$$

이다.

그러므로 확률변수 X의 기댓값 $\mathrm{E}(X)$가 $1<\mathrm{E}(X)<2$을 만족한다.

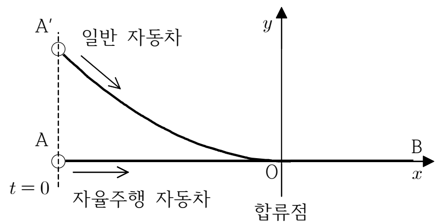
1. 일반정보

유형	☑ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 문제 2	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	기하와 벡터, 미적분Ⅰ, 미적분Ⅱ
	핵심개념 및 용어	평면운동, 직선운동, 속도, 벡터의 성분, 가속도
예상 소요 시간	40분 / 전체 120분	

2. 문항 및 제시문

문제 2 (20점)

그림과 같이 자율주행 자동차는 합류점 O를 지나는 직선 AB를 따라 움직이고 일반 자동차는 포물선을 따라 점 A′에서 점 O로 움직인 후 직선 OB를 따라 움직인다. $t=0$초일 때 자율주행 자동차의 좌표는 $(-200, 0)$이고 일반 자동차의 좌표는 $(-200, 100)$이다. 차로의 폭 및 자동차의 길이와 폭은 무시하며 점 O에서 $(1, 0)$까지의 거리는 1m이다.



(1) 일반 자동차 속도의 x성분이 $v_x(t)=t$라고 하자. 자율주행 자동차는 11m/s의 일정한 속력으로 움직인다면, 일반 자동차가 합류점에 진입하는 순간 두 자동차 사이의 거리를 구하시오.

(2) 일반 자동차의 움직임이 문항 (1)과 같다고 할 때 일반 자동차가 합류점을 지난 시점으로부터 두 자동차가 같은 위치에 있게 되기까지 걸리는 시간을 구하시오.

(3) 일반 자동차의 움직임이 문항 (1)과 같다고 할 때 자율주행 자동차는 두 자동차의 위치가 같아지는 것을 회피하기 위해, 일반 자동차가 합류점을 먼저 통과할 수 있도록 $t=2$초인 시점부터 일정한 가속도로 감속하려고 한다. 일반 자동차가 합류점에 진입하는 순간 두 자동차 사이의 거리가 10m 이상이 되도록 하는 자율주행 자동차의 가속도의 크기를 a라고 하자. a의 최솟값을 구하시오.

(4) 일반 자동차 속도의 x성분이 $v_x(t)=3\sqrt{t}$라고 하자. 이 경우 문항 (3)과 같이 일반 자동차가 합류점을 먼저 통과할 수 있도록 자율주행 자동차가 $t=2$초인 시점부터 일정한 가속도로 감속하려고 한다. 일반 자동차가 합류점에 진입하는 순간 두 자동차 간의 거리가 10m 이상이 되도록 하는 자율주행 자동차의 가속도의 크기를 b라고 할 때, b의 최솟값이 문항 (3)의 a의 최솟값보다 큰지 작은지 비교하시오.

3. 출제 의도

좌표평면 상의 평면운동을 직선운동으로 단순화시킬 수 있는지, 미적분Ⅰ 과목의 정적분을 활용하여 속도와 거리, 속도와 가속도에 대한 문제를 해결할 수 있는지 평가한다. 문항 (4)는 가속도 크기의 최솟값을 구하도록 요구하지 않고 문항 (3)의 가속도 크기의 최솟값과 비교하도록 하여 학생들이 창의적으로 다양한 방법을 시도할 수 있도록 하였다.

4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

		과목명	교육과정 및 성취기준
제시문2	1	교육과정	[미적분Ⅰ] - (라) 다항함수의 적분법 - ③ 정적분의 활용 ② 정적분을 활용하여 속도와 거리에 대한 문제를 해결할 수 있다. (80쪽)
		성취기준·성취수준	[미적분Ⅰ] - (4) 다항함수의 적분법 - (다) 정적분의 활용 미적1432. 정적분을 활용하여 속도와 거리에 대한 문제를 해결할 수 있다. (189쪽)
	2	교육과정	[기하와 벡터] - (나) 평면벡터 - ③ 평면운동 ① 미분법을 이용하여 속도와 가속도에 대한 문제를 해결할 수 있다. (96쪽) ② 정적분을 이용하여 속도와 거리에 대한 문제를 해결할 수 있다. (96쪽)
		성취기준·성취수준	[기하와 벡터] - (2) 평면벡터 - (다) 평면운동 기벡1231. 미분법을 이용하여 속도와 가속도에 대한 문제를 해결할 수 있다. (278쪽) 기벡1232. 정적분을 이용하여 속도와 거리에 대한 문제를 해결할 수 있다. (278쪽)

문제2-1

	과목명	교육과정 및 성취기준
1	교육과정	[미적분Ⅰ] - (라) 다항함수의 적분법 - [3] 정적분의 활용 ② 정적분을 활용하여 속도와 거리에 대한 문제를 해결할 수 있다. (80쪽)
	성취기준·성취수준	[미적분Ⅰ] - (4) 다항함수의 적분법 - (다) 정적분의 활용 미적1432. 정적분을 활용하여 속도와 거리에 대한 문제를 해결할 수 있다. (189쪽)
2	교육과정	[기하와 벡터] - (나) 평면벡터 - [3] 평면운동 ② 정적분을 이용하여 속도와 거리에 대한 문제를 해결할 수 있다. (96쪽)
	성취기준·성취수준	[기하와 벡터] - (2) 평면벡터 - (다) 평면운동 기벡1232. 정적분을 이용하여 속도와 거리에 대한 문제를 해결할 수 있다. (278쪽)

문제2-2

	과목명	교육과정 및 성취기준
1	교육과정	[미적분Ⅰ] - (라) 다항함수의 적분법 - [3] 정적분의 활용 ② 정적분을 활용하여 속도와 거리에 대한 문제를 해결할 수 있다. (80쪽)
	성취기준·성취수준	[미적분Ⅰ] - (4) 다항함수의 적분법 - (다) 정적분의 활용 미적1432. 정적분을 활용하여 속도와 거리에 대한 문제를 해결할 수 있다. (189쪽)
2	교육과정	[기하와 벡터] - (나) 평면벡터 - [3] 평면운동 ② 정적분을 이용하여 속도와 거리에 대한 문제를 해결할 수 있다. (96쪽)
	성취기준·성취수준	[기하와 벡터] - (2) 평면벡터 - (다) 평면운동 기벡1232. 정적분을 이용하여 속도와 거리에 대한 문제를 해결할 수 있다. (278쪽)

문제2-3

	과목명	교육과정 및 성취기준
1	교육과정	[미적분Ⅰ] - (라) 다항함수의 적분법 - [3] 정적분의 활용 ② 정적분을 활용하여 속도와 거리에 대한 문제를 해결할 수 있다. (80쪽)
	성취기준·성취수준	[미적분Ⅰ] - (4) 다항함수의 적분법 - (다) 정적분의 활용 미적1432. 정적분을 활용하여 속도와 거리에 대한 문제를 해결할 수 있다. (189쪽)
2	교육과정	[기하와 벡터] - (나) 평면벡터 - [3] 평면운동 ① 미분법을 이용하여 속도와 가속도에 대한 문제를 해결할 수 있다. (96쪽) ② 정적분을 이용하여 속도와 거리에 대한 문제를 해결할 수 있다. (96쪽)
	성취기준·성취수준	[기하와 벡터] - (2) 평면벡터 - (다) 평면운동 기벡1231. 미분법을 이용하여 속도와 가속도에 대한 문제를 해결할 수 있다. (278쪽) 기벡1232. 정적분을 이용하여 속도와 거리에 대한 문제를 해결할 수 있다. (278쪽)

문제2-4

	과목명	교육과정 및 성취기준
1	교육과정	[미적분Ⅰ] - (라) 다항함수의 적분법 - [3] 정적분의 활용 ② 정적분을 활용하여 속도와 거리에 대한 문제를 해결할 수 있다. (80쪽)
	성취기준·성취수준	[미적분Ⅰ] - (4) 다항함수의 적분법 - (다) 정적분의 활용 미적1432. 정적분을 활용하여 속도와 거리에 대한 문제를 해결할 수 있다. (189쪽)
2	교육과정	[미적분Ⅱ] - (라) 적분법 - [1] 여러 가지 적분법 ③ 여러 가지 함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다. (88쪽)
	성취기준·성취수준	[미적분Ⅱ] - (4) 적분법 - (가) 여러 가지 적분법 미적2413-1. 함수 $y=x^n$(n은 실수)의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다. (234쪽)
3	교육과정	[기하와 벡터] - (나) 평면벡터 - [3] 평면운동 ① 미분법을 이용하여 속도와 가속도에 대한 문제를 해결할 수 있다. (96쪽) ② 정적분을 이용하여 속도와 거리에 대한 문제를 해결할 수 있다. (96쪽)
	성취기준·성취수준	[기하와 벡터] - (2) 평면벡터 - (다) 평면운동 기벡1231. 미분법을 이용하여 속도와 가속도에 대한 문제를 해결할 수 있다. (278쪽) 기벡1232. 정적분을 이용하여 속도와 거리에 대한 문제를 해결할 수 있다. (278쪽)

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	기하와 벡터	황선욱 외	좋은책신사고	2015	67-73, 90-99
	기하와 벡터	김창동 외	교학사	2016	71-79, 105-115
	미적분 Ⅰ	우정호 외	동아출판	2015	174-239
	미적분 Ⅰ	신항균 외	지학사	2016	143-187
	미적분 Ⅱ	정상권 외	금성출판	2016	162-167
	미적분 Ⅱ	이준열 외	천재교육	2016	170-175

5. 문항 해설

(1) 일반 자동차의 t초 후 위치를 $(x(t), y(t))$라고 하면 $x(t)$는 속도벡터의 x성분 $v_x(t)$에 의해 결정된다. 초기위치 $(-200, 100)$과 $(0, 0)$의 x성분의 차이는 200이다. 정적분을 이용하여 일반 자동차가 x방향으로 200m를 이동하는데 걸리는 시간 t_1을 구하고 자율주행 자동차가 t_1초 동안 이동한 거리를 구한다.

(2) 일반 자동차는 t_1초 일 때 합류점 O를 지난다. t_2초 일 때 일반자동차와 자율주행 자동차가 같은 위치에 있다면, 두 자동차가 x방향으로 이동한 거리가 같으므로 $\frac{1}{2}t_2^2 = 11t_2$ 이다. $t_2 - t_1$을 구한다.

(3) 자율주행 자동차가 2초 뒤에 일정한 크기 a인 가속도로 감속하면 자율주행 자동차의 속도는 $v(t) = -a(t-2)+11\ (t>2)$이고 자율주행 자동차가 0초부터 20초 까지 이동한 x방향의 총 거리

는 적분을 이용하여 $s=\int_0^2 11dt+\int_2^{20}\{-a(t-2)+11\}dt$과 같이 구할 수 있다. 두 자동차 사이의 거리가 10m 이상이 되도록 하려면 자율주행 자동차의 총 이동거리는 190m 보다 작거나 같아야 한다.

(4) 속도의 x성분이 $v_x(t)=3\sqrt{t}$인 일반 자동차가 합류점을 통과할 때 자율주행 자동차가 x방향으로 이동한 거리가 190m 보다 작거나 같도록 자율주행 자동차가 일정한 가속도로 감속한다. 이때 자율주행 자동차의 가속도의 크기 b와 문항 (3)의 가속도의 크기 a를 비교하는 문제이다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	일반 자동차가 200m를 이동하는데 걸리는 시간을 구함 (2점) 자율주행 자동차가 20초 동안 이동한 거리 구함 (1점) 두 자동차 사이의 거리 구함 (1점) * 적분식 표현을 하지 않아도 감점하지 않음.	4
(2)	두 자동차의 위치가 같음을 수식으로 맞게 표현함 (2점) 두 자동차 위치가 같을 때의 시간을 구함 (1점) 합류점 지난 시점으로부터의 시간을 구함 (1점)	4
(3)	자율주행 자동차의 위치를 수식 또는 적분식으로 맞게 표현함 (3점) 적분계산, 안전거리 10m 적용하여 가속도 크기의 최솟값을 구함 (3점)	6
(4)	$v_x(t)=t$일 때와 $v_x(t)=3\sqrt{t}$일 때 같은 시간동안 간 거리, 또는 같은 거리를 가는 데 걸린 시간을 비교하는 시도 (2점) 위 상황을 수식으로 맞게 표현하고, 계산 및 답 제시 (4점)	6

7. 예시 답안

(1) 일반 자동차의 t초 후 위치를 $(x(t),y(t))$라고 하면 $x(t)$는 속도벡터의 x성분 $v_x(t)$에 의해 결정된다. 초기위치 $(-200,100)$과 $(0,0)$의 x성분의 차이는 200이다.

일반 자동차가 t_1초 동안 움직인 x방향의 이동 거리는

$s_1(t_1)=\int_0^{t_1}v_x(t)dt=\int_0^{t_1}tdt=\frac{1}{2}t_1^2$ 이므로 200m를 이동하는데 걸리는 시간은

$\frac{1}{2}t_1^2=200$ 으로부터 $t_1=20$초 이다.

반면, 일정한 속도로 운동하는 자율주행 자동차가 $t_1=20$초 동안 이동한 x방향 거리는

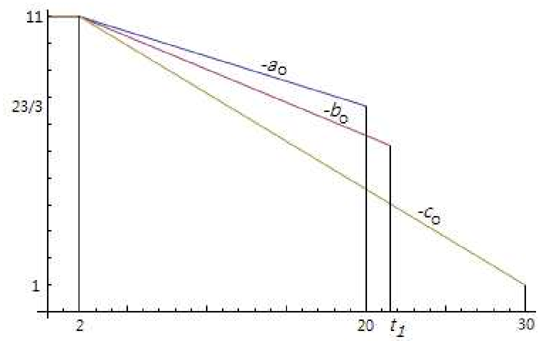
$s_2(t_1)=\int_0^{t_1}v_xdt=\int_0^{t_1}11dt=11t_1=220\text{m}$ 이다.

따라서 두 자동차 사이의 거리는 $s_2(t_1)-s_1(t_1)=220-200=20\text{m}$ 이다.

(2) 일반 자동차는 $t_1=20$초 일 때 합류점 O를 지난다. t_2초에 두 자동차가 같은 위치에 있다면 $s_1(t_2)=s_2(t_2)$이다. $\frac{1}{2}t_2^2=11t_2$ 로부터 $t_2=22$임을 알 수 있다. 일반 자동차가 합류점 O점을 지난 시점으로부터 두 자동차가 만날 때 까지 걸리는 시간은 2초이다.

(3) 자율주행 자동차가 2초 뒤에 일정한 크기 a인 가속도로 감속하면 $t\ge 2$일 때 자율주행 자동차의 속도는 $v(t)=11-a(t-2)$이다. 따라서 자율주행 자동차가 0초부터 20초 까지 이동한 x방향의 총 거리는 $s=\int_0^2 11dt+\int_2^{20}\{11-a(t-2)\}dt = 220-162a$ 이다.
두 자동차 사이의 거리가 10m 이상이 되도록 하려면 자율주행 자동차의 총 이동거리는 190m 보다 작거나 같아야 한다. 즉, $220-162a\le 190$을 만족하여야 하므로 $a\ge\frac{5}{27}$이다. 문제에 제시된 일반자동차가 합류점을 먼저 통과한다는 조건을 확인해보자. 가속도의 크기가 $\frac{5}{27}$일 때, 20초 후 자율주행 자동차의 속도는 $v(20)=11-\frac{5}{27}(20-2)=\frac{23}{3}>0$ 이므로, 자율주행 자동차는 $\frac{23}{3}$ m/s까지 감속한 상태로 합류점 O방향으로 이동하는 중이다. 이 순간 일반자동차가 합류점을 먼저 통과하므로 해당 가속도는 문제에서 제시된 조건을 만족한다. 따라서 a의 최솟값은 $\frac{5}{27}$ 이다.

(4) 일반 자동차의 x방향의 속도가 $v_x(t)=3\sqrt{t}$ 일 때, $\int_0^{t_1}3\sqrt{t}dt=200$ 이라 두면 일반자동차는 $t_1=100^{2/3}=10\cdot 10^{1/3}$ 초에 합류점 O를 지남을 알 수 있다. 이때 $2<10^{1/3}<3$이므로 $20<t_1<30$이 성립한다. 먼저 일반 자동차가 30초 후에 합류점을 지난다고 가정하고 자율주행 자동차가 문제에서 제시된 조건을 만족하도록 하는 가속도의 크기를 c라 하자. 문항(3)과 동일한 방법으로 $330-392c\le 190$으로부터 $c\ge\frac{5}{14}$를 얻는다. 가속도의 크기가 최솟값 $c_0=\frac{5}{14}$일 때 자율주행 자동차의 30초 후의 속도는 $v(30)=1>0$ 이므로, 자율주행 자동차는 합류점 O방향으로 이동하는 중이다. 이 순간 일반자동차가 합류점을 먼저 통과하므로 해당 가속도는 문제에서 제시된 조건을 만족한다.
문항(3)에서 구한 a의 최솟값을 a_0라 하고, 문항(4)에서의 가속도의 크기 b의 최솟값을 b_0라 하면 $\int_2^{t_1}\{11-b_0(t-2)\}dt=190-22=168$이다. 아래의 그림에서 $20<t_1<30$ 이며, 기울기가 각각 $-a_0,-b_0,-c_0$ 인 세 선분 아래 사다리꼴의 넓이가 모두 $190-22=168$ 이므로 $a_0<b_0<c_0$가 성립한다. 또한 아래 그림에서 기울기가 $-b_0$인 직선의 t_1에서의 높이가 가속도의 크기가 b_0일 때 자율자동차의 t_1초 후의 속도이다. $v(t_1)>0$ 이므로 해당 가속도는 문제에서 제시된 조건을 만족한다. 따라서 a의 최솟값보다 b의 최솟값이 더 크다.



*별해

일반 자동차의 x방향의 속도가 $v_x(t)=3\sqrt{t}$일 때, $\int_0^{t_1} 3\sqrt{t}\,dt=200$ 이라 두면 일반자동차는 $t_1=100^{2/3}=10\cdot 10^{1/3}$(초)에 합류점 O를 지남을 알 수 있다.

문항(4)의 조건 하에 자율주행 자동차가 0초부터 t_1초 $(t_1>2)$ 까지 이동한 x방향의 총 거리는 $s=\int_0^2 11dt+\int_2^{t_1}\{11-b(t-2)\}dt = 11t_1-\frac{b}{2}(t_1-2)^2$이다. $s\le 200-10=190$ 으로부터 $b\ge \frac{2(11t_1-190)}{(t_1-2)^2}$ 이다. 가속도의 크기가 최솟값 $b_0=\frac{2(11t_1-190)}{(t_1-2)^2}$ 일 때, t_1초 후 자율주행 자동차의 속도는 $v(t_1)=11-b_0(t_1-2)=\frac{358-11t_1}{t_1-2}$ 이며 $20<t_1<30$으로부터 $v(t_1)>0$ 이므로 자율주행 자동차는 합류점 O방향으로 이동하는 중이다. 이 순간 일반 자동차가 합류점을 먼저 통과하므로 해당 가속도는 문제에서 제시된 조건을 만족한다. 따라서 가속도의 크기의 최솟값은 $b_0=\frac{2(110\cdot 10^{1/3}-190)}{(10\cdot 10^{1/3}-2)^2}$ 이다.

문항(3)의 a의 최솟값 $\frac{5}{27}$과 비교하기 위해 $f(x)=\frac{2(110x-190)}{(10x-2)^2}$라면 $f(2)=\frac{5}{27}$이다. $f'(x)=\frac{895-275x}{(5x-1)^3}$ 이므로 f는 구간 $2\le x\le 3$에서 증가한다. 이때 $2<10^{1/3}<3$이므로 $f(2)<f(10^{1/3})$이 성립한다. 즉, b의 최솟값이 a의 최솟값보다 더 크다.

1. 일반정보

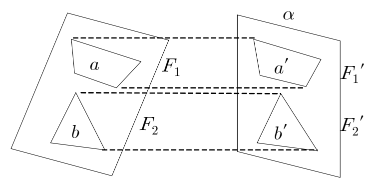
유형	☑ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 문제 3	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	미적분Ⅱ, 기하와 벡터
	핵심개념 및 용어	정사영, 타원, 삼각형의 외심과 내심
예상 소요 시간	40분 / 전체 120분	

2. 문항 및 제시문

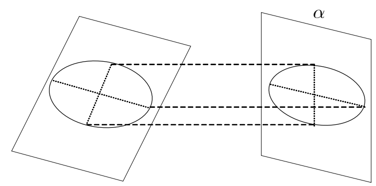
문제 3 (20점)

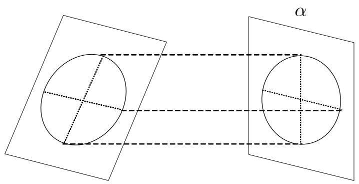
한 평면 위의 도형과 그 평면과 수직이 아닌 평면 α에 대해, 도형과 그 도형의 평면 α 위로의 정사영 사이에 다음과 같은 관계가 성립한다.

(가) 한 평면 위의 두 도형 F_1, F_2의 넓이를 각각 a, b라 하고, F_1, F_2의 평면 α 위로의 정사영 F_1', F_2'의 넓이를 각각 a', b'라 할 때 $a:b=a':b'$이 성립한다.

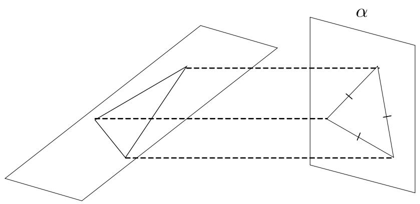


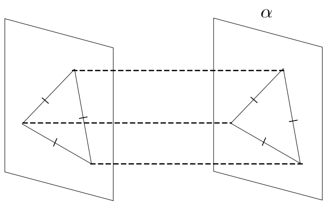
(나) 원의 평면 α 위로의 정사영은 타원 또는 원이다. 타원의 평면 α 위로의 정사영은 타원 또는 원이다. 임의의 타원에 대해, 주어진 타원의 평면 α 위로의 정사영이 원이 되는 평면 α가 존재한다.





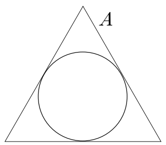
(다) 임의의 삼각형에 대해, 주어진 삼각형의 평면 α 위로의 정사영이 정삼각형이 되는 평면 α가 존재한다. 정삼각형의 평면 α 위로의 정사영이 정삼각형이 되는 경우, 주어진 정삼각형과 평면 α는 평행하다.



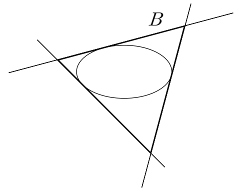


제시된 사실을 이용하여 다음을 설명하시오.

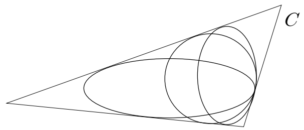
(1) 넓이가 π인 원에 외접하는 정삼각형 A의 넓이 a를 구하시오.



(2) 넓이가 π인 타원에 접하는 세 직선이 정삼각형 B를 이루며 이 정삼각형은 타원을 내부에 포함한다고 하자. 원에 외접하는 삼각형 중 넓이가 가장 작은 삼각형은 정삼각형이라는 사실을 이용하여, B의 넓이 b는 위 문항 (1)에서 구한 a보다 크다는 것을 설명하시오.



(3) 넓이가 c로 주어진 삼각형 C의 내부에 있고 삼각형의 세 변이 접선이 되는 타원 또는 원 중 넓이가 가장 큰 것의 넓이를 m이라 할 때 $\frac{m}{c}$을 구하시오.



3. 출제 의도

제시문을 잘 읽고 이해하여 새로운 상황에 적용할 수 있는지 묻는 문제이다. 주어진 정사영의 성질을 평면도형들의 관계에 적절히 활용할 수 있는지, 자신의 수학적 사고과정을 논리적으로 서술할 수 있는지 묻고자 하였다.

4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

구분		과목명	교육과정 및 성취기준
제시문3	1	교육과정	[기하와 벡터] - (다) 공간도형과 공간벡터 - 1 공간도형 ③ 정사영의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다. (97쪽)
		성취기준· 성취수준	[기하와 벡터] - (3) 공간도형과 공간벡터 - (가) 공간도형 기벡1313. 정사영의 뜻을 알고, 정사영의 길이와 넓이를 구할 수 있다. (279쪽)
	2	교육과정	[기하와 벡터] - (가) 평면곡선 - 1 이차곡선 ② 타원의 뜻을 알고, 타원의 방정식을 구할 수 있다. (95쪽)
		성취기준· 성취수준	[기하와 벡터] - (1) 평면곡선 - (가) 이차곡선 기벡1112. 타원의 뜻을 알고, 타원의 방정식을 구할 수 있다. (273쪽)
문제3-1	1	교육과정	[중학교 수학 1~3학년군] - (마) 기하 - 5 삼각형과 사각형의 성질 ② 삼각형의 외심과 내심의 성질을 이해하고 설명할 수 있다. (33쪽)
	2	교육과정	[미적분 Ⅱ] - (나) 삼각함수 - 1 삼각함수의 뜻과 그래프 ③ 삼각함수를 활용하여 간단한 문제를 해결할 수 있다. (87쪽)
		성취기준· 성취수준	[미적분 Ⅱ] - (2) 삼각함수 - (가) 삼각함수의 뜻과 그래프 미적2213. 삼각함수를 활용하여 간단한 문제를 해결할 수 있다. (228쪽)
문제3-2	1	교육과정	[기하와 벡터] - (다) 공간도형과 공간벡터 - 1 공간도형 ③ 정사영의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다. (97쪽)
		성취기준· 성취수준	[기하와 벡터] - (3) 공간도형과 공간벡터 - (가) 공간도형 기벡1313. 정사영의 뜻을 알고, 정사영의 길이와 넓이를 구할 수 있다. (279쪽)
	2	교육과정	[기하와 벡터] - (가) 평면곡선 - 1 이차곡선 ② 타원의 뜻을 알고, 타원의 방정식을 구할 수 있다. (95쪽)
		성취기준· 성취수준	[기하와 벡터] - (1) 평면곡선 - (가) 이차곡선 기벡1112. 타원의 뜻을 알고, 타원의 방정식을 구할 수 있다. (273쪽)
문제3-3	1	교육과정	[기하와 벡터] - (다) 공간도형과 공간벡터 - 1 공간도형 ③ 정사영의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다. (97쪽)
		성취기준· 성취수준	[기하와 벡터] - (3) 공간도형과 공간벡터 - (가) 공간도형 기벡1313. 정사영의 뜻을 알고, 정사영의 길이와 넓이를 구할 수 있다. (279쪽)
	2	교육과정	[기하와 벡터] - (가) 평면곡선 - 1 이차곡선 ② 타원의 뜻을 알고, 타원의 방정식을 구할 수 있다. (95쪽)
		성취기준· 성취수준	[기하와 벡터] - (1) 평면곡선 - (가) 이차곡선 기벡1112. 타원의 뜻을 알고, 타원의 방정식을 구할 수 있다. (273쪽)

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	기하와 벡터	신항균 외	지학사	2018	19-24, 143-146
	기하와 벡터	김원경 외	비상교육	2016	16-20, 122-125
	기하와 벡터	김창동 외	교학사	2016	17-22, 137-140
	기하와 벡터	우정호 외	동아출판	2016	18-23, 164-168
	기하와 벡터	이준열 외	천재교육	2015	17-22, 155-159
	미적분 Ⅱ	이준열 외	천재교육	2016	54-89
	미적분 Ⅱ	정상권 외	금성출판	2016	53-80

5. 문항 해설

(1) 넓이가 π인 원의 반지름은 1이다. 반지름이 1인 원에 외접하는 정삼각형의 넓이를 구한다.

(2) 원에 외접하는 삼각형 중 넓이가 가장 작은 것은 정삼각형이라는 사실이 주어졌다. 제시된 사실 (나)를 이용하여 타원을 원으로 정사영할 때 정삼각형 B의 정사영을 조사하여 넓이를 비교하는 문제이다.

(3) 타원 또는 원에 접하는 세 직선이 정삼각형 B를 이루며 이 정삼각형은 타원 또는 원을 내부에 포함한다고 하자. 제시문에 제시된 사실과 문항 (2)의 결과를 이용하여 위와 같은 타원 또는 원 가운데 넓이가 가장 큰 것은 원임을 보이고, 문항 (1)의 결과를 이용하여 면적비를 구하는 문제이다.

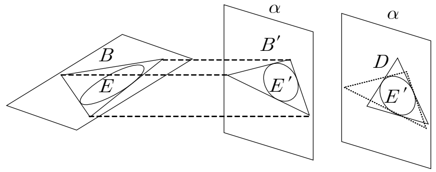
6. 채점 기준

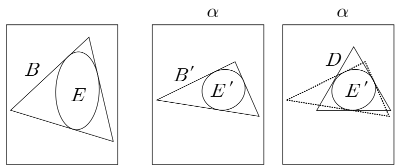
하위 문항	채점 기준	배점
(1)	답($3\sqrt{3}$)을 맞게 제시함 (1점) 풀이과정을 설명함 (2점)	3
(2)	타원의 정사영이 원이 되는 평면 α를 고려하고, 타원의 밖에서 접하는 정삼각형의 평면 α 위로의 정사영을 고려함 (3점) 아래 세 요소를 이용하여 $b > a$임을 설명함 (4점) - 정삼각형의 평면 α 위로의 정사영이 정삼각형이 아니다. - 최소 면적의 원의 외접삼각형은 정삼각형이다. - 넓이의 비율이 정사영의 넓이의 비율과 같다.	7
(3)	문항 (1)에서 구한 값을 이용하여 답($\frac{\pi}{(1)\text{의 답}}$)을 제시함 (2점) 값을 구하는 과정에서 아래의 요소들을 이용함 (8점) - 삼각형의 정사영이 정삼각형이 되는 평면 α가 존재한다. - 정삼각형의 내부에서 접하는 원 또는 타원 중 넓이가 최대인 것은 원이다. - 평면 α 위로의 정사영이 원이 되는 타원이 존재한다. - 넓이의 비율이 정사영의 넓이의 비율과 같다.	10

7. 예시 답안

(1) 원의 넓이가 π일 때, 반지름은 1이며 그에 외접하는 정삼각형의 높이는 3, 변의 길이는 $2\sqrt{3}$이므로 정삼각형의 넓이는 $3\sqrt{3}$을 얻는다.

(2) 주어진 정삼각형과 타원을 각각 B, E라 하자. (나)에 따라 E의 평면 α 위로의 정사영 E'가 원이 되도록 할 수 있으며 평면 α는 도형 B, E가 있는 평면과 평행하거나 수직이 아니다. 이때 정삼각형 B의 α 위로의 정사영 B'는 원 E'에 외접하는 삼각형이며, 평면 α는 B와 평행하지 않으므로 (다)에 의해 B'는 정삼각형이 아니다. 따라서 B'의 넓이는 원 E'에 외접하는 정삼각형 D의 넓이보다 크다.



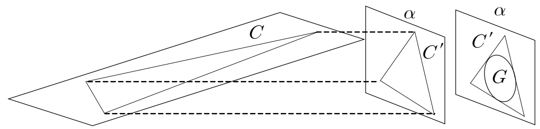


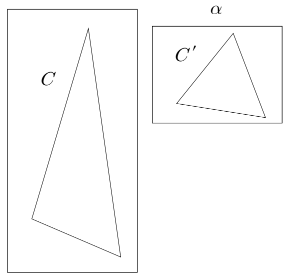
(가)에 의해

$$\frac{b}{\pi} = \frac{(B\text{의 넓이})}{(E\text{의 넓이})} = \frac{(B'\text{의 넓이})}{(E'\text{의 넓이})} > \frac{(D\text{의 넓이})}{(E'\text{의 넓이})} = \frac{a}{\pi}$$

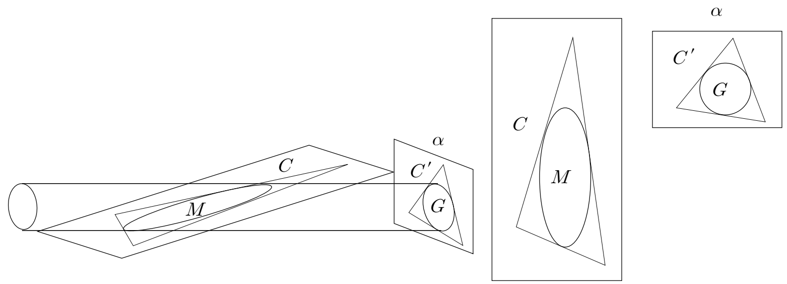
이므로 $b > a$가 성립한다.

(3) (다)에 따라 삼각형 C의 평면 α 위로의 정사영 C'가 정삼각형이 되도록 할 수 있다.

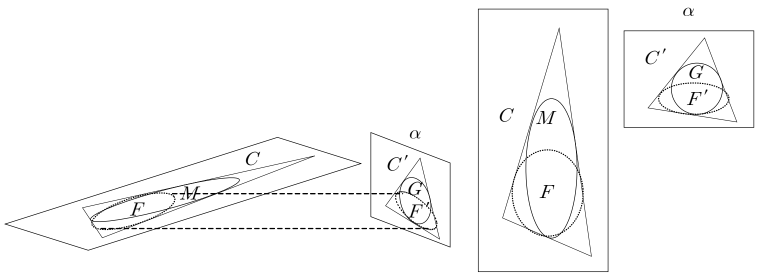




정삼각형 C'의 내접원을 G라 하고, M을 G를 포함하며 평면 α와 수직인 원기둥을 삼각형 C가 있는 평면으로 자른 단면이라 하자. M은 C의 내부에서 C의 변들과 접하는 타원 또는 원이며, M의 평면 α 위로의 정사영은 C'의 내접원 G이다.



C의 내부에서 C의 변들과 접하는 임의의 타원 또는 원 F의 평면 α 위로의 정사영 F'는 정삼각형 C'의 각 변에 접하며 정삼각형의 내부에 있는 타원 또는 원이다. (2)에 의해 정삼각형 C'의 각 변에 접하며 정삼각형의 내부에 있는 타원 또는 원 중 G의 넓이가 가장 크다.



따라서 (가)에 의해 삼각형 C의 내부에서 C의 변들과 접하는 타원 또는 원 중 M의 넓이가 가장 크며, 이때

$$\frac{m}{c}=\frac{(M\text{의 넓이})}{(C\text{의 넓이})}=\frac{(G\text{의 넓이})}{(C'\text{의 넓이})}=\frac{\pi}{a}=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

를 얻는다.