2018학년도 수시모집
자연계열 논술고사

1. 일반정보

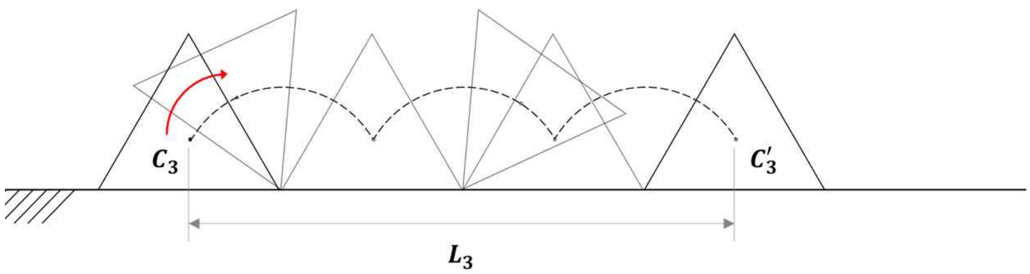
유형	☑ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 문제 1	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	미적분 I, 미적분 II
	핵심개념 및 용어	원주각, 극한, 미분계수, 삼각함수
예상 소요 시간	40분 / 전체 120분	

2. 문항 및 제시문

문제 1 (20점)

홍익이는 자전거를 타고 가던 중 자전거 바퀴의 모양이 왜 원형이어야 하는지 궁금해졌다. 이에 홍익이는 반지름이 1인 원에 내접하는 정n각형 $(n \geq 3)$에 대해서, 1회전 당 가장 멀리 굴러 갈 수 있는 바퀴의 형태를 찾아보기로 하였다. (단, 모든 형태의 바퀴는 지면에서 미끄러지지 않는다.)

정n각형 바퀴의 중심을 C_n, 1회전 후 바퀴의 중심을 C_n', 그리고 두 중심 사이의 거리를 L_n이라 하자. <그림 1>은 정삼각형 바퀴가 1회전하는 과정을 간략하게 보여준다. 바퀴가 1회전 하는 동안 중심은 C_3에서 C_3' 으로 이동한다. 이때, C_3과 C_3' 사이의 거리는 L_3이다.



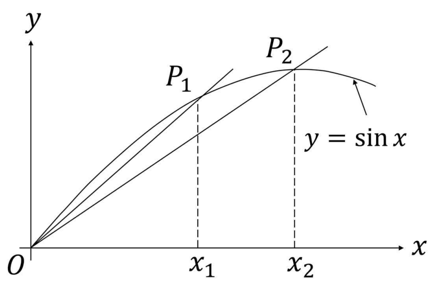
<그림 1>

(1) L_3의 값을 구하여라.

(2) L_n을 구하여라.

(3) $n \geq 3$일 때, $L_{n+1} > L_n$이 성립함을 보이고, $\lim_{n \to \infty} L_n$을 구하여라.

(참고) <그림 2>에서 직선 OP_1의 기울기는 직선 OP_2의 기울기보다 크다.



<그림 2>

(4) <그림 1>에서 점선은 정삼각형 바퀴가 1회전하는 동안 바퀴의 중심이 그리는 자취를 보여준다. 이 자취의 길이를 구하여라. 또한 정n각형 바퀴가 1회전할 때 중심이 그리는 자취의 길이를 구하여라.

3. 출제 의도

공간 또는 평면에서 물체의 움직임을 기하학적 형상으로 단순화하여 해석적으로 파악하려면 상상력과 분석력이 필요하다. 단위원에 내접하는 정n각형 바퀴가 1회전할 때 바퀴 중심이 움직이는 자취와 회전 전후의 변위를 파악할 수 있는지 평가한다. 또한 이로부터 얻어지는 수열의 성질과 극한을 구할 수 있는지 평가한다.

(1), (2) 단위원에 내접하는 정n각형 바퀴가 1회전할 때 중심의 변위는 바퀴가 나아간 거리 즉, 정n각형의 둘레의 길이와 같음을 파악하고 이를 삼각함수를 이용하여 나타낼 수 있는지 평가한다.

(3) 위의 문항에서 얻은 정n각형의 둘레의 길이를 문제의 (참고)에서 주어진 바와 같이 사인함수의 그래프 상의 적당한 두 점을 잇는 직선의 기울기와 연관지어 비교함으로써 이 길이의 수열이 증가함을 설명할 수 있는지 평가한다. 또한 이러한 기울기의 극한이 접선의 기울기라는 미분계수의 기하학적 의미를 이해하고 삼각함수의 미분을 이용하여 극한을 구할 수 있는지 평가한다.

(4) 바퀴가 구른다는 실생활에서의 상황을 평면에서 기하학적 도형의 이동으로 수학적으로 파악할 수 있는지 평가한다. 정n각형 바퀴가 1 회전할 때 바퀴 중심이 움직이는 자취를 파악하고 그

길이를 구할 수 있는지 평가한다.

4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

문항 및 제시문		관련 성취기준
제시문/ (1)	교육과정	[중학교 수학 1~3학년군] - (마) 기하 - $\boxed{9}$ 삼각비 ② 삼각비를 활용하여 다양한 실생활 문제를 해결할 수 있다.
	교육과정	[미적분 II] - (나) 삼각함수 - $\boxed{1}$ 삼각함수의 뜻과 그래프 ③ 삼각함수를 활용하여 간단한 문제를 해결할 수 있다.
	성취기준·성취수준	5. 미적분 II - (2) 삼각함수 - (가) 삼각함수의 뜻과 그래프 미적2213. 삼각함수를 활용하여 간단한 문제를 해결할 수 있다.
(2)	교육과정	[중학교 수학 1~3학년군] - (마) 기하 - $\boxed{9}$ 삼각비 ② 삼각비를 활용하여 다양한 실생활 문제를 해결할 수 있다.
	교육과정	[미적분 II] - (나) 삼각함수 - $\boxed{1}$ 삼각함수의 뜻과 그래프 ③ 삼각함수를 활용하여 간단한 문제를 해결할 수 있다.
	성취기준·성취수준	5. 미적분 II - (2) 삼각함수 - (가) 삼각함수의 뜻과 그래프 미적2213. 삼각함수를 활용하여 간단한 문제를 해결할 수 있다.
(3)	교육과정	[미적분 II] - (나) 삼각함수 - $\boxed{1}$ 삼각함수의 뜻과 그래프 ② 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다.
	성취기준·성취수준	5. 미적분 II - (2) 삼각함수 - (가) 삼각함수의 뜻과 그래프 미적2212-2. 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다.
	교육과정	[미적분 I] - (가) 수열의 극한 - $\boxed{1}$ 수열의 극한 ① 수열의 수렴, 발산의 뜻을 알고, 이를 판별할 수 있다.
	성취기준·성취수준	4. 미적분 I - (1) 수열의 극한 - (가) 수열의 극한 미적1111. 수열의 수렴, 발산의 뜻을 알고, 이를 판별할 수 있다.
	교육과정	[미적분 I] - (다) 다항함수의 미분법 - $\boxed{1}$ 미분계수 ② 미분계수의 기하학적 의미를 안다.
	성취기준·성취수준	4. 미적분 I - (3) 다항함수의 미분법 - (가) 미분계수 미적1311/1312. 미분계수의 뜻과 기하학적 의미를 알고, 그 값을 구할 수 있다.
	교육과정	[미적분 II] - (나) 삼각함수 - $\boxed{2}$ 삼각함수의 미분 ② 삼각함수의 극한을 구할 수 있다. ③ 사인함수와 코사인함수를 미분할 수 있다.
	성취기준·성취수준	5. 미적분 II - (2) 삼각함수 - (나) 삼각함수의 미분 미적2222. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$을 이용하여 삼각함수의 극한을 구할 수 있다. 미적2223. 사인함수와 코사인함수를 미분할 수 있다.
(4)	교육과정	[중학교 수학 1~3학년군] - (마) 기하 - $\boxed{3}$ 평면도형의 성질 ② 부채꼴의 중심각과 호의 관계를 이해하고, 이를 이용하여 부채꼴의 넓이와 호의 길이를 구할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	미적분 I	우정호 외	동아출판	2014	12-13, 112-113,
	미적분 I	황선옥 외	좋은책신사고	2014	12-13, 93-94
	미적분 I	이준열 외	천재교육	2014	12-13, 108-109

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
	미적분 II	우정호 외	동아출판	2014	69, 76, 106-110
	미적분 II	황선옥 외	좋은책신사고	2014	52, 57, 80-84
	미적분 II	이준열 외	천재교육	2014	62, 67, 98-102

5. 문항 해설

(1), (2) 바퀴가 1 회전할 때 중심의 변위 즉, 회전 전후 중심의 위치 사이의 거리는 바퀴가 1 회전하면 나아간 거리와 같고, 이는 바퀴 둘레의 길이 즉, 정n각형의 둘레의 길이와 같다. 정n각형의 각 변은 중심을 꼭지점으로 하는 이등변삼각형의 밑변이므로 삼각함수를 이용하여 나타낼 수 있다.

(3) 위에서 구한 단위원에 내접하는 정n각형의 둘레의 길이 L_n을 서로 비교하여 보자.

$$L_n = 2n \times \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) = 2\pi \times \frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{\pi}{n}}$$

에서 $\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)/\frac{\pi}{n}$ 는 사인함수 $y = \sin(x)$의 그래프 상의 두 점 $(0,0)$, $\left(\frac{\pi}{n}, \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)$을 잇는 직선의 기울기이다. 문제의 (참고)에서 주어진 바와 같이 이 값은 n이 증가함에 따라 증가하며 원점에서 그래프의 접선의 기울기로 수렴한다. 함수의 그래프의 접선의 기울기는 함수의 미분계수와 같으므로 사인함수의 미분을 이용하여 극한값을 구할 수 있다.

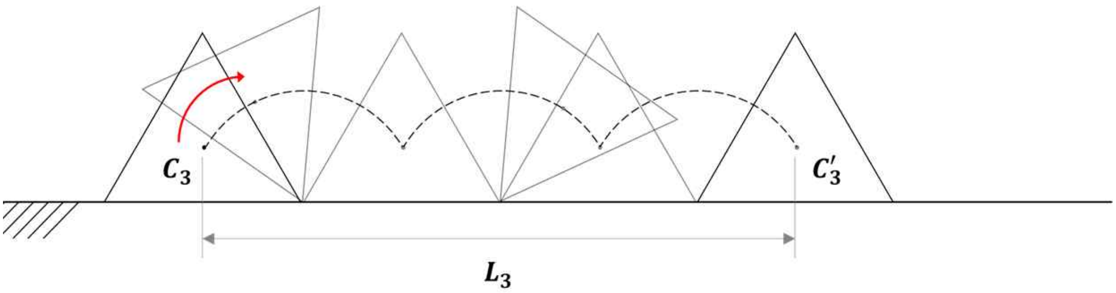
(4) 원형의 바퀴와 달리 각이 진 바퀴가 굴러갈 때 중심은 작은 원호들을 따라 움직인다: 문제의 <그림 1>에서와 같이 각진 부분 즉, 바퀴의 꼭지점이 땅에 닿으면 이 점을 중심으로 다음 꼭지점이 땅에 닿을 때까지 바퀴는 회전이동을 한다. 정n각형 바퀴의 경우 이와 같이 바퀴가 $1/n$바퀴 돌 때 바퀴의 중심은 땅에 닿은 꼭기점을 중심으로 하는 원의 중심각 $2\pi/n$인 호를 따라 움직인다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	L_3의 값을 구하고 이 과정을 설명함 (2점)	2
(2)	L_n의 식을 구하고 이 과정을 설명함 (3점)	3
(3)	L_n을 사인함수의 그래프 상의 두 점을 잇는 직선의 기울기와 연관지은 후 <그림2>에서 주어진 사실을 이용하여 $L_{n+1} > L_n$ 이 성립함을 설명함 (8점) 수열 $\{L_n\}$의 극한값을 구하고 이 과정을 설명함 (3점)	11
(4)	자취의 길이를 구하고 이 과정을 설명함 (4점)	4

7. 예시 답안

(1)



<그림 1>

<그림 1>에 보인 바와 같이, 정삼각형 바퀴가 1회전 하는 동안 바퀴중심은 정삼각형 바퀴의 둘레 길이만큼 이동한다. 이때, 정삼각형 바퀴 한 변의 길이를 d_3이라 하면, d_3는 양변의 길이가 1이고 사잇각이 $\frac{2\pi}{3}$인 이등변삼각형의 밑변의 길이와 같다. 따라서

$$d_3 = 2\times\sin\left(\frac{2\pi}{3}\times\frac{1}{2}\right) = 2\times\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\therefore L_3 = 3\times d_3 = 2\times 3\times\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3\sqrt{3}$$

(2) 위 문제와 유사하게, 정n각형 바퀴가 1회전 하는 동안 바퀴중심은 정n각형 바퀴의 둘레 길이만큼 이동한다. 이때, 정삼각형 바퀴 한 변의 길이를 d_n이라 하면, 위 (1)에서와 같이 d_n는 양변의 길이가 1이고 사잇각이 $\frac{2\pi}{n}$인 이등변삼각형의 밑변의 길이와 같다. 따라서

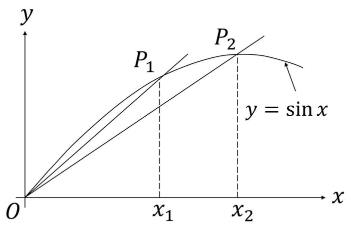
$$d_n = 2\times\sin\left(\frac{2\pi}{n}\times\frac{1}{2}\right) = 2\times\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

$$\therefore\ L_n = n\times d_n = 2n\times\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

(3)

각 자연수 $n \geq 3$에 대해 $a_n = \dfrac{\pi}{n}$이라 하면 위 (2)에서 구한 L_n는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$L_n = 2n \times \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) = 2\pi \times \frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{\pi}{n}} = 2\pi \times \frac{\sin(a_n)}{a_n}$$



〈그림 2〉

〈그림 2〉에서 직선 OP_1의 기울기는 직선 OP_2의 기울기보다 크다. 즉, $0 < x_1 < x_2 < \pi$일 때, 다음 조건을 만족한다.

$$\frac{\sin(x_1)}{x_1} > \frac{\sin(x_2)}{x_2}$$

모든 자연수 $n \geq 3$에 대하여 $0 < a_{n+1} < a_n \leq \dfrac{\pi}{3}$ 이므로 위의 사실로부터 다음이 성립한다.

$$\frac{\sin(a_{n+1})}{a_{n+1}} > \frac{\sin(a_n)}{a_n}$$

$$\Leftrightarrow 2\pi \times \frac{\sin(a_{n+1})}{a_{n+1}} > 2\pi \times \frac{\sin(a_n)}{a_n}$$

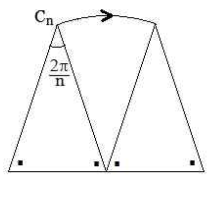
$$\therefore L_{n+1} > L_n$$

수열 $\{\mathrm{L}_n\}$의 극한은 다음과 같다.

$$\lim_{n\to\infty} L_n = 2\pi \times \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{\pi}{n}} = 2\pi \quad \left(\because \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1\right)$$

(4) 정삼각형 바퀴가 $\dfrac{1}{3}$ 회전 하는 동안 중심 **C**$_3$는 반지름 1이며 중심각이 $\dfrac{2\pi}{3}$인 부채꼴의 호를 그린다. 따라서 바퀴중심 **C**$_3$가 그리는 자취의 길이 l_3은 다음과 같다.

$$l_3 = 1 \times \frac{2\pi}{3} \times 3 = 2\pi \ (\because \text{호의 길이 } l = r\theta)$$



위 그림은 정n각형 바퀴가 $\frac{1}{n}$회전할 때, 표면에 닿는 변만을 나타낸 그림이다. 이때, 중심 C_n는 반지름 1이며 중심각이 $\frac{2\pi}{n}$인 부채꼴의 호를 그린다. 따라서 바퀴중심 C_n이 그리는 자취의 길이 l_n은 다음과 같다.

$$l_n = 1 \times \frac{2\pi}{n} \times n = 2\pi$$

1. 일반정보

유형	☑ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 문제 2	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	미적분 I, 미적분 II, 확률과 통계
	핵심개념 및 용어	상대도수, 히스토그램, 확률밀도함수, 극한, 정적분, 도형의 넓이, 속도와 거리, 미적분의 기본 정리
예상 소요 시간	40분 / 전체 120분	

문제 2 (20점)

2. 문항 및 제시문

주어진 자료의 변량 x의 범위를 일정한 간격으로 나누었을 때, 각 구간을 '계급'이라 한다. 각 계급에 속하는 자료의 수를 그 계급의 '도수'라 하고, 도수의 총합에 대한 각 계급의 도수의 비를 그 계급의 '상대도수'라 한다. (각 계급의 상대도수)/(계급의 크기)를 나타낸 히스토그램을 생각하자. 계급의 크기가 충분히 작고 도수의 총합이 충분히 클 때, 대부분의 경우 이 히스토그램은 어떤 연속함수 $f(x)$의 그래프처럼 보인다. 주어진 구간 $a \le x \le b$ 에서 이 그래프 아래쪽의 넓이는 변량이 이 구간에 속하는 자료의 상대도수와 대략 같다.

(1) 좌표평면 위에 중심이 원점이고 반지름이 1인 원 C가 있다. 원 C의 <u>내부에</u> 균등하게 분포되어 있는 N개의 점에 대하여, 이들 점의 x좌표의 상대도수분포를 생각하여 제시문에서와 같은 함수 $f(x)$를 구하여 보자. 아래 식의 비는 $N\to\infty$일 때 수렴하며 이 극한값을 $F(b)$라 하자. (단, $-1 \le b \le 1$ 이다.)

$$\lim_{N\to\infty} \frac{N\text{개의 점 중 } x\text{좌표가 } -1\text{과 } b\text{사이에 있는 점의 개수}}{N} = F(b)$$

임의의 $-1 \le b \le 1$ 에 대해 아래의 식이 성립하는 함수 $f(x)$를 구하여라.

$$F(b) = \int_{-1}^{b} f(x)dx$$

(2) 다음의 각 경우 문항 (1)에서와 같이 함수 F와 f를 고려하여 함수 $f(x)$를 구하여라.

(2-1) 좌표평면 위에 중심이 원점이고 반지름이 1인 원 C가 있다. 원 C 위에 균등하게 분포되어 있는 N개의 점들의 x좌표

(2-2) 좌표공간 위에 중심이 원점이고 반지름이 1인 구면 S가 있다. 구면 S 위에 균등하게 분포되어 있는 N개의 점들의 x좌표

(참고) 지구에서 적도와 북위 α 위도선 사이의 영역의 넓이를 $G(\alpha)$라 하자. $G(\alpha)$는 $\sin\alpha$에 정비례한다. (단, 지구는 구형이라고 가정하자.)

3. 출제 의도

문제의 제시문에서 '변량', '계급', '상대도수' 등 교과과정에서 사용하는 용어를 다시 설명하였다. 각 계급에 상대도수를 나타낸 히스토그램의 전체 면적은 (상대도수)×(계급의 크기)의 합 = (상대도수의 합)×(계급의 크기) = (계급의 크기) 이다. 따라서 이 히스토그램의 면적은 계급의 크기에 따라 변한다. 반면, 각 계급에 (상대도수)/(계급의 크기)를 나타낸 히스토그램의 전체 면적은 항상 1 이다. 이는 확률밀도함수의 그래프와 유사한 성질이다.

확률밀도함수와의 유사성은 임의적인 변량에 대해 도수의 총합이 충분히 크고 이에 비해 계급의 크기는 작을 때 특히 두드러진다. 이 경우 각 계급에 (상대도수)/(계급의 크기)를 나타낸 히스토그램은 연속함수의 그래프처럼 보이고 이 그래프의 임의의 주어진 구간 아래쪽의 면적은 - 미적분에서 구분구적법과 같이 - 변량이 그 구간에 속하는 자료의 상대도수가 된다. 확률밀도함수의 그래프의 경우 어느 구간 아래쪽의 면적은 확률변수의 값이 이 구간에 속할 확률이 된다.

이 문제에서는 이와 같은 유사성을 이해하고 주어진 각 경우에 (상대도수)/(계급의 크기)를 나타낸 히스토그램의 극한에 해당하는 함수를 구할 수 있는지 평가한다.

(1) 원 내부에 균등하게 분포되어있는 N개의 점의 x좌표를 변량으로 생각하면 각 계급의 상대도수는 x좌표가 이 계급구간에 있는 점의 개수의 비이다. 이 비의 극한을 원에서 x좌표가 주어진 구간에 속하는 영역의 면적의 비로 파악하고, 이를 적분과 곡선사이의 영역의 넓이와의 관계를 이용하여 적분으로 나타낼 수 있는지 평가한다.

(2) 다음의 두 경우에 각각 위 문항에서와 같이 전체 N개의 점 중 x좌표가 어떤 구간 내에 있는 점의 개수의 비(의 극한)를 적당한 함수의 적분으로 나타낼 수 있는지 평가한다.

(2-1) 원 위에 균등하게 분포되어 있는 전체 N개의 점 중 x좌표가 주어진 구간에 있는 점의 개수의 비(의 극한)는 원주에서 x좌표가 주어진 구간에 속하는 호의 길이의 비임을 파악하고, 함수의 그래프의 길이의 공식을 이용하여 이 비를 적분으로 나타낼 수 있는지 평가한다.

(2-2) 구면 위에 균등하게 분포되어 있는 전체 N개의 점 중 x좌표가 주어진 구간에 있는 점의 개수의 비(의 극한)는 구면에서 x좌표가 주어진 구간에 속하는 영역의 면적의 비임을 파악하고, 문제의 (참고)에서 주어진 사실과 미적분의 기본 정리를 이용하여 이 비를 적분으로 나타낼 수

있는지 평가한다.

4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

문항 및 제시문		관련 성취기준
제시문/ (1)	교육과정	[중학교 수학 1~3학년군] - (라) 확률과 통계 - 1 도수분포와 그래프 ③ 상대도수를 구하며, 이를 그래프로 나타내고, 상대도수의 분포를 이해한다.
	교육과정	[미적분 I] - (가) 수열의 극한 - 1 수열의 극한 ① 수열의 수렴, 발산의 뜻을 알고, 이를 판별할 수 있다.
	성취기준·성취수준	4. 미적분 I - (1) 수열의 극한 - (가) 수열의 극한 미적1111. 수열의 수렴, 발산의 뜻을 알고, 이를 판별할 수 있다.
	교육과정	[미적분 I] - (라) 다항함수의 적분법 - 2 정적분 ① 구분구적법을 이해하고, 이를 이용하여 간단한 도형의 넓이와 부피를 구할 수 있다.
	성취기준·성취수준	4. 미적분 I - (4) 다항함수의 적분법 - (나) 정적분 미적1421. 구분구적법을 이해하고, 이를 이용하여 간단한 도형의 넓이와 부피를 구할 수 있다.
	교육과정	[확률과 통계] - (다) 통계 - 1 확률분포 ① 확률변수와 확률분포의 뜻을 안다.
	성취기준·성취수준	3. 확률과 통계 - (3) 통계 - (가) 확률분포 확통1311-2. 연속확률변수와 확률밀도함수의 뜻을 안다.
	교육과정	[미적분 II] - (라) 적분법 - 2 정적분의 활용 ① 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.
	성취기준·성취수준	5. 미적분 II - (4) 적분법 - (나) 정적분의 활용 미적2421. 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.
(2-1)	교육과정	[중학교 수학 1~3학년군] - (라) 확률과 통계 - 1 도수분포와 그래프 ③ 상대도수를 구하며, 이를 그래프로 나타내고, 상대도수의 분포를 이해한다.
	교육과정	[미적분 I] - (가) 수열의 극한 - 1 수열의 극한 ① 수열의 수렴, 발산의 뜻을 알고, 이를 판별할 수 있다.
	성취기준·성취수준	4. 미적분 I - (1) 수열의 극한 - (가) 수열의 극한 미적1111. 수열의 수렴, 발산의 뜻을 알고, 이를 판별할 수 있다.
	교육과정	[미적분 I] - (라) 다항함수의 적분법 - 2 정적분 ① 구분구적법을 이해하고, 이를 이용하여 간단한 도형의 넓이와 부피를 구할 수 있다.
	성취기준·성취수준	4. 미적분 I - (4) 다항함수의 적분법 - (나) 정적분 미적1421. 구분구적법을 이해하고, 이를 이용하여 간단한 도형의 넓이와 부피를 구할 수 있다.
	교육과정	[확률과 통계] - (다) 통계 - 1 확률분포 ① 확률변수와 확률분포의 뜻을 안다.
	성취기준·성취수준	3. 확률과 통계 - (3) 통계 - (가) 확률분포 확통1311-2. 연속확률변수와 확률밀도함수의 뜻을 안다.
	교육과정	[기하와 벡터] - (나) 평면벡터 - 3 평면운동 ② 정적분을 이용하여 속도와 거리에 대한 문제를 해결할 수 있다.
	성취기준·성취수준	6. 기하와 벡터 - (2) 평면벡터 - (다) 평면운동 기벡1232. 정적분을 이용하여 속도와 거리에 대한 문제를 해결할 수 있다.
(2-2)	교육과정	[중학교 수학 1~3학년군] - (라) 확률과 통계 - 1 도수분포와 그래프

문항 및 제시문		관련 성취기준
		③ 상대도수를 구하며, 이를 그래프로 나타내고, 상대도수의 분포를 이해한다.
	교육과정	[미적분 I] - (가) 수열의 극한 - 1 수열의 극한 ① 수열의 수렴, 발산의 뜻을 알고, 이를 판별할 수 있다.
	성취기준·성취수준	4. 미적분 I - (1) 수열의 극한 - (가) 수열의 극한 미적1111. 수열의 수렴, 발산의 뜻을 알고, 이를 판별할 수 있다.
	교육과정	[미적분 I] - (라) 다항함수의 적분법 - 2 정적분 ① 구분구적법을 이해하고, 이를 이용하여 간단한 도형의 넓이와 부피를 구할 수 있다.
	성취기준·성취수준	4. 미적분 I - (4) 다항함수의 적분법 - (나) 정적분 미적1421. 구분구적법을 이해하고, 이를 이용하여 간단한 도형의 넓이와 부피를 구할 수 있다.
	교육과정	[확률과 통계] - (다) 통계 - 1 확률분포 ① 확률변수와 확률분포의 뜻을 안다.
	성취기준·성취수준	3. 확률과 통계 - (3) 통계 - (가) 확률분포 확통1311-2. 연속확률변수와 확률밀도함수의 뜻을 안다.
	교육과정	[미적분 I] - (라) 다항함수의 적분법 - 2 정적분 ③ 부정적분과 정적분의 관계를 이해하고, 이를 이용하여 정적분을 구할 수 있다.
	성취기준·성취수준	4. 미적분 I - (4) 다항함수의 적분법 - (나) 정적분 미적1423. 부정적분과 정적분의 관계를 이해하고, 이를 이용하여 정적분을 구할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	미적분 I	우정호 외	동아출판	2014	12-13, 192, 197-204, 222-223
	미적분 I	황선옥 외	좋은책신사고	2014	12-13, 154, 157-161, 175-176
	미적분 I	이준열 외	천재교육	2014	12-13, 182, 185-190, 204-206
	미적분 II	우정호 외	동아출판	2014	220-222
	미적분 II	황선옥 외	좋은책신사고	2014	157-158
	미적분 II	이준열 외	천재교육	2014	194-195
	확률과 통계	우정호 외	동아출판	2014	149-151
	확률과 통계	황선옥 외	좋은책신사고	2014	113-115
	확률과 통계	이준열 외	천재교육	2014	153-155
	기하와 벡터	우정호 외	동아출판	2014	129-133
	기하와 벡터	황선옥 외	좋은책신사고	2014	96-97
	기하와 벡터	이준열 외	천재교육	2014	126-127

5. 문항 해설

(1) 문항에서 주어진 변량 - 원 내부에 균등하게 분포한 N개의 점들의 x좌표 - 에 대해 각 계급에 (상대도수)/(계급의 크기)를 나타낸 히스토그램의 $N \to \infty$ 일 때 극한을 $f(x)$라 하자. 문제의 제시문에서와 같이 구간 $[a, b]$에서 함수 $f(x)$의 그래프 아래쪽의 넓이, 즉, $f(x)$의 적분은 변량이 이 구간에 포함된 자료의 상대도수가 된다. 많은 수의 점이 원 내부에 균등하게 분포되어 있다면, 원 내부의 어느 영역에든 대략 그 영역의 면적에 비례하는 개수의 점이 분포한다. 따라서

$$\int_a^b f(x)\, dx = \frac{\text{원에서 } a \le x \le b \text{ 인 영역의 면적}}{\text{원의 면적}}$$

이다. 단위원은 두 함수 $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$의 그래프 사이의 영역이므로 두 함수의 그래프 사이의 영역의 면적은 두 함수의 차이의 적분으로 주어진다는 사실로부터 위 식의 우변을 적분으로 나타내고 $f(x)$의 식을 구할 수 있다.

(2-1) 많은 수의 점이 원 위에 균등하게 분포되어 있다면, 어느 원호에도 대략 그 호의 길이에 비례하는 개수의 점이 분포한다. 따라서 구하는 함수 $f(x)$는 $[-1, 1]$에 포함되는 임의의 구간 $[a, b]$에 대해

$$\int_a^b f(x)\, dx = \frac{\text{원에서 } a \le x \le b \text{ 인 호의 길이}}{\text{원의 길이}}$$

이 성립하는 함수이다. 우변을 함수 $y = \sqrt{1 - x^2}$의 그래프의 길이를 구하는 식

$$\text{함수 } y = g(x),\, a \le x \le b\text{의 그래프의 길이} = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

을 이용하여 적분으로 나타내고 $f(x)$의 식을 구할 수 있다.

(2-2) 많은 수의 점이 구면 위에 균등하게 분포되어 있다면, 구면 위의 어느 영역에도 대략 그 영역의 면적에 비례하는 개수의 점이 분포한다. 따라서 구하는 함수 $f(x)$는 $[-1, 1]$에 포함되는 임의의 구간 $[a, b]$에 대해

$$\int_a^b f(x)\, dx = \frac{\text{구면에서 } a \le x \le b \text{ 인 영역의 면적}}{\text{구면의 면적}}$$

이 성립하는 함수이다.

구면을 지구의 표면이라 생각하면 위 식에서 우변의 분자는 두 위도선 사이의 영역의 면적이다. 문제의 (참고)에서 지표면의 적도(위도 0도)와 위도 α 사이의 영역의 면적은 위도의 사인함수 값에 비례함을 주었다. 이를 이용하면

$$\frac{\text{구면에서 } 0 \le x \le \sin(\alpha) \text{ 인 영역의 면적}}{\text{구면의 면적}} = \frac{1}{2}\sin(\alpha)$$

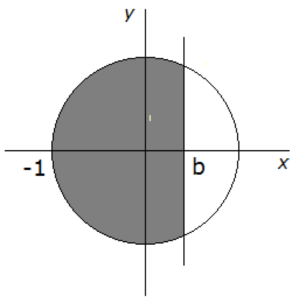
임을 얻을 수 있다. (위 식에서 α = 90도 일 때, 좌변의 분자에서 나타내는 영역은 구면의 반이므로 이 때 좌변의 값은 1/2이고 따라서 우변의 계수는 1/2이 된다.) 이로부터 첫 번째 식의 우변을 구하고 미적분의 기본 정리를 이용하여 $f(x)$의 식을 구할 수 있다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	$F(b)$가 면적의 비임을 설명함 (+3점) $F(b)$를 적분으로 나타내고 $f(x)$를 구하였으며 이 과정을 설명함 (+5점)	8
(2-1)	$f(x)$를 구하고 이 과정을 설명함 (6점)	6
(2-2)	$f(x)$를 구하고 이 과정을 설명함 (6점)	6

7. 예시 답안

(1) 많은 수의 점이 원 내부에 균등하게 분포되어 있다면, 원 내부의 어느 영역에든 대략 그 영역의 면적에 비례하는 개수의 점이 분포한다. 특히 전체 점 중 x좌표가 -1과 b사이에 있는 점, 즉 아래 그림에서 어두운 영역에 있는 점의 비는 대략 원의 면적에 대한 어두운 영역의 면적의 비가 된다.

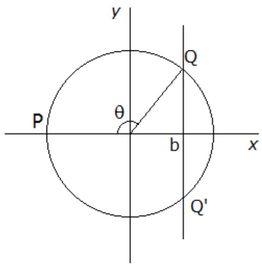


따라서 $F(b)=$(어두운 영역의 면적)$/\pi$ 이다. 위 아래 반원은 각각 함수 $y=\sqrt{1-x^2}$, $y=-\sqrt{1-x^2}$의 그래프이므로

$$F(b)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{b}2\sqrt{1-x^2}\,dx$$

이고 $f(x)=\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}$ 이다.

(2)
(2-1)

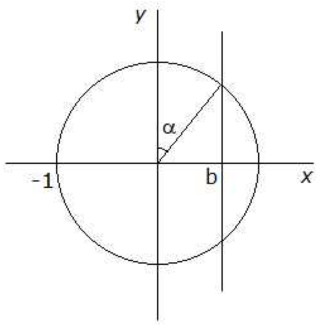


원 C위에 많은 수의 점이 균등하게 분포되어 있다면 주어진 원호 위에는 대략 원호의 길이에 비례하는 개수의 점이 분포한다. 특히 전체 점 중 x좌표가 -1과 b사이에 있는 점, 즉 원호 QPQ'위에 있는 점의 비는 대략 (원호 QPQ'의 길이)/2π 이다. 따라서 $F(b)=$(원호 PQ의 길이)/π 이다. 원호 PQ는 함수 $y=\sqrt{1-x^2}$ $(-1\le x\le b)$의 그래프이므로 곡선의 길이의 공식에 의해

$$F(b)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{b}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{b}\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2}\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{b}\sqrt{\frac{1}{1-x^2}}\,dx$$

따라서 $f(x)=\dfrac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}$ 이다.

(2-2)



구면 S에서 x좌표가 a와 b사이인 영역의 넓이를 $A(a,b)$라 하자. (참고)에 따르면 구면 S에서 x좌표가 0와 b사이인 영역의 넓이 $A(0,b)$는 $\sin\alpha=b$에 비례한다. (단, $0\le b\le 1$) 즉, 적당한 비례상수 k에 대해 $A(0,b)=kb$이 성립한다. 구면 S의 겉넓이는 4π이므로 $A(0,1)=k=2\pi$ 즉, $A(0,b)=2\pi b$ 이다.
$0\le b\le 1$ 일 때,

$$A(-1,b)=A(-1,0)+A(0,b)=2\pi+2\pi b$$

이고, 또한 이 때

$$A(-1,-b)=A(-1,0)-A(0,b)=2\pi-2\pi b$$

임은 명백하므로 모든 $-1\le b\le 1$에 대해

$$A(-1,b)=2\pi+2\pi b$$

이다. 많은 수의 점이 구면 위에 균등하게 분포되어 있다면, 전체 점 중 x좌표가 -1과 b사이에 있는 점의 비는 대략 구면 S의 전체 겉넓이에 대한 이 영역 즉, 구면에서 x좌표가 -1과 b사이인 영역의 넓이의 비가 된다. 따라서 모든 $-1 \leq b \leq 1$에 대해

$$F(b) = \frac{A(-1,b)}{4\pi} = \frac{1+b}{2}$$

이다. 식 $F(b) = \int_{-1}^{b} f(x)\,dx$ 로부터 $f(x)$는 $F(x)$의 도함수이다. 따라서 $f(x) = \frac{1}{2}$ 이다.

※ 위에서 $A(0,b) = kb$의 비례상수 k는 $F(b)$를 구할 때 상쇄되므로 $k = 2\pi$ 값을 구할 필요는 없다.

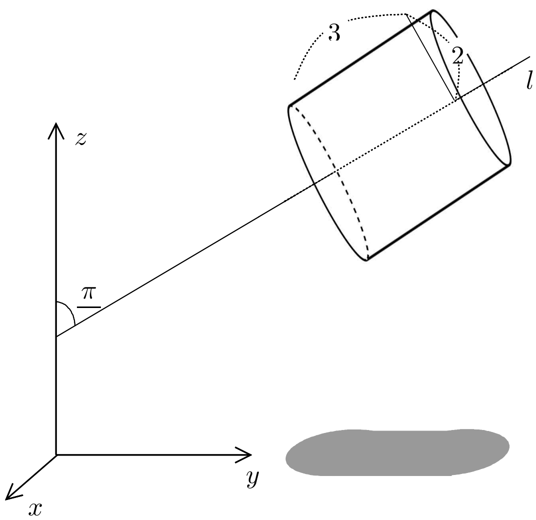
1. 일반정보

유형	☑ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 문제 3	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	미적분 I, 미적분 II, 기하와 벡터
	핵심개념 및 용어	정사영, 이면각, 법선벡터, 삼각함수의 덧셈정리, 벡터의 내적, 최댓값
예상 소요 시간	40분 / 전체 120분	

2. 문항 및 제시문

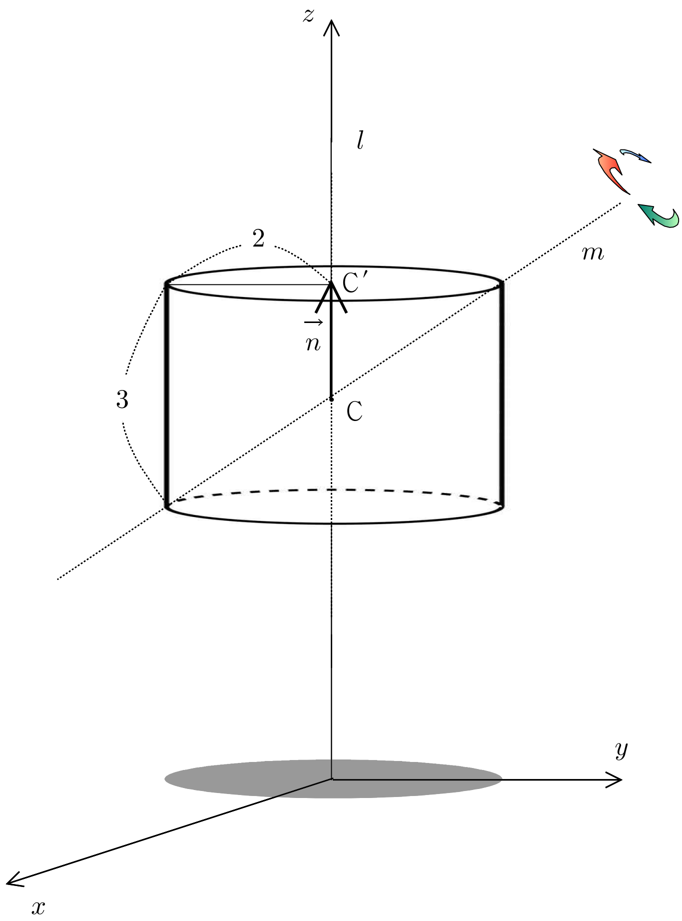
문제 3 (20점)

(1) <그림 1>과 같이 좌표공간에 밑면의 반지름이 2, 높이가 3인 원기둥의 중심축 l이 z축의 양의 방향과 $\frac{\pi}{3}$의 각도를 이루고 있다. 이 원기둥의 xy평면 위로의 정사영의 넓이를 구하여라.



<그림 1>

문항 (2), (3)은 <그림 2>에 대한 질문이다. <그림 2>와 같이 밑면의 반지름이 2, 높이가 3인 원기둥이 밑면은 평면 $z=6$, 윗면은 평면 $z=9$ 위에 있고, 중심축 l이 z축이 되도록 좌표공간에 놓여 있다. 또 이 원기둥의 중심 C를 시점으로 하고 윗면의 중심 C'을 종점으로 하는 벡터 $\vec{n}$이 있다. 이 원기둥과 벡터 $\vec{n}$을 원기둥의 중심과 모서리를 지나는 직선 $m: x=0,\, 4z=3y+30$ 을 회전축으로 한 바퀴 돌릴 때 다음 물음에 답하여라.



<그림 2>

(2) 직선 m을 회전축으로 회전하는 벡터 $\vec{n}$과 z축의 양의 방향이 이루는 각을 θ라 하자. $\cos\theta$의 최솟값을 구하여라.

(3) 직선 m을 회전축으로 회전하는 원기둥의 xy평면 위로의 정사영의 넓이의 최댓값을 구하여라.

3. 출제 의도

햇빛 아래에서 물체가 움직일 때 변화하는 그림자의 모양과 면적을 생각하여 보자. 이 문제에서는 원기둥이 (중심축과 다른) 회전축을 중심으로 회전할 때 그림자의 모양과 면적을 구할 수 있는지 묻는다.

(1) 공간 상의 한 평면 위에 있는 도형을 다른 평면 위로 정사영한 도형 즉, 그림자의 면적은 원래 도형의 면적과 두 평면 사이의 각 - 이는 두 평면의 법선벡터의 사이 각과 같다 - 의 코사인 값의 곱이다. 문제의 <그림 1>에서 주어진 원기둥의 그림자는 적당한 평면도형들(직사각형과 두 반원)의 그림자로 나타낼 수 있음을 파악하고, 각 평면도형이 xy평면과 이루는 각의 코사인 값을 구하여 그림자의 면적을 구할 수 있는지 평가한다.

(2) 문제의 제시문과 <그림 2>에서 주어진 바와 같이 중심축과 다른 회전축을 중심으로 회전하는 원기둥을 고려하자. 이 때 회전하는 원기둥의 중심축과 z축이 이루는 각도의 범위를, 중심축의 자취가 원뿔임을 파악하고 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 구할 수 있는지 평가한다.

(3) 문제의 <그림 2>에서 주어진 회전하는 원기둥의 정사영의 면적은 문항 (1)에서와 같이 원기둥의 중심축과 z축이 이루는 각도의 삼각함수로 주어짐을 파악하고, 문항 (2)에서 구한 범위 내에서 이 함수 즉, 그림자의 면적의 최댓값을 삼각함수의 덧셈정리 또는 벡터의 내적을 이용하여 구할 수 있는지 평가한다.

4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

문항 및 제시문		관련 성취기준
제시문/(1)	교육과정	[기하와 벡터] - (다) 공간도형과 공간벡터 - $\boxed{1}$ 공간도형 ③ 정사영의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다.
	성취기준·성취수준	6. 기하와 벡터 - (3) 공간도형과 공간벡터 - (가) 공간도형 기벡1313. 정사영의 뜻을 알고, 정사영의 길이와 넓이를 구할 수 있다.
	교육과정	[기하와 벡터] - (다) 공간도형과 공간벡터 - $\boxed{3}$ 공간벡터 ⑤ 좌표공간에서 벡터를 이용하여 평면과 구의 방정식을 구할 수 있다.
	성취기준·성취수준	6. 기하와 벡터 - (3) 공간도형과 공간벡터 - (다) 공간벡터 기벡1334. 좌표공간에서 벡터를 이용하여 평면과 구의 방정식을 구하고, 이를 활용하여 문제를 해결하며, 그 과정을 설명할 수 있다.
(2)	교육과정	[중학교 수학 1~3학년군] - (마) 기하 - $\boxed{4}$ 입체도형의 성질 ② 회전체의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다.
	교육과정	[미적분 II] - (나) 삼각함수 - $\boxed{1}$ 삼각함수의 뜻과 그래프 ② 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다.
	성취기준·성취수준	5. 미적분 II - (2) 삼각함수 - (가) 삼각함수의 뜻과 그래프 미적2212-2. 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다.

문항 및 제시문		관련 성취기준
	교육과정	[미적분 Ⅱ] - (나) 삼각함수 - 2 삼각함수의 미분 ① 삼각함수의 덧셈정리를 이해한다.
	성취기준·성취수준	5. 미적분 Ⅱ - (2) 삼각함수 - (나) 삼각함수의 미분 미적2221-2. 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 문제를 해결할 수 있다.
(3)	교육과정	[기하와 벡터] - (다) 공간도형과 공간벡터 - 1 공간도형 ③ 정사영의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다.
	성취기준·성취수준	6. 기하와 벡터 - (3) 공간도형과 공간벡터 - (가) 공간도형 기벡1313. 정사영의 뜻을 알고, 정사영의 길이와 넓이를 구할 수 있다.
	교육과정	[기하와 벡터] - (다) 공간도형과 공간벡터 - 3 공간벡터 ⑤ 좌표공간에서 벡터를 이용하여 평면과 구의 방정식을 구할 수 있다.
	성취기준·성취수준	6. 기하와 벡터 - (3) 공간도형과 공간벡터 - (다) 공간벡터 기벡1334. 좌표공간에서 벡터를 이용하여 평면과 구의 방정식을 구하고, 이를 활용하여 문제를 해결하며, 그 과정을 설명할 수 있다.
	교육과정	[중학교 수학 1~3학년군] - (마) 기하 - 4 입체도형의 성질 ② 회전체의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다.
	교육과정	[기하와 벡터] - (나) 평면벡터 - 2 평면벡터의 성분과 내적 ② 두 평면벡터의 내적의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다. ③ 좌표평면에서 벡터를 이용하여 평면과 원의 방정식을 구할 수 있다.
	성취기준·성취수준	6. 기하와 벡터 - (2) 평면벡터 - (나) 평면벡터의 성분과 내적 기벡1222. 두 평면벡터의 내적의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다. 기벡1223-2. 좌표평면에서 벡터를 이용하여 원의 방정식을 구할 수 있다.
	교육과정	[미적분 Ⅰ] - (다) 다항함수의 미분법 - 3 도함수의 활용 ③ 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.
	성취기준·성취수준	4. 미적분 Ⅰ - (3) 다항함수의 미분법 - (다) 도함수의 활용 미적1333. 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.
	교육과정	[미적분 Ⅱ] - (나) 삼각함수 - 1 삼각함수의 뜻과 그래프 ② 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다.
	성취기준·성취수준	5. 미적분 Ⅱ - (2) 삼각함수 - (가) 삼각함수의 뜻과 그래프 미적2212-2. 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다.
	교육과정	[미적분 Ⅱ] - (나) 삼각함수 - 2 삼각함수의 미분 ① 삼각함수의 덧셈정리를 이해한다. ② 사인함수와 코사인함수를 미분할 수 있다.
	성취기준·성취수준	5. 미적분 Ⅱ - (2) 삼각함수 - (나) 삼각함수의 미분 미적2221-2. 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 문제를 해결할 수 있다. 미적2223. 사인함수와 코사인함수를 미분할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	미적분 Ⅰ	우정호 외	동아출판	2014	152-154
	미적분 Ⅰ	황선욱 외	좋은책신사고	2014	119-121
	미적분 Ⅰ	이준열 외	천재교육	2014	141-143
	미적분 Ⅱ	우정호 외	동아출판	2014	84-85, 100-101, 109-111
	미적분 Ⅱ	황선욱 외	좋은책신사고	2014	59-60, 76-78, 83-84
	미적분 Ⅱ	이준열 외	천재교육	2014	68-69. 94-95, 100-101
	기하와 벡터	우정호 외	동아출판	2014	164-168, 208-209, 223

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
	기하와 벡터	황선옥 외	좋은책신사고	2014	117-121, 153-154, 170
	기하와 벡터	이준열 외	천재교육	2014	155-158, 194-196, 208

5. 문항 해설

(1) 공간에서 한 평면 상의 면적이 S인 도형을 다른 평면 위로 정사영한 도형의 면적은 $S \times |\cos(\theta)|$로 주어진다. 여기에서 θ는 두 평면의 사이 각이며 이는 두 평면의 법선벡터의 사이 각과 같다. (※ 두 평면 사이의 각이 θ라면 $\pi - \theta$도 사이 각이라 할 수 있다. 이 경우 두 각 중 예각을 선택하면 정사영의 면적은 $S \times \cos(\theta)$이나 일반적으로 $S \times |\cos(\theta)|$이 정사영의 면적이다.)

문제의 <그림 1>에서 주어진 원기둥의 xy 평면 위로의 정사영은 원기둥의 위 아래 면(원)의 xy 평면에 평행한 지름에 대한 반원과 이 두 지름을 변으로 가지는 직사각형의 정사영으로 나누어 생각할 수 있다. 이 직사각형과 두 반원이 xy 평면과 이루는 각도는 원기둥의 중심축과 z축이 이루는 각도로부터 구할 수 있다.

(2) 문제의 <그림 2>에서 주어진 회전축을 중심으로 원기둥이 회전할 때 원기둥의 중심축의 자취는 원뿔을 이룬다. 이 원뿔을 회전축과 z축을 포함하는 평면으로 자른 면을 고려하면 원기둥이 회전하는 동안 중심축이 z축과 이루는 각도의 범위를 구할 수 있다. 코사인함수의 덧셈정리 (배각공식: $\cos(2\phi) = 2\cos^2\phi - 1$)를 이용하여 이 범위에서 코사인함수의 최솟값을 구할 수 있다.

(3) 주어진 원기둥의 중심축이 z축과 이루는 각도를 θ라 하면 문항 (1)에서와 같이 원기둥의 xy 평면 위로의 정사영의 면적 $f(\theta)$를 두 삼각함수로 아래와 같이 나타낼 수 있다:

$$f(\theta) = 12\sin\theta + 4\pi|\cos\theta|$$

사인함수의 덧셈정리의 응용

$$a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\theta + \frac{\mathrm{b}}{\sqrt{\mathrm{a}^2+\mathrm{b}^2}}\cos\theta\right) = \sqrt{\mathrm{a}^2+\mathrm{b}^2}\sin(\theta+\phi_0)$$

(단, ϕ_0는 $\cos\phi_0 = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\phi_0 = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$인 상수)

을 이용하면 $f(\theta)$를 각 구간 $0 \le \theta \le \pi/2$과 $\pi/2 \le \theta \le \pi$에서 하나의 사인함수로 나타낼 수 있고 문항 (2)에서 구한 θ의 범위에서 $f(\theta)$의 최댓값을 구할 수 있다.

또는 평면벡터의 내적의 성질

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}||\vec{w}|\cos(\phi) \le |\vec{v}||\vec{w}|$$

(단, ϕ는 두 벡터의 사이 각. 부등식의 등호는 $\phi = 0$ 즉, $\vec{v}$와 $\vec{w}$가 같은 방향일 때 성립)

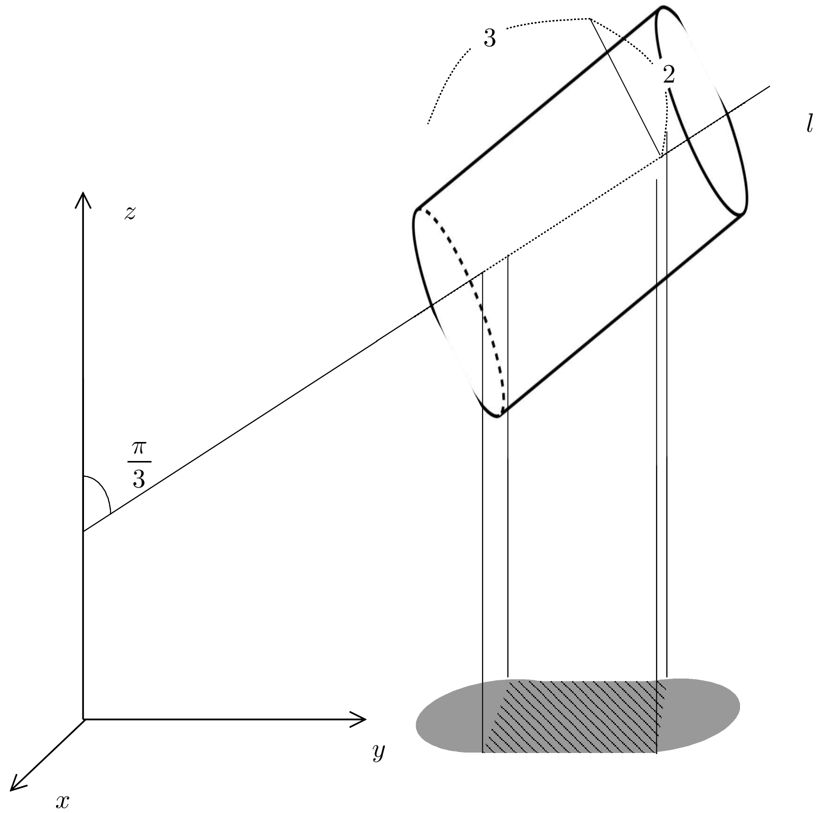
을 이용하여 $f(\theta)$의 최댓값을 구할 수 있다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	정사영을 가운데 사각형 영역과 양옆의 반타원 영역을 나누어 생각함 (+2점) 정사영 공식을 이용하여 넓이를 올바르게 구함 (+5점)	7
(2)	구하는 각의 범위가 회전축과 z축 사이 각의 두 배임을 파악함 (+2점) 배각 공식을 이용하여 $\cos(\theta)$의 최솟값을 구함 (+2점)	4
(3)	z축과의 각도 θ를 사용하여 문제를 접근함 (+2점) 정사영의 넓이의 식과 앞의 문항에서 구한 범위에서 정사영의 넓이의 최댓값을 정확하게 구하고 이 과정을 설명함 (+7점)	9

7. 예시 답안

(1)



정사영한 도형은 위 그림과 같이 양 가장자리의 두 개의 반 타원과 중앙의 빗금친 부분으로 이루어져 있다. 이는 각각 다음의 평면도형들의 xy 평면 위로의 정사영이다.

- 원기둥의 윗면(원)의 xy 평면과 평행한 지름에 대한 반원
- 원기둥의 아랫면(원)의 xy 평면과 평행한 지름에 대한 반원
- 위 두 반원의 지름을 변으로 가지는 직사각형

두 평면의 사이 각은 두 평면의 법선벡터의 사이 각과 같으므로 이들 평면도형이 xy 평면과 이루는 각도는 각각 $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}$ 이다.

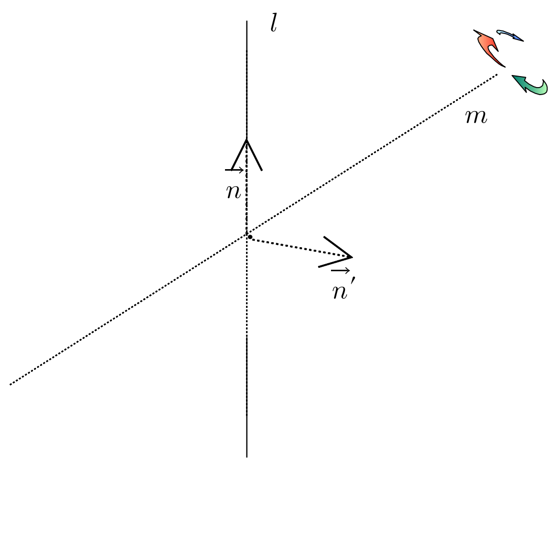
정사영 넓이공식을 이용하면 가장자리 두 반타원의 넓이는 각각 $\frac{1}{2}\times\pi\times 2^2\times\cos\frac{\pi}{3}=\pi$ 이고,

중앙의 빗금친 부분의 넓이는 $4\times 3\times\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=6\sqrt{3}$ 이다.

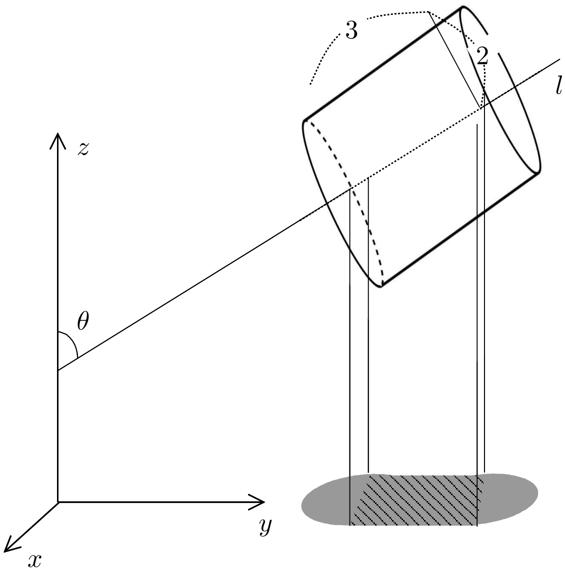
따라서 원기둥의 정사영의 넓이는 $6\sqrt{3}+2\pi$ 이다.

(2) 직선 m을 회전축으로 π만큼 돌렸을 때 θ값이 최대가 된다. 이때의 $\vec{n}$ 을 $\vec{n}'$ 라하자. 아래 그림에서 벡터 z축의 양의 방향과 직선 m과의 각도를 ϕ라 하면 z축의 양의 방향과 벡터 $\vec{n}'$과의 각도는 2ϕ 이고, 이 값이 θ의 최댓값 α가 된다. 한편 조건에서 $\cos\phi=\frac{3}{5}$ 이다. 따라서

$\cos\alpha = \cos(2\phi) = 2\cos^2\phi-1 = -\frac{7}{25}$ 이 $\cos\theta$의 최솟값이다.



(3)



정사영한 도형은 위 그림과 같이 중앙의 빗금친 부분과 양 가장자리의 두 개의 반 타원으로 이루어져 있다. 문항 (1)에서와 같이 생각하여 정사영 넓이공식을 이용하면 중앙의 빗금친 부분의 넓이는 $4\times3\times\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=12\sin\theta$ 이고, 가장자리 반타원의 넓이는 각각 $\frac{1}{2}\times\pi\times2^2\times|\cos\theta|=2\pi|\cos\theta|$ 이다. 따라서 정사영한 도형의 넓이는

$$12\sin\theta+4\pi|\cos\theta| \quad ....(*)$$

이다. 구간 $0\le\theta\le\alpha$ (α는 문항 (2)에서 구한 θ의 최댓값)에서 함수 $f(\theta)=12\sin\theta+4\pi|\cos\theta|$의 최댓값이 문제에서 구하는 정사영의 넓이의 최댓값이다. 문항 (2)에서 $\cos\alpha<0$ 이므로 $\alpha>\frac{\pi}{2}$이다.

구간 $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$에서 $f(\theta)=12\sin\theta+4\pi\cos\theta$의 최댓값은 아래와 같이 삼각함수의 덧셈정리 또는 벡터의 내적을 이용하면 $\sqrt{12^2+(4\pi)^2}=4\sqrt{9+\pi^2}$ 이고,
구간 $\frac{\pi}{2}\le\theta\le\alpha$ 에서 $f(\theta)=12\sin\theta-4\pi\cos\theta$의 최댓값은 $\sqrt{12^2+(-4\pi)^2}=4\sqrt{9+\pi^2}$ 이하이므로 정사영한 도형의 넓이의 최댓값은 $4\sqrt{9+\pi^2}$ 이다.

※ $g(\theta)=a\sin\theta+b\cos\theta$ 라 하자. (a,b는 상수) 사인함수의 덧셈정리를 이용하면

$$a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\theta+\frac{\mathrm{b}}{\sqrt{\mathrm{a}^2+\mathrm{b}^2}}\cos\theta\right)=\sqrt{\mathrm{a}^2+\mathrm{b}^2}\sin(\theta+\phi_0)$$

(단, ϕ_0는 $\cos\phi_0=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\phi_0=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$인 상수)를 얻는다.

$a,b>0$일 경우, $0<\phi_0<\frac{\pi}{2}$이고, $g(\theta)$는 $0<\theta=\frac{\pi}{2}-\phi_0<\frac{\pi}{2}$에서 최댓값 $\sqrt{a^2+b^2}$를 취한다. 한편, $a>0>b$일 경우 $-\frac{\pi}{2}<\phi_0<0$ 이고, $g(\theta)$는 $\frac{\pi}{2}<\theta=\frac{\pi}{2}-\phi_0<\pi$에서 최댓값 $\sqrt{a^2+b^2}$를 취한다.

(별해) 함수 $g(\theta)=a\sin\theta+b\cos\theta$ (a,b는 상수)의 최댓값은 다음과 같이 벡터의 내적을 이용하여 구할 수도 있다.
$\vec{v}=(b,a)$, $\vec{w}=(\cos\theta,\sin\theta)$ 라 하자.

$$b\cos\theta+a\sin\theta=\vec{v}\cdot\vec{w}=|\vec{v}||\vec{w}|\cos\phi\le|\vec{v}||\vec{w}|=\sqrt{a^2+b^2}$$

(단, ϕ는 두 벡터의 사이 각)이고 $\phi=0$ 즉, 두 벡터가 같은 방향일 때 부등식에서 등호가 성립한다.

따라서 모든 θ에 대해 $g(\theta)\le\sqrt{a^2+b^2}$이다. $a,b>0$일 경우, $\vec{v}$는 1사분면의 점이고, 구간 $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$에서 $\vec{w}$는 단위원에서 1사분면에 속하는 모든 점을 나타내므로 구간 $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$에서 $g(\theta)=a\sin\theta+b\cos\theta$는 최댓값 $\sqrt{a^2+b^2}$를 취한다. 마찬가지로 $a>0>b$일 경우 $\vec{v}$는 2사분면의 점이므로 구간 $\frac{\pi}{2}\le\theta\le\pi$에서 함수 $g(\theta)$는 최댓값 $\sqrt{a^2+b^2}$를 취한다.