2017학년도 수시모집
자연계열 논술고사

일반정보

유형	☑ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 문제 1	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	미적분 Ⅱ, 수학 Ⅱ
	핵심개념 및 용어	주기, 주기함수, $\cos x$
예상 소요 시간	40분 / 전체 120분	

문항 및 자료

【문제 1】 다음 제시문을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오(20점).

> 함수 f의 정의역에 속하는 임의의 실수 x에 대하여 $f(x+p)=f(x)$가 성립하는 0이 아닌 상수 p가 존재할 때, 함수 f를 주기함수라고 한다. 이때, 상수 p 중에서 최소인 양수를 그 함수의 주기라고 한다.

1. $f(x)=\cos x$이면 $f(0)=1$이다. 이것을 이용하여 모든 정수 k에 대해 $f(k+n)=f(k)$가 성립하는 양의 정수 n은 존재하지 않음을 보이시오.

2. f는 주기가 p인 주기함수이다. 임의의 양의 정수 n에 대해 $f(x+np)=f(x)$임을 보이시오.

3. 주기가 각각 p_1, p_2인 두 주기함수 f_1, f_2가 있다. $\frac{p_1}{p_2}$이 유리수이면 $g(x)=f_1(x)+f_2(x)$로 정의된 함수 g도 주기함수임을 보이시오.

4. $f(x)=\cos(2\pi x)+\cos(\frac{1}{\sqrt{2}}2\pi x)$인 함수 f는 주기함수가 아님을 보이시오.

출제 의도

우리 주위의 자연적, 인공적 대상과 현상들은 공간적, 시간적으로 동일하게 반복되는 패턴을 보이는 경우가 많다. 수학적으로 이러한 대상과 현상을 기술하고자 할 때 주기함수를 얻게 되며, 주기함수들로 이루어진 함수들, 가령 주기함수들의 합, 곱을 다루게 된다. 〈문제 1〉에서는 주기와 주기함수의 정의를 정확히 이해하는지 먼저 묻고, 주기함수의 성질과 주기가 다른 두 함수의 합이 언제 주기함수가 되는지 묻는다.

1-1. 제시문에서 주어진 주기함수의 정의를 정확히 이해하는지 묻는다. 코사인함수는 실수전체에서 정의된 주기 2π인 함수이지만, 정수의 집합을 정의역으로 가지는 함수로서는 주기함수가 아님을 이해하고 설명할 수 있는지 평가한다. 코사인함수의 성질(특히 함숫값이 1이 되는 점들)과 원주율 π가 무리수이고 무리수와 유리수의 차이를 이해하는지 묻는다.

1-2. 주기가 p인 주기함수는 동일한 함숫값이 p마다 반복되는 함수이다. 따라서 동일한 함숫값이 $2p, 3p,$ ...마다 반복된다고 볼 수 있다. 이러한 주기함수의 성질을 파악하고 수학적 귀납법 등을 이용하여 설명할 수 있는지 평가한다. 다음 소문항 (3)의 힌트로서 제시되었다.

1-3. 주기가 다른 여러 현상(또는 함수)을 동시에 고려할 때 하나의 새로운 주기를 이루는 경우가 있다. 가령 2년, 3년마다 열리는 두 행사가 있다면, 두 행사는 6년마다 같은 해에 열린다. 두 주기함수에 대해 주기의 비가 유리수라는 조건으로부터 이와 유사한, 즉 두 함수의 합이 주기함수라는 결론을 이끌어 낼 수 있는지 묻는다.

1-4. 두 주기함수의 주기의 비가 무리수일 경우, 위 소문항 (3)의 풀이과정에 비추어보면 두 함수의 합은 주기함수가 아님을 짐작할 수 있다. 특별히 두 코사인함수의 합에 대해서 코사인함수의 성질 (코사인함수의 주기, 최댓값 등)을 이용하여 이를 설명할 수 있는지 평가한다.

출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

<table>
<tr><th colspan="2">문항 및 제시문</th><th>관련 성취기준</th></tr>
<tr><td rowspan="2">제시문/
1-1</td><td>교육과정*</td><td>[미적분 II] - (나) 삼각함수 - ① 삼각함수의 뜻과 그래프
② 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다.</td></tr>
<tr><td>성취기준·
성취수준**</td><td>[미적분 II] - (2) 삼각함수 - (가) 삼각함수의 뜻과 그래프
미적2212-2. 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다.
$y=a\sin(bx+c)+d, y=a\cos(bx+c)+d, y=a\tan(bx+c)+d$의</td></tr>
</table>

문항 및 제시문		관련 성취기준
		그래프를 그리고, 각 함수의 정의역, 치역, 주기를 구할 수 있다.
1-2	교육과정	**[미적분 Ⅱ] - (나) 삼각함수 - $\boxed{1}$ 삼각함수의 뜻과 그래프** ② 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다.
	성취기준·성취수준	**[미적분 Ⅱ] - (2) 삼각함수 - (가) 삼각함수의 뜻과 그래프** 미적2212-2. 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다. $y=a\sin(bx+c)+d, y=a\cos(bx+c)+d, y=a\tan(bx+c)+d$의 그래프를 그리고, 각 함수의 정의역, 치역, 주기를 구할 수 있다.
	교육과정	**[수학 Ⅱ] - (다) 수열 - $\boxed{3}$ 수학적 귀납법** ③ 수학적 귀납법을 이용하여 명제를 증명할 수 있다.
	성취기준·성취수준	**[수학 Ⅱ] - (3) 수열 - (다) 수학적 귀납법** 수학2332/2333. 수학적 귀납법의 원리를 이해하고, 이를 이용하여 자연수에 관한 명제를 증명할 수 있다.
1-3	교육과정	**[미적분 Ⅱ] - (나) 삼각함수 - $\boxed{1}$ 삼각함수의 뜻과 그래프** ② 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다.
	성취기준·성취수준	**[미적분 Ⅱ] - (2) 삼각함수 - (가) 삼각함수의 뜻과 그래프** 미적2212-2. 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다. $y=a\sin(bx+c)+d, y=a\cos(bx+c)+d, y=a\tan(bx+c)+d$의 그래프를 그리고, 각 함수의 정의역, 치역, 주기를 구할 수 있다.
1-4	교육과정	**[미적분 Ⅱ] - (나) 삼각함수 - $\boxed{1}$ 삼각함수의 뜻과 그래프** ② 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다.
	성취기준·성취수준	**[미적분 Ⅱ] - (2) 삼각함수 - (가) 삼각함수의 뜻과 그래프** 미적2212-2. 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다. $y=a\sin(bx+c)+d, y=a\cos(bx+c)+d, y=a\tan(bx+c)+d$의 그래프를 그리고, 각 함수의 정의역, 치역, 주기를 구할 수 있다.

* 교육과학기술부 고시 제2011-361호 [별책8] "수학과 교육과정"
** 교육과학기술부 발간 "2009 개정 교육과정에 따른 성취기준·성취수준: 고등학교 수학' (발간물 등록번호: 11-1341000-002322-01)

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	미적분 Ⅱ	우정호 외	동아출판	2014	76-78, 84, 85
	미적분 Ⅱ	류희찬 외	천재교과서	2014	69-73
	수학 Ⅱ	우정호 외	동아출판	2014	179-182
	수학 Ⅱ	황선욱 외	좋은책신사고	2014	132-134

문항 해설

〈문제 1〉에서는 주기와 주기함수의 정의를 정확히 이해하는지 먼저 묻고, 주기함수의 성질과 주기가 다른 두 함수의 합이 언제 주기함수가 되는지 묻는다.

1-1. 제시문에서 주기함수와 주기의 정의가 주어졌다. 이 정의에 따르면 정수의 집합을 정의역으로 가지는 함수가 주기함수라면 주기는 양의 정수가 되어야한다. 코사인함수는 실수전체에서 정의된 주기 2π인 함수이지만, 정수의 집합을 정의역으로 가지는 함수로서는 주기함수가 아니다. 즉 모든 정수 k에 대해 $\cos(k+n) = \cos(k)$가 성립하는 양의 정수 n은 존재하지 않는다. 이는 양변에 $k=0$을 대입하여 보일 수 있다. ($\cos x = 1$이면 x는 2π의 정수배이고 π는 무리수이다.)

1-2. 주기가 p인 주기함수는 동일한 함숫값이 p마다 반복되는 함수이다. 따라서 동일한 함숫값이 $2p, 3p,$ ... 마다 반복된다고 볼 수 있다. 가령, 모든 x에 대해 $f(x+p) = f(x)$ 가 성립하므로 특히 양변에 x대신 $x+p$를 대입하면 $f(x+2p) = f(x+p) = f(x)$를 얻을 수 있다. 이와 유사한 논의와 수학적 귀납법을 이용하여 임의의 양의 정수 n에 대해 $f(x+np) = f(x)$이 성립함을 보일 수 있다.

1-3. 주기가 다른 여러 현상(또는 함수)을 동시에 고려할 때 하나의 새로운 주기를 이루는 경우가 있다. 가령 2년, 3년마다 열리는 두 행사가 있다면, 두 행사는 6년마다 같은 해에 열린다. 이는 6년이라는 큰 주기 안에서 2년, 3년의 소주기가 각각 3번, 2번 반복되기 때문이다. 즉, 6년 = 2년 × 3 = 3년 × 2 로부터 6년의 주기를 얻을 수 있다. 마찬가지로 만약 두 주기함수의 주기의 비 $p_1/p_2 = n/m$가 유리수라면 $p_1 m = p_2 n$ 이므로 두 주기함수 각각 따라서 그 합도 $p_1 m = p_2 n$ 마다 동일한 함숫값이 반복되는 주기함수이다.

1-4. 두 주기함수의 주기의 비가 무리수일 경우, 소문항 (3)의 풀이과정에 비추어보면 두 함수의 합은 주기함수가 아님을 짐작할 수 있다. 소문항 (4)에서는 특별히 두 코사인 함수의 합에 대해서 이를 설명할 수 있는지 묻는다. (참고: 이를 일반적인 두 주기함수의 합에 대해 설명하는 데에는 어려움이 따르는데, 이는 두 함수의 합을 고려하는 것과 두 함수를 각각 고려하는 것이 다르기 때문이다.) (4)에서 주어진 함수 $f(x) = \cos(2\pi x) + \cos(\frac{1}{\sqrt{2}} 2\pi x)$의 경우 $f(x) = 2$인 경우는 두 코사인 함수가 각각 1인 경우뿐이다. 두 코사인함수가 동시에 1이 되는 점은 $x = 0$뿐임을 볼 수 있다. 따라서 함수값 $f(0) = 2$는 주기적으로 반복되지 않으므로 f는 주기함수가 아니다.

채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
1-1	문제와 같은 양의 정수 n이 존재한다면 n은 2π의 정수배임을 논리적으로 설명 (+3) 이는 π가 무리수라는 사실에 모순됨을 설명 (+1)	4

1-2	수학적 귀납법 등을 사용하여 모든 양의 정수 n에 대해 주어진 식이 성립함을 논리적으로 설명 (4점)	4
1-3	주기의 비가 유리수라는 조건으로부터 $p_1 m = p_2 n$ 인 양의 정수 m, n이 존재함을 설명 (+3) (2)의 결과를 이용하여 두 함수의 합이 주기함수임을 설명 (+3)	6
1-4	코사인함수의 성질을 이용하여 주어진 함수가 주기함수가 아님을 논리적으로 설명 (6점)	6

예시 답안

1-1. 모든 정수 k에 대해 $\cos(k+n) = \cos(k)$가 성립하는 양의 정수 n이 있다고 가정하자.

$k = 0$일 때 $\cos(0+n) = \cos(0)$이고, $\cos(n) = \cos(0) = 1$ 이므로 n은 2π의 정수배이다.

즉 $n = m2\pi$인 정수 m이 존재한다. $n \neq 0$ 이므로 $m \neq 0$ 이다.

따라서 $\pi = \dfrac{n}{2m}$인데, π는 무리수이고, 분수 $\dfrac{n}{2m}$는 유리수이므로 이는 모순이다.

[별해] 삼각함수의 덧셈공식 $\cos(k+n) = \cos k \cos n - \sin k \sin n$ 을 이용하면

$\cos k \cos n - \sin k \sin n = \cos k$ 이다. $\sin k = 0$와 $\cos k = 0$이 동시에 성립하지는 않으므로

$\cos k \neq 0$일 때 양변을 $\cos k$로 나누고 정리하면 $\cos n - 1 = \tan k \sin n$이다.

이것이 모든 정수 k에 대해 성립하는데 좌변은 k와 무관하므로 $\cos n - 1 = 0$이고 $\sin n = 0$ 이어야 한다.

그러므로 $n = m2\pi$인 정수 m이 존재한다. $n \neq 0$ 이므로 $m \neq 0$ 이다.

따라서 $\pi = \dfrac{n}{2m}$인데, π는 무리수이고, 분수 $\dfrac{n}{2m}$는 유리수이므로 이는 모순이다.

1-2. 수학적 귀납법을 이용하여 모든 양의 정수 n에 대해 $f(x+np) = f(x)$가 성립함을 보이자.

$n = 1$일 때 p가 주기이므로 주기함수의 정의에 의해 $f(x+p) = f(x)$이다.

$n = k$일 때 성립한다고 가정하면 모든 x에 대해 $f(x+kp) = f(x)$이다. 따라서

$f(x+(k+1)p) = f((x+kp)+p) = f(x+kp) = f(x)$이다. 즉, $n = k+1$일 때도 성립한다.

그러므로 수학적 귀납법에 의해 모든 양의 정수 n에 대해 $f(x+np) = f(x)$가 성립한다.

1-3. 가정에 의해 $\dfrac{p_1}{p_2} = \dfrac{n}{m}$인 정수 n, m이 있다.

함수의 주기 p_1, p_2는 양수이므로 $\dfrac{p_1}{p_2} = \dfrac{n}{m}$는 양수이고 따라서 n, m도 양수라 가정할 수 있다.

$\dfrac{p_1}{p_2} = \dfrac{n}{m}$로부터 $mp_1 = np_2$이다. 이 값을 p라 하면 p는 양수이다.

(2)의 결과로부터 $f_1(x+np_1)=f_1(x)$, $f_2(x+mp_2)=f_2(x)$ 이므로, 모든 x에 대해

$g(x+p) = f_1(x+mp_1)+f_2(x+np_2) = f_1(x)+f_2(x) = g(x)$

이 성립하므로 g도 주기함수이다.

1-4. $f(x)=\cos(2\pi x)+\cos(\frac{2\pi}{\sqrt{2}}x)$ 가 주기가 p인 주기 함수라고 하면, $f(x)=f(x+p)$의 관계가 모든 실수 x에 대해 성립하여야 한다. 즉 $x=0$일 때 $f(0+p)=f(0)$인 관계가 성립해야 한다.

$f(0) = \cos(0)+\cos(0)=2$이므로 $f(p)=\cos(2\pi p)+\cos(\frac{1}{\sqrt{2}}2\pi p) = 2$이다.

$\cos(x) \le 1$이므로 $\cos(2\pi p) = 1$이고 $\cos(\frac{1}{\sqrt{2}}2\pi p) = 1$일 때만

$\cos(2\pi p)+\cos(\frac{1}{\sqrt{2}}2\pi p) = 2$가 성립한다. $\cos(2\pi p) = 1$이므로 p는 정수이고,

$\cos(\frac{1}{\sqrt{2}}2\pi p) = 1$이므로 $\frac{1}{\sqrt{2}}p$도 정수이어야 한다. 주기 p가 양수이므로 적당한 양의 정수 n, m이 있어서 $p = n$, $\frac{1}{\sqrt{2}}p = m$이어야 한다. 즉, $\sqrt{2} = \frac{n}{m}$이다. $\sqrt{2}$는 무리수이고, 분수 $\frac{n}{m}$는 유리수이므로 이는 모순이다.

일반정보

유형	☑ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 문제 2	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	확률과 통계, 미적분 I, 미적분 II
	핵심개념 및 용어	사건, 독립, 이항분포, 확률변수, 기댓값, $\mathrm{E}(X)$, 극한값, e, 등비급수, 급수의 합
예상 소요 시간	40분 / 전체 120분	

문항 및 제시문

【문제 2】다음 제시문을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오(20점).

> n개의 구멍에 n개의 두더지 로봇이 하나씩 들어 있는 게임기가 있다. 게임 시작 후 1초부터 매 초마다 두더지 로봇이 나타났다가 사라진다. 각 두더지 로봇이 나타날 확률이 p이고 나타나지 않을 확률은 $q=1-p$이다. 각각의 두더지 로봇이 나타나는 사건은 서로 독립이다.

1. 게임 시작 후 1초 시점에 두더지 로봇이 하나만 나타날 확률 r을 n, p, q를 이용한 식으로 나타내시오.

2. 주어진 n에 대해 문항 (1)의 확률 r이 최대가 되는 p를 n을 이용한 식으로 표시하고, 이 p에 대하여 n이 한없이 커질 때 r의 극한값을 구하시오.

3. $|a| < 1$일 때, 다음 등비급수의 합

$$1 + a + a^2 + a^3 + \cdots = \frac{1}{1-a}$$

을 유도하는 과정을 고려하여 아래 급수의 합에 관한 식이 성립함을 보이시오.

$$1 + 2a + 3a^2 + 4a^3 + \cdots = \frac{1}{(1-a)^2}$$

4. 게임을 시작 한 후 두더지가 한 마리라도 처음 나타난 시간을 확률변수 T라고 한다. T의 기댓값 $\mathrm{E}(T)$를 구하시오.

출제 의도

학생들에게 익숙한 게임의 예를 들어 확률의 기본 성질을 이해하고, 확률의 덧셈정리와 곱셈정리를 활용하여 확률과 기댓값을 구할 수 있는지 평가한다. 또한 이 과정에서 다항함수의 도함수를 활용하여 최댓값을 구할 수 있는지, 등비급수의 합을 구하는 과정을 이해하고 이를 응용하여 급수의 합을 구할 수 있는지 평가한다.

2-1. 게임의 예를 들어 이항분포 확률을 이해하고 구할 수 있는지 평가한다.

2-2. 위 소문항 (1)에서 구한 확률은 n과 p로 주어진다 (이항분포 $\mathrm{B}(n, p)$의 n과 p). 다음의 사항들을 평가한다.
- 다항함수의 도함수를 활용하여 p의 함수로서 이 확률의 최댓값을 구할 수 있다.
- n이 증가함에 따라 이 최댓값의 극한을 구할 수 있다.
- e와 연관된 수열의 극한을 구할 수 있다.

2-3. 등비급수의 합을 구하는 과정을 이해하고 이를 응용하여 주어진 급수의 합을 구할 수 있는지 묻는다. 다음 소문항 (4)의 기댓값을 구하는데 필요한 급수로서 제시되었다.

※ 문제에서 주어진 급수 $1 + 2a + 3a^2 + 4a^3 + \cdots$의 수렴성에 대한 설명을 평가하지는 않는다. 문제에서는 급수의 합이 이미 주어졌으므로 급수는 수렴함을 가정한다.

2-4. 다음의 사항들을 평가한다.
- 주어진 확률변수의 확률질량 함수를 구할 수 있다.

- 주어진 확률변수의 기댓값의 식을 구할 수 있다.
- 이 식(급수)의 값을 3의 결과를 활용하여 구할 수 있다.

출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

<table>
<tr><th colspan="2">문항 및 제시문</th><th>관련 성취기준</th></tr>
<tr><td rowspan="6">제시문/
2-1</td><td>교육과정*</td><td>[확률과 통계] - (나) 확률 - 1 확률의 뜻과 활용
② 확률의 기본 성질을 이해한다.
③ 확률의 덧셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
④ 여사건의 확률의 뜻을 알고, 이를 활용할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>성취기준·
성취수준**</td><td>[확률과 통계] - (2) 확률 - (가) 확률의 뜻과 활용
확통1211/1212. 통계적 확률, 수학적 확률의 의미와 확률의 기본성질을 이해한다.
확통1213. 확률의 덧셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
확통1214. 여사건의 확률의 뜻을 알고, 이를 활용할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>교육과정</td><td>[확률과 통계] - (나) 확률 - 2 조건부확률
② 사건의 독립과 종속의 의미를 이해하고, 이를 설명할 수 있다.
③ 확률의 곱셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>성취기준·
성취수준</td><td>[확률과 통계] - (2) 확률 - (나) 조건부확률
확통1222-1. 사건의 독립과 종속의 의미를 이해하고, 이를 구별할 수 있다.
확통1222-2. 독립시행의 확률을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
확통1223. 확률의 곱셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>교육과정</td><td>[확률과 통계] - (다) 통계 - 1 확률분포
② 이항분포의 뜻을 알고, 평균과 표준편차를 구할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>성취기준·
성취수준</td><td>[확률과 통계] - (3) 통계 - (가) 확률분포
확통1313. 이항분포의 뜻을 알고, 평균과 표준편차를 구할 수 있다. 어떤 확률변수가 이항분포를 따르는지 판단하고 이항분포를 따르는 여러 가지 확률변수의 확률, 평균, 표준편차를 구할 수 있다.</td></tr>
<tr><td rowspan="6">2-2</td><td>교육과정</td><td>[미적분 I] - (다) 다항함수의 미분법 - 3 도함수의 활용
③ 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>성취기준·
성취수준</td><td>[미적분 I] - (3) 다항함수의 미분법 - (다) 도함수의 활용
미적1333. 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. 다항함수의 극값을 구하고, 그 과정을 설명할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>교육과정</td><td>[미적분 I] - (가) 수열의 극한 - 1 수열의 극한
② 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이해하고, 이를 이용하여 극한값을 구할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>성취기준·
성취수준</td><td>[미적분 I] - (1) 수열의 극한 - (가) 수열의 극한
미적1112. 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이용하여 극한값을 구하고, 그 과정을 설명할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>교육과정</td><td>[미적분 II] - (가) 지수함수와 로그함수 - 2 지수함수와 로그함수의 미분
① 지수함수와 로그함수의 극한값을 구할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>성취기준·
성취수준</td><td>[미적분 II] - (1) 지수함수와 로그함수 - (나) 지수함수와 로그함수의 미분
미적2121. 무리수 e의 뜻을 알고, 지수함수와 로그함수의 극한값을 구할 수 있다.</td></tr>
</table>

문항 및 제시문		관련 성취기준
2-3	교육과정	**[미적분 I] - (가) 수열의 극한 - $\boxed{1}$ 급수** ② 등비급수의 뜻을 알고, 그 합을 구할 수 있다. ③ 등비급수를 활용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있다.
	성취기준·성취수준	**[미적분 I] - (1) 수열의 극한 - (나) 급수** 미적1122. 등비급수의 뜻을 알고, 그 합을 구할 수 있다. 미적1123. 등비급수를 활용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있다.
2-4	교육과정	**[확률과 통계] - (나) 확률 - $\boxed{1}$ 확률의 뜻과 활용** ② 확률의 기본 성질을 이해한다. ③ 확률의 덧셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다. ④ 여사건의 확률의 뜻을 알고, 이를 활용할 수 있다.
	성취기준·성취수준	**[확률과 통계] - (2) 확률 - (가) 확률의 뜻과 활용** 확통1211/1212. 통계적 확률, 수학적 확률의 의미와 확률의 기본성질을 이해한다. 확통1213. 확률의 덧셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다. 확통1214. 여사건의 확률의 뜻을 알고, 이를 활용할 수 있다.
	교육과정	**[확률과 통계] - (다) 통계 - $\boxed{1}$ 확률분포** ② 이산확률변수의 기댓값(평균)과 표준편차를 구할 수 있다.
	성취기준·성취수준	**[확률과 통계] - (3) 통계 - (가) 확률분포** 확통1312-1. 이산확률변수의 기댓값(평균)을 구할 수 있다.

* 교육과학기술부 고시 제2011-361호 [별책8] “수학과 교육과정”
** 교육과학기술부 발간 “2009 개정 교육과정에 따른 성취기준·성취수준: 고등학교 수학‘ (발간물 등록번호: 11-1341000-002322-01)

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	확률과 통계	우정호 외	동아출판	2014	107-112, 126-130, 138, 153, 160-162
	확률과 통계	류희찬 외	천재교과서	2015	89-92, 104, 122-126, 131-134
	미적분 I	우정호 외	동아출판	2014	39-40, 44-46, 142-154
	미적분 II	우정호 외	동아출판	2014	40-41
	미적분 I	이준열 외	천재교육	2014	34-36, 39-40, 138-147
	미적분 II	류희찬 외	천재교과서	2014	37-38
	수학 II	황선욱 외	좋은책 신사고	2014	112
	수학 II	이강섭 외	미래엔	2014	31

문항 해설

학생들에게 익숙한 게임의 예를 들어 확률의 기본 성질을 이해하고, 확률의 덧셈정리와 곱셈정리를 활용하여 확률과 기댓값을 구할 수 있는지 평가한다. 또한 이 과정에서 다항함수의 도함수를 활용하여 최댓값을 구할 수 있는지,

등비급수의 합을 구하는 과정을 이해하고 이를 응용하여 급수의 합을 구할 수 있는지 묻는다.

2-1. 확률의 덧셈정리와 곱셈정리에 의하면 각 시점에서 나타나는 두더지의 수는 확률 p인 사건을 n번 독립시행하는 이항분포 $\mathrm{B}(n, p)$ 확률변수임을 알 수 있다. 즉, 한 시점에 n개 중 하나만 나타나고 나머지 $n-1$ 개는 나타나지 않을 확률은 $np(1-p)^{n-1}$ 이다.

2-2. 소문항 (1)에서 구한 확률은 $f(p) = np(1-p)^{n-1}$이다. 여기서 p는 확률이므로 $0 \le p \le 1$ 이다. 다항함수 f의 도함수를 활용하여 이 구간에서 극댓값과 함수의 증감을 파악하고 f의 최댓값을 구할 수 있다. 이와 같이 구한 최댓값 $r_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1}$은 n이 증가함에 따라 변한다. e와 연관된 수열의 극한 $e = \lim_{n \to \infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ 을 고려하여 $\lim_{n \to \infty} r_n$의 극한값을 구할 수 있다.

2-3. $|a| < 1$일 때 등비급수의 합 $R = 1 + a + a^2 + a^3 + \cdots$ 은 다음과 같이 구할 수 있다.

$R = 1 + a + a^2 + a^3 + \cdots$ 의 양변에 a를 곱하면

$aR = \quad a + a^2 + a^3 + a^4 + \cdots$ 를 얻는다.

첫 번째 식에서 두 번째 식을 빼면

$$R - aR = (1-a)R = (1 + a + a^2 + \cdots) - (a + a^2 + a^3 + \cdots) = 1$$

즉, $R = \dfrac{1}{1-a}$ 이다.

이와 유사한 방법으로 급수 $S = 1 + 2a + 3a^2 + 4a^3 + \cdots$ 의 합을 구할 수 있다.

$S = 1 + 2a + 3a^2 + 4a^3 + \cdots$ 의 양변에 a를 곱하면

$aS = \quad a + 2a^2 + 3a^3 + 4a^4 + \cdots$ 를 얻는다.

첫 번째 식에서 두 번째 식을 빼면

$$S - aS = (1-a)S = (1 + 2a + 3a^2 + \cdots) - (a + 2a^2 + 3a^3 + \cdots)$$

$$= 1 + a + a^2 + a^3 + \cdots = \frac{1}{1-a}$$

즉, $S = \dfrac{1}{(1-a)^2}$ 이다.

또는 위의 등비급수와 주어진 급수의 n항까지의 부분합 R_n, S_n에 대해서 위와 같이 논하여서 동일한 결론을 얻을 수 있다.

※ 문제에서 주어진 급수 $S = 1 + 2a + 3a^2 + 4a^3 + \cdots$의 수렴성에 대한 설명을 평가하지는 않는다. 문제에서는 급수의 합이 이미 주어졌으므로 급수는 수렴함을 가정한다.

2-4. 앞면이 나올 확률이 a 인 동전을 반복해서 던지는 경우를 생각하자. (단, $0 < a < 1$) k번째 시행에서 앞면이 처음으로 나올 확률은 처음 $k-1$ 번 계속 뒷면이 나오고 k 번째 시행에서 앞면이 나오는 경우의 확률이므로 $(1-a)^{k-1}a$ 이다. 즉, 앞면이 처음으로 나오는 시행회수를 확률변수 X 라 하면 $X = k$ 일 확률이 $(1-a)^{k-1}a$ 이다. 따라서 X 의 기댓값은 소문항 (3)의 급수를 이용하여

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k\,\mathrm{P}(X=k) = a + 2(1-a)a + 3(1-a)^2 a + \cdots = \frac{a}{(1-(1-a))^2} = \frac{1}{a}$$

임을 알 수 있다. <문제 3>에서 주어진 상황도 이와 유사하다. 각 시점에 두더지 로봇이 한 마리도 안 나타날 확률은 $(1-p)^n$ 이고 따라서 한 마리라도 나타날 확률은 $1-(1-p)^n$ 이다. 위의 동전을 반복해서 던지는 시행과 비교하면 두더지가 한 마리라도 처음 나타난 시간 T의 기댓값은

$$\mathrm{E}(T) = \frac{1}{1-(1-p)^n}$$

임을 알 수 있다.

채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
2-1	풀이과정과 답이 맞음 (3점) 풀이과정은 맞으나 답이 틀림 (+1~2)	3
2-2	도함수를 활용하여 확률이 최대가 되는 p와 최댓값을 구함 (+3) 최댓값의 극한을 정확한 풀이과정과 함께 구함 (+4)	7
2-3	풀이과정과 설명이 정확하고 논리적임 (4점)	4
2-4	게임 시작 후 k초에 처음으로 하나라도 나타날 확률, 즉 $\mathrm{P}(T=k)$를 구함 (+2) 기댓값 $\mathrm{E}(T)$의 식을 구함 (+2) (3)의 결과를 이용하여 $\mathrm{E}(T)$의 값을 구함 (+2)	6

예시 답안

2-1. n개의 두더지 로봇 중 게임시작 후 1초에 특정한 하나(가령, 첫 번째 두더지 로봇)만 나타나고 나머지 $(n-1)$개는 나타나지 않을 확률은 $p(1-p)^{n-1}$이다. 첫 번째 두더지만 나타나는 사건, 두 번째 두더지만 나타나는 사건, ... 은 서로 배반사건이므로 n개 중 하나만 나타날 확률은 각 사건의 확률의 합 즉, $r = np(1-p)^{n-1} = npq^{n-1}$ 이다.

(참고) 특정한 시점에 나타나는 두더지 로봇의 수 X는 이항분포 $\mathrm{B}(n,p)$를 가지는 확률변수이다. 따라서 구하는 확률은 $\mathrm{P}(X=1) = \binom{n}{1} p(1-p)^{n-1} = np(1-p)^{n-1}$ 이다.

2-2. 구간 $0 \le p \le 1$에서 함수 $f(p) = np(1-p)^{n-1}$가 최대가 되는 p의 값과 이때 최댓값을 구하기 위해 구간 $0 < p < 1$에서 함수 f의 증감을 도함수를 이용하여 파악한다. 또는 구간 $0 < p < 1$에서 함수 f의 극값을 구하고 구간의 양끝에서의 함수값 $f(0), f(1)$과 비교하여 최댓값을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} f'(p) &= n(1-p)^{n-1} - n(n-1)p(1-p)^{n-2} \\ &= n(1-p)^{n-2}((1-p) - (n-1)p) \\ &= n(1-p)^{n-2}(1-np) \end{aligned}$$

이므로 $p = \dfrac{1}{n}$ 일 때 $f'(p) = 0$이다.

$0 < p < \dfrac{1}{n}$이면 $f'(p) > 0$ 이어서 f는 이 구간에서 증가하고, $\dfrac{1}{n} < p < 1$이면 $f'(p) < 0$ 이므로 f는 이 구간에서 감소한다. 따라서 그래프의 개형을 고려하면 함수 f는 구간 $0 \le p \le 1$에서

$p = \dfrac{1}{n}$일 때 최댓값 $\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{n-1}$ 을 취한다. $n \to \infty$일 때 이 값의 극한은

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-1} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\dfrac{n}{n-1}\right)^{n-1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n-1}\right)^{n-1}} = \frac{1}{e}$$

이다.

[별해] 구간 $0 < p < 1$에서 함수 $f(p) = np(1-p)^{n-1}$의 극값은 $p = \dfrac{1}{n}$일 때 $\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{n-1}$이다. 이 극값은 구간의 양끝에서의 함숫값 $f(0) = 0,\ f(1) = 0$보다 크므로 구간 $0 \le p \le 1$에서 함수의 최댓값이다.

2-3. $S = 1 + 2a + 3a^2 + 4a^3 + \cdots$ 라고 하면 $aS = a + 2a^2 + 3a^3 + 4a^4 + \cdots$이다.

$S - aS = 1 + a + a^2 + a^3 + \cdots = \dfrac{1}{(1-a)}$

즉, $(1-a)S = \dfrac{1}{(1-a)}$ 이다. 그러므로 $S = \dfrac{1}{(1-a)^2}$ 이다.

[별해] $A = 1 + a + a^2 + a^3 + \cdots$라고 하면

$A + aA + a^2A + a^3A + \cdots =$

$(1 + a + a^2 + \cdots) + (a + a^2 + a^3 + \cdots) + (a^2 + a^3 + a^4 + \cdots) + \cdots = 1 + 2a + 3a^2 + \cdots$

즉, $S = A + aA + a^2A + a^3A + \cdots$이다.

그러므로 $S = A(1 + a + a^2 + a^3 + \cdots) = A^2 = \dfrac{1}{(1-a)^2}$ 이다.

2-4. 특정 시점에 n개의 두더지 로봇 중 하나도 나타나지 않을 확률을 s 라고 하면 $s = (1-p)^n = q^n$ 이다. 특정 시점에 적어도 하나의 두더지가 나타날 확률은 여사건의 확률이므로 $1-s$이다. 게임 시작 후 k초에 처음으로 두더지가 하나라도 나타날 확률 즉, $\mathrm{P}(T=k)$은 게임 시작 후 1초, 2초, ... , $k-1$초에는 하나도 나타나지 않고, k초에 적어도

하나가 나타날 확률이므로 $s^{k-1}(1-s)$이다.

확률변수 T의 기댓값은

$$\mathrm{E}(T) = \sum_{k=1}^{\infty} k\,\mathrm{P}(T=k) = \sum_{k=1}^{\infty} ks^{k-1}(1-s) = (1-s)\sum_{k=1}^{\infty} ks^{k-1}$$ 이다.

(3)의 결과에 의해 $\sum_{k=1}^{\infty} ks^{k-1} = \frac{1}{(1-s)^2}$ 이므로

$$\mathrm{E}(T) = \frac{1}{1-s} = \frac{1}{1-(1-p)^n} = \frac{1}{1-q^n}$$ 이다.

일반정보

유형	☑ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 문제 3	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학 I, 확률과 통계
	핵심개념 및 용어	거리, 부등식의 영역, 경우의 수, 순열, 조합
예상 소요 시간	40분 / 전체 120분	

문항 및 제시문

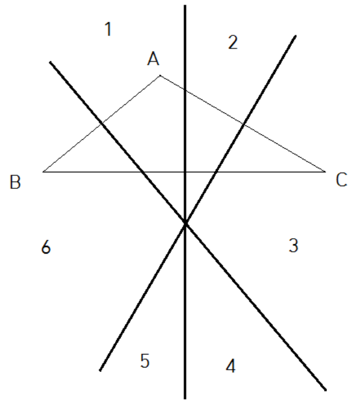
【문제 3】 다음 제시문을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오(20점).

> 평면 위의 두 점 P, Q 사이의 거리를 $\overline{PQ}$로 표시한다. 평면 위에 주어진 두 점 Q_1, Q_2에 대해 $\overline{PQ_1} < \overline{PQ_2}$가 성립하는 점 P들의 집합을 $U(Q_1, Q_2)$로 표시하고, 주어진 세 점 Q_1, Q_2, Q_3에 대해 $\overline{PQ_1} < \overline{PQ_2} < \overline{PQ_3}$가 성립하는 점 P들의 집합을 $U(Q_1, Q_2, Q_3)$로 표시한다.

1. a가 양의 상수이고 좌표평면 위의 두 점 $A(a,0)$, $B(-a,0)$가 주어졌다. $U(A,B)$는 선분 AB의 수직이등분선을 기준으로 A쪽 영역임을 보이시오.

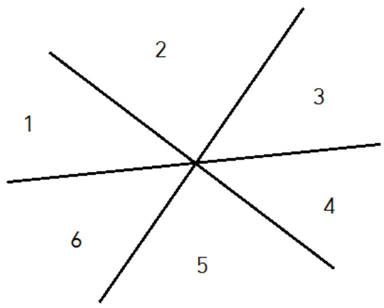
2. (그림 1)과 같이 한 직선 위에 있지 않은 세 점 A,B,C가 주어졌을 때, 삼각형 ABC의 각 변의 수직이등분선에 의해 평면은 6개의 영역으로 나뉜다. 평면에서 삼각형의 각 변의 수직이등분선을 제외한 부분을 1번 영역 ~ 6번 영역이라고 표시하였다. 각 영역이 $U(A,B,C)$, $U(A,C,B), \cdots, U(C,B,A)$ 중 어떤 것에 해당되는지 구하고 4번 영역의 답에 대해서는 그

이유를 설명하시오.



(그림 1)

문항 3, 4, 5는 (그림 2)에 대한 질문이다. (그림 2)는 평면 위에 주어진 세 점 A, B, C가 정하는 $U(A,B,C), \cdots, U(C,B,A)$를 나타낸 것이다. 세 점 A, B, C는 그림에 표시되어 있지 않다. A, B, C의 위치에 따라 1번 영역 ~ 6번 영역이 $U(A,B,C), \cdots, U(C,B,A)$ 중 각각 무엇에 해당되는지는 다를 수 있다.



(그림 2)

3. 2번 영역이 $U(C,B,A)$라면 3번 영역은 나머지 5개 $U(A,B,C), \cdots, U(C,A,B)$ 중 무엇이 될 수 있는지 가능한 경우를 모두 제시하고 설명하시오.

4. 1번 영역, 2번 영역이 각각 $U(B,A,C)$, $U(B,C,A)$이라면 4번 영역, 5번 영역은 각각 무엇인지 구하고 설명하시오.

5. 1번 영역 ~ 6번 영역에 $U(A,B,C), \cdots, U(C,B,A)$가 배치되는 가능한 모든 경우의 수를 구하시오.

출제 의도

"여기에서는 홍대입구역이 합정역 보다 가까워." 우리의 일상생활에서 흔히 듣는 대화이다. 평면상의 두 점 A, B가 주어졌을 때, 평면은 A에 더 가까운 점들의 영역과 B에 더 가까운 점들의 영역으로 나누어지고 두 영역의 경계, 즉 A, B로 부터 같은 거리의 점들은 선분 AB의 수직이등분선이다. 〈문제 3〉에서는 먼저 이러한 사항을 이해하는지 묻고, 이를 발전시켜 세 점이 주어졌을 때 평면이 어떤 영역들로 나누어지는지 논리적으로 추론할 수 있는지 평가한다.

3-1. 평면상의 두 점이 주어졌을 때 위와 같은 사실을 수학적으로 설명할 수 있는지 평가한다.

3-2. 평면상의 세 점 A, B, C가 주어졌을 때, A와 가장 가깝고, 그 다음 B, 그 다음으로 C와 가까운 점들의 영역을 생각할 수 있다. 소문항 1에 의하면 이러한 영역들의 경계는 삼각형 ABC의 각 변의 수직이등분선(의 일부)임을 알 수 있다. 문제에서 주어진 (그림 1)의 각 영역이 어떤 것에 해당하는지, 즉 이 영역의 점들은 A, B, C중 어느 점에 가장 가깝고 어느 점에서 가장 먼지 논리적으로 추론하고 설명할 수 있는지 평가한다.

소문항 2에서와 같이 세 점이 주어지면 평면을 6개의 영역으로 나눌 수 있다. (그림 2)에서는 세 점을 나타내지 않고 이와 같이 6개의 영역으로 나누어진 상황만을 제시하였다. 이는 그림에 의존하지 않고 논리적인 추론만으로 소문항 (3), (4), (5)에 답할 수 있는지 평가하기 위해서이다.

3-3. 특정한 한 영역, 가령 점 C와 가장 가깝고, 그 다음 B, 그 다음으로 A와 가까운 점들의 영역에 인접한 영역의 점들은 A, B, C중 어느 점에 가장 가깝고 어느 점에서 가장 먼지 논리적으로 추론하고 설명할 수 있는지 평가한다.

3-4. 6개의 영역 중 인접한 두 영역이 각각 어떤 영역에 해당하는지 (즉, 이 영역의 점들은 A, B, C중 어느 점에 가장 가깝고 어느 점에서 가장 먼지) 주어지면 나머지 영역들이 어떤 것인지가 결정된다. 소문항 3의 결과를 이용하여 이를 설명할 수 있는지 평가한다.

3-5. (그림 2)에서는 나타나있지 않은 세 점 A, B, C의 위치에 따라서 (그림 2)의 여섯 영역이 각각 무엇에 해당하는지는 (즉, 각 영역의 점들은 A, B, C중 어느 점에 가장 가깝고 어느 점에서 가장 먼지) 변경된다. 가능한 모든 경우의 수를 소문항 3, 4의 결과를 이용하여 구하고 설명할 수 있는지 평가한다.

출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

문항 및 제시문		관련 성취기준
제시문/ 3-1	교육과정	**[수학 I] - (다) 도형의 방정식 - $\boxed{5}$ 부등식의 영역** ① 부등식의 영역의 의미를 이해한다.
	성취기준·성취수준	**[수학 I] - (3) 도형의 방정식 - (마) 부등식의 영역** 수학1351-2. 부등식 $f(x,y) > 0$ 의 영역을 좌표평면 위에 나타내고, 그 과정을 설명할 수 있다.
	교육과정	**[수학 I] - (다) 도형의 방정식 - $\boxed{1}$ 평면좌표** ① 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다.
	성취기준·성취수준	**[수학 I] - (3) 도형의 방정식 - (가) 평면좌표** 수학1311. 수직선과 좌표평면 위에서 두 점 사이의 거리를 구하는 과정을 이해하고, 이를 이용하여 문제를 해결할 수 있다.
	교육과정	**[수학 II] - (가) 집합과 명제 - $\boxed{1}$ 집합** ① 집합의 개념을 이해하고, 집합을 표현할 수 있다. ② 두 집합 사이의 포함 관계를 이해한다. ③ 집합의 연산을 할 수 있다.
	성취기준·성취수준	**[수학 II] - (1) 집합과 명제 - (가) 집합** 수학 2111. 집합의 개념을 이해하고, 집합을 표현할 수 있다. 집합을 다양한 방식으로 표현하고 관련된 기호를 정확하게 사용할 수 있다. 수학 2112. 두 집합 사이의 포함관계를 기호를 사용하여 나타낼 수 있다. 조건제시법으로 표현된 두 집합 사이의 포함관계를 기호를 사용하여 표현할 수 있다. 수학 2113. 집합의 연산에 대한 성질을 이용하여 집합의 연산을 할 수 있다.
3-2	교육과정	**[수학 I] - (다) 도형의 방정식 - $\boxed{5}$ 부등식의 영역** ① 부등식의 영역의 의미를 이해한다.
	성취기준·성취수준	**[수학 I] - (3) 도형의 방정식 - (마) 부등식의 영역** 수학1351-2. 부등식 $f(x,y) > 0$ 의 영역을 좌표평면 위에 나타내고, 그 과정을 설명할 수 있다.
	교육과정	**[수학 I] - (다) 도형의 방정식 - $\boxed{1}$ 평면좌표** ① 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다.
	성취기준·성취수준	**[수학 I] - (3) 도형의 방정식 - (가) 평면좌표** 수학1311. 수직선과 좌표평면 위에서 두 점 사이의 거리를 구하는 과정을 이해하고, 이를 이용하여 문제를 해결할 수 있다.
	교육과정	**[수학 II] - (가) 집합과 명제 - $\boxed{1}$ 집합** ① 집합의 개념을 이해하고, 집합을 표현할 수 있다. ② 두 집합 사이의 포함 관계를 이해한다. ③ 집합의 연산을 할 수 있다.
	성취기준·성취수준	**[수학 II] - (1) 집합과 명제 - (가) 집합** 수학 2111. 집합의 개념을 이해하고, 집합을 표현할 수 있다. 집합을 다양한 방식으로 표현하고 관련된 기호를 정확하게 사용할 수 있다. 수학 2112. 두 집합 사이의 포함관계를 기호를 사용하여 나타낼 수 있다. 조건제시법으로 표현된 두 집합 사이의 포함관계를 기호를 사용하여 표현할 수 있다. 수학 2113. 집합의 연산에 대한 성질을 이용하여 집합의 연산을 할 수 있다.
3-3	교육과정	**[수학 I] - (다) 도형의 방정식 - $\boxed{5}$ 부등식의 영역** ① 부등식의 영역의 의미를 이해한다.
	성취기준·성취수준	**[수학 I] - (3) 도형의 방정식 - (마) 부등식의 영역** 수학1351-2. 부등식 $f(x,y) > 0$ 의 영역을 좌표평면 위에 나타내고, 그 과정을 설명할 수 있다.

문항 및 제시문		관련 성취기준
	교육과정	**[수학 Ⅰ] - (다) 도형의 방정식 - ① 평면좌표** ① 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다.
	성취기준· 성취수준	**[수학 Ⅰ] - (3) 도형의 방정식 - (가) 평면좌표** 수학1311. 수직선과 좌표평면 위에서 두 점 사이의 거리를 구하는 과정을 이해하고, 이를 이용하여 문제를 해결할 수 있다.
	교육과정	**[수학 Ⅱ] - (가) 집합과 명제 - ① 집합** ① 집합의 개념을 이해하고, 집합을 표현할 수 있다. ② 두 집합 사이의 포함 관계를 이해한다. ③ 집합의 연산을 할 수 있다.
	성취기준· 성취수준	**[수학 Ⅱ] - (1) 집합과 명제 - (가) 집합** 수학 2111. 집합의 개념을 이해하고, 집합을 표현할 수 있다. 집합을 다양한 방식으로 표현하고 관련된 기호를 정확하게 사용할 수 있다. 수학 2112. 두 집합 사이의 포함관계를 기호를 사용하여 나타낼 수 있다. 조건제시법으로 표현된 두 집합 사이의 포함관계를 기호를 사용하여 표현할 수 있다. 수학 2113. 집합의 연산에 대한 성질을 이용하여 집합의 연산을 할 수 있다.
	교육과정	**[확률과 통계] - (가) 순열과 조합 - ① 경우의 수** ① 합의 법칙과 곱의 법칙을 이해하고, 이를 이용하여 경우의 수를 구할 수 있다.
	성취기준· 성취수준	**[확률과 통계] - (1) 순열과 조합 - (가) 경우의 수** 확통1111. 합의 법칙과 곱의 법칙을 적절히 활용하여 경우의 수를 구하고, 그 과정을 설명할 수 있다.
3-4	교육과정	**[수학 Ⅰ] - (다) 도형의 방정식 - ⑤ 부등식의 영역** ① 부등식의 영역의 의미를 이해한다.
	성취기준· 성취수준	**[수학 Ⅰ] - (3) 도형의 방정식 - (마) 부등식의 영역** 수학1351-2. 부등식 $f(x,y) > 0$ 의 영역을 좌표평면 위에 나타내고, 그 과정을 설명할 수 있다.
	교육과정	**[수학 Ⅰ] - (다) 도형의 방정식 - ① 평면좌표** ① 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다.
	성취기준· 성취수준	**[수학 Ⅰ] - (3) 도형의 방정식 - (가) 평면좌표** 수학1311. 수직선과 좌표평면 위에서 두 점 사이의 거리를 구하는 과정을 이해하고, 이를 이용하여 문제를 해결할 수 있다.
	교육과정	**[수학 Ⅱ] - (가) 집합과 명제 - ① 집합** ① 집합의 개념을 이해하고, 집합을 표현할 수 있다. ② 두 집합 사이의 포함 관계를 이해한다. ③ 집합의 연산을 할 수 있다.
	성취기준· 성취수준	**[수학 Ⅱ] - (1) 집합과 명제 - (가) 집합** 수학 2111. 집합의 개념을 이해하고, 집합을 표현할 수 있다. 집합을 다양한 방식으로 표현하고 관련된 기호를 정확하게 사용할 수 있다. 수학 2112. 두 집합 사이의 포함관계를 기호를 사용하여 나타낼 수 있다. 조건제시법으로 표현된 두 집합 사이의 포함관계를 기호를 사용하여 표현할 수 있다. 수학 2113. 집합의 연산에 대한 성질을 이용하여 집합의 연산을 할 수 있다.
	교육과정	**[확률과 통계] - (가) 순열과 조합 - ① 경우의 수** ① 합의 법칙과 곱의 법칙을 이해하고, 이를 이용하여 경우의 수를 구할 수 있다.
	성취기준· 성취수준	**[확률과 통계] - (1) 순열과 조합 - (가) 경우의 수** 확통1111. 합의 법칙과 곱의 법칙을 적절히 활용하여 경우의 수를 구하고, 그 과정을 설명할 수 있다.
3-5	교육과정	**[수학 Ⅰ] - (다) 도형의 방정식 - ⑤ 부등식의 영역** ① 부등식의 영역의 의미를 이해한다.
	성취기준· 성취수준	**[수학 Ⅰ] - (3) 도형의 방정식 - (마) 부등식의 영역** 수학1351-2. 부등식 $f(x,y) > 0$ 의 영역을 좌표평면 위에 나타내고, 그 과정을 설명

<table>
<tr><th colspan="2">문항 및 제시문</th><th>관련 성취기준</th></tr>
<tr><td rowspan="11"></td><td></td><td>할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>교육과정</td><td>[수학 I] - (다) 도형의 방정식 - ① 평면좌표
① 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>성취기준·성취수준</td><td>[수학 I] - (3) 도형의 방정식 - (가) 평면좌표
수학1311. 수직선과 좌표평면 위에서 두 점 사이의 거리를 구하는 과정을 이해하고, 이를 이용하여 문제를 해결할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>교육과정</td><td>[수학 II] - (가) 집합과 명제 - ① 집합
① 집합의 개념을 이해하고, 집합을 표현할 수 있다.
② 두 집합 사이의 포함 관계를 이해한다.
③ 집합의 연산을 할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>성취기준·성취수준</td><td>[수학 II] - (1) 집합과 명제 - (가) 집합
수학 2111. 집합의 개념을 이해하고, 집합을 표현할 수 있다. 집합을 다양한 방식으로 표현하고 관련된 기호를 정확하게 사용할 수 있다.
수학 2112. 두 집합 사이의 포함관계를 기호를 사용하여 나타낼 수 있다. 조건제시법으로 표현된 두 집합 사이의 포함관계를 기호를 사용하여 표현할 수 있다.
수학 2113. 집합의 연산에 대한 성질을 이용하여 집합의 연산을 할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>교육과정</td><td>[확률과 통계] - (가) 순열과 조합 - ① 경우의 수
① 합의 법칙과 곱의 법칙을 이해하고, 이를 이용하여 경우의 수를 구할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>성취기준·성취수준</td><td>[확률과 통계] - (1) 순열과 조합 - (가) 경우의 수
확통1111. 합의 법칙과 곱의 법칙을 적절히 활용하여 경우의 수를 구하고, 그 과정을 설명할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>교육과정</td><td>[확률과 통계] - (가) 순열과 조합 - ② 순열과 조합
① 순열의 뜻을 알고, 순열의 수를 구할 수 있다.
③ 원순열, 중복순열, 같은 것이 있는 순열을 이해하고, 그 순열의 수를 구할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>성취기준·성취수준</td><td>[확률과 통계] - (1) 순열과 조합 - (나) 순열과 조합
확통1121. 순열의 뜻을 알고, 순열의 수를 구할 수 있다.
확통1123-1. 원순열을 이해하고, 그 순열의 수를 구할 수 있다.</td></tr>
</table>

* 교육과학기술부 고시 제2011-361호 [별책8] “수학과 교육과정”
** 교육과학기술부 발간 “2009 개정 교육과정에 따른 성취기준·성취수준: 고등학교 수학‘ (발간물 등록번호: 11-1341000-002322-01)

나) 자료 출처

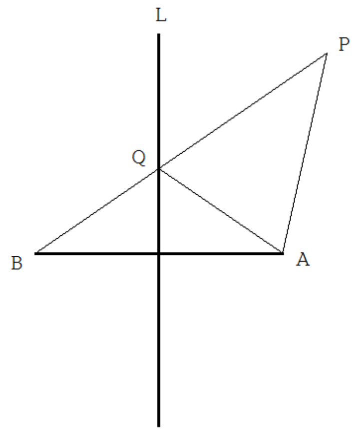
<table>
<tr><th>참고자료</th><th>도서명</th><th>저자</th><th>발행처</th><th>발행 연도</th><th>쪽수</th></tr>
<tr><td rowspan="7">고등학교 교과서</td><td>수학 I</td><td>우정호 외</td><td>동아출판</td><td>2014</td><td>147, 222-229</td></tr>
<tr><td>수학 I</td><td>류희찬 외</td><td>천재교과서</td><td>2014</td><td>136, 202-209</td></tr>
<tr><td>수학 I</td><td>황선욱 외</td><td>좋은책신사고</td><td>2014</td><td>116-117</td></tr>
<tr><td>수학 II</td><td>우정호 외</td><td>동아출판</td><td>2014</td><td>12-28</td></tr>
<tr><td>수학 II</td><td>황선욱 외</td><td>좋은책신사고</td><td>2014</td><td>12-26</td></tr>
<tr><td>확률과 통계</td><td>우정호 외</td><td>동아출판</td><td>2014</td><td>12-18, 26-28, 33-35</td></tr>
<tr><td>확률과 통계</td><td>류희찬 외</td><td>천재교과서</td><td>2015</td><td>14-18, 24-26, 28-29</td></tr>
</table>

문항 해설

평면상의 두 점 A, B가 주어졌을 때, 평면은 A에 더 가까운 점들의 영역과 B에 더 가까운 점들의 영역으로 나누어지고 두 영역의 경계, 즉 A, B로 부터 같은 거리의 점들은 선분 AB의 수직이등분선이다. <문제 3>에서는

먼저 이러한 사항을 이해하는지 묻고, 이를 발전시켜 세 점이 주어졌을 때 평면이 어떤 영역들로 나누어지는지 논리적으로 추론할 수 있는지 평가한다.

3-1. 좌표평면상의 두 점 A, B가 주어졌을 때 A에 더 가까운 점 $P=(x,y)$들의 집합을 구하는 문제이다. 각 점들의 좌표를 이용하여 $\overline{PA}<\overline{PB}$ 을 식으로 나타내면 일차부등식을 얻는다. 이 일차부등식의 영역은 선분 AB의 수직이등분선을 경계로 A쪽 영역임을 알 수 있다. 또는 아래 그림과 삼각부등식(삼각형의 한 변의 길이는 다른 두 변의 길이의 합보다 작다.)을 이용하여 설명할 수도 있다. (예시답안 참조)



3-2. 세 수 a,b,c의 크기를 비교하기 위해서는 두 수씩 즉, a와 b, b와 c, a와 c 세 쌍을 비교하면 된다. 평면상의 세 점 A, B, C가 주어졌을 때 다른 점 P에 대해 $\overline{PA}$, $\overline{PB}$, $\overline{PC}$를 비교하려면 $\overline{PA}$와 $\overline{PB}$, $\overline{PB}$와 $\overline{PC}$, $\overline{PA}$와 $\overline{PC}$를 서로 비교하면 된다. 가령 $\overline{PA}$와 $\overline{PB}$의 비교는 소문항 (1)에 의해 P가 선분 AB의 수직이등분선을 기준으로 A쪽에 있으면 $\overline{PA}<\overline{PB}$이고 B쪽에 있으면 $\overline{PB}<\overline{PA}$이다.

〈문제 3〉의 (그림 1)에서 4번 영역의 점 P는 선분 AB의 수직이등분선을 기준으로 B쪽, 선분 BC의 수직이등분선을 기준으로 C쪽, 선분 AC의 수직이등분선을 기준으로 C쪽에 있으므로 $\overline{PB}<\overline{PA}$, $\overline{PC}<\overline{PB}$, $\overline{PC}<\overline{PA}$ 이다. 즉, 4번 영역의 임의의 점 P에 대해 $\overline{PC}<\overline{PB}<\overline{PA}$ 이다.

소문항 2에서와 같이 세 점이 주어지면 평면을 6개의 영역으로 나눌 수 있다. (그림 2)에서는 세 점 A, B, C의 위치를 나타내지 않고 이와 같이 6개의 영역으로 나누어진 상황만을 제시하였다. 이는 그림에 의존하지 않고 논리적인 추론만으로 소문항 3, 4, 5에 답할 수 있는지 평가하기 위해서이다.

3-3. (그림 2)의 직선들은 (그림에는 표시되어 있지 않은) 삼각형 ABC의 변의 수직이등분선들이다. 소문항 2의 논의를 발전시켜 (그림 2)의 인접한 두 영역의 점들에 대해 $\overline{PA},\overline{PB},\overline{PC}$의 대소 관계가 어떻게 변하는지 추론할 수 있다.

(그림 2)의 경계 상에 있지 않은 점 P에 대해 $\overline{PA},\overline{PB},\overline{PC}$를 각각 a,b,c 라 하자. 서로 다른 세 수 a,b,c를

크기순으로 배열하기 위해서 두 수씩 즉, a와 b, b와 c, a와 c 세 쌍의 대소 관계를 비교하면 되는데 가능한 경우는 아래와 같다.

① $a < b,\ b < c,\ a < c\ \ (\Leftrightarrow a < b < c)$

② $b < a,\ b < c,\ a < c\ \ (\Leftrightarrow b < a < c)$

③ $b < a,\ b < c,\ c < a\ \ (\Leftrightarrow b < c < a)$

④ $b < a,\ c < b,\ c < a\ \ (\Leftrightarrow c < b < a)$

⑤ $a < b,\ c < b,\ c < a\ \ (\Leftrightarrow c < a < b)$

⑥ $a < b,\ c < b,\ a < c\ \ (\Leftrightarrow a < c < b)$

위의 ① ~ ⑥ 이 성립하는 점 P들의 집합은 〈문제 3〉의 제시문에서 주어진 기호에 따르면 각각 $U(A,B,C)$, $U(B,A,C)$, $U(B,C,A)$, ... , $U(A,C,B)$에 해당한다.

(그림 2)의 인접한 두 영역 (가령 2번, 3번 영역)의 경계가 선분 AB의 수직이등분선이라면 두 영역에서 a와 b의 대소 관계는 반대가 되고 b와 c, a와 c의 대소 관계는 변화가 없다. 왜냐하면 두 영역은 선분 BC의 수직이등분선과 선분 AC의 수직이등분선에 대해서는 같은 쪽에 있기 때문이다. 따라서 이 경우 2번 영역이 위에서 ④에 해당한다면, 3번 영역은 ⑤이다.

2번 영역이 ④일 때, 2번, 3번 영역의 경계가 선분 AC의 수직이등분일 수는 없다. 이 경우 3번 영역에서는 ④에서 a와 c의 대소 관계만 반대로 바뀐 $b < a,\ c < b,\ a < c$ 이 성립하는데 이는 $a < c < b < a$가 되어 모순이다.

3-4. (그림 2)의 6개의 영역 중 인접한 두 영역이 어떤 영역에 해당하는지 주어지면 나머지 영역들이 어떤 것인지가 결정된다. 소문항 3의 풀이에 따르면 (그림 2)에서 2번 영역이 위 3의 해설에서 ③에 해당한다면 3번 영역은 ② 또는 ④ 이다. 이때 1번 영역이 ②라고 주어졌다면 3번 영역은 ④ 이다. 즉, 인접한 1, 2번 영역이 무엇인지 주어지면 3번 영역이 무엇인지 정하여진다. 이제 2, 3번 영역이 결정되었으므로 4번 영역이 무엇인지 정하여지고 마찬가지로 나머지 영역들도 결정된다.

3-5. (그림 2)와 같이 평면이 나누어지는 어떤 삼각형 ABC에 대해 1번 영역이 위 3에서 ①에 해당한다고 가정하자. 이 삼각형 ABC의 꼭지점의 이름을 BAC로 바꾼다면 1번 영역은 ②에 해당된다. 실재로 ①에서 a, b, c를 b, a, c로 바꾸면 ②를 얻는다. (예시답안 그림 참조) 이와 같이 삼각형 ABC의 꼭지점의 이름을 바꾸는 것으로 1번 영역은 ① ~ ⑥중 어느 것도 될 수 있다.

이제 1번 영역이 ①에 해당한다면 위 (3)의 풀이에 의하면 2번 영역은 ② 또는 ⑥이어야 한다. 각 경우 나머지 영역은 (4)의 풀이에서와 같이 결정된다. (가령 인접한 1, 2번 영역이 각각 ①, ②이라면 3, 4, 5, 6번 영역은 각각 ③, ④, ⑤, ⑥이 된다.)

위의 두 경우를 조합하면 가능한 모든 배열의 개수는 $6 \times 2 = 12$이다. 실재로 이 12가지 배열을 얻기 위해서는 위와 같이 삼각형 ABC의 꼭지점의 이름을 바꾸는 것과 더불어 이 삼각형을 (그림 2)의 세 직선의 교점(즉, 삼각형의 외심)을 중심으로 180되 회전시키는 것이 필요하다. (예시답안 그림과 해설 참조)

채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
3-1	수식전개(수식을 이용하여 설명할 경우) 또는 논리전개(기하학적 방법을 이용할 경우)가 정확함 (2점)	2
3-2	1 ~ 6번 영역이 각각 무엇에 해당하는지 정확히 나타냄 (+2) 4번 영역에 대한 설명이 정확하고 논리적임 (+3)	5
3-3	답이 정확하고 풀이과정이 논리적임 (4점) 답은 정확하나 풀이과정에 대한 논리적인 설명이 부족함 (0~2점)	4
3-4	답이 정확하고 풀이과정이 논리적임 (4점) 답은 정확하나 풀이과정에 대한 논리적인 설명이 부족함 (0~2점)	4
3-5	답이 정확하고 풀이과정이 논리적임 (5점) 답은 정확하나 풀이과정에 대한 논리적인 설명이 부족함 (0~2점)	5

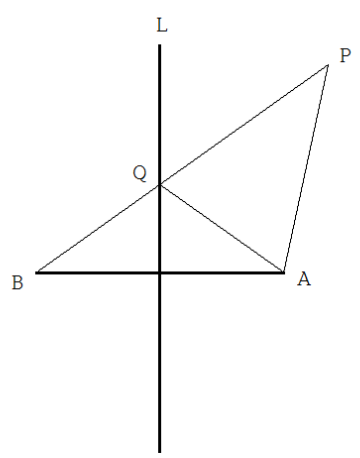
예시 답안

3-1. 주어진 두 점 A, B의 수직이등분선은 y축이다. 좌표평면 상의 점 $P = (x, y)$에 대해

$$\overline{PA} < \overline{PB} \iff \overline{PA}^2 < \overline{PB}^2 \iff (x-a)^2 + y^2 < (x+a)^2 + y^2 \iff -4ax < 0 \iff x > 0$$

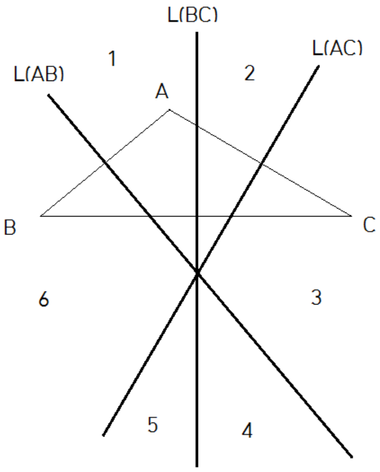
즉, $U(A,B) = \{(x,y) \mid x > 0\}$는 y축 오른쪽의 영역이다.

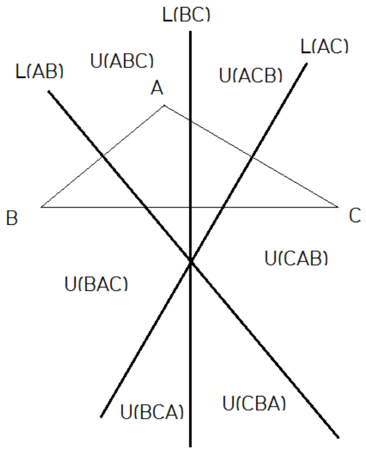
(별해)



점 P가 선분 AB의 수직이등분선 L에 대해 A쪽에 있다하자. 선분 BP와 직선 L의 교점을 Q라 하면 $\overline{QB}=\overline{QA}$ 이다. 삼각형 PQA의 변의 길이에 대한 삼각부등식으로부터 $\overline{PA}<\overline{PQ}+\overline{QA}=\overline{PQ}+\overline{QB}=\overline{PB}$ 를 얻는다. 마찬가지로 점 P가 L에 대해 B쪽에 있다면 $\overline{PB}<\overline{PA}$ 임을 알 수 있다. 따라서 $U(A,B)$는 L에 대해 A쪽 영역이다.

3-2.

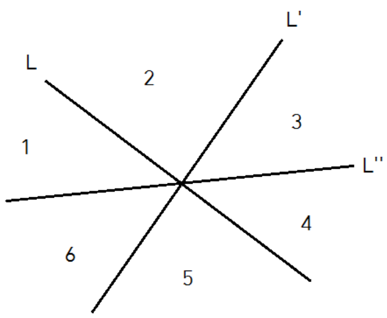




위 왼쪽 그림에서 $L(AB), L(BC), L(AC)$로 표시된 직선은 각각 선분 AB, 선분 BC, 선분 AC의 수직이등분선이다. 그림에서 4번 영역은 $L(AB)$의 B쪽, $L(BC)$의 C쪽이다. 따라서 1에 의해 4번 영역(내부)의 임의의 점 P에 대해 $\overline{PB}<\overline{PA}$, $\overline{PC}<\overline{PB}$이다. 즉, 4번 영역은 $U(C,B,A)$이다. 마찬가지로 나머지 영역은 위 오른쪽 그림과 같음을 알 수 있다.

※ 엄밀히 말하면 위의 설명은 4번 영역이 $U(C,B,A)$에 포함됨을 보인 것이다. 평면의 나머지 1 ~ 3, 5, 6번 부분은 각각 다른 영역에 포함되므로 $U(C,B,A)$는 4번 영역으로 한정됨을 알 수 있다.

3-3.



2번 영역이 $U(C,B,A)$라면 2번 영역의 임의의 점 P에 대해 $\overline{PB}<\overline{PA}$, $\overline{PC}<\overline{PB}$, $\overline{PC}<\overline{PA}$ 이다.

그림에서 세 직선 L, L', L''은 각각 선분 AB, BC, CA의 수직이등분선 중 하나이다. 2, 3번 영역이 선분 AB의 수직이등분선에 대해 같은 쪽에 있다면 두 영역의 점들에서 $\overline{PA}$, $\overline{PB}$의 대소 관계는 변하지 않고, 2, 3번 영역이 선분 AB의 수직이등분선의 반대쪽에 있다면 두 영역의 점들에서 $\overline{PA}$, $\overline{PB}$의 대소 관계는 반대가 된다. 선분 BC, CA의 수직이등분선들에 대해서도 마찬가지로 생각할 수 있다.

2, 3번 영역은 직선 L'에 대해서는 서로 반대쪽에 있고 나머지 두 직선 L, L''에 대해서는 같은쪽에 있다. 따라서 2번과 인접한 3번 영역에서 $\overline{PA}$와 $\overline{PB}$, $\overline{PB}$와 $\overline{PC}$, $\overline{PA}$와 $\overline{PC}$의 세 쌍의 대소관계 중 1개는 반대가 되고, 2개는 변화가 없어야 한다. 즉 3번 영역은 아래 세 가지 경우 중 하나에 해당한다.

① $\overline{PA} < \overline{PB}$, $\overline{PC} < \overline{PB}$, $\overline{PC} < \overline{PA}$

② $\overline{PB} < \overline{PA}$, $\overline{PB} < \overline{PC}$, $\overline{PC} < \overline{PA}$

③ $\overline{PB} < \overline{PA}$, $\overline{PC} < \overline{PB}$, $\overline{PA} < \overline{PC}$

이 중 ③은 모순되는 식이고 ($\overline{PB} < \overline{PA} < \overline{PC} < \overline{PB}$이므로) ①, ②는 각각 $U(C, A, B)$, $U(B, C, A)$에 해당한다.

3-4. 1, 2번 영역이 각각 $U(B, A, C)$, $U(B, C, A)$이라 하자. 3에서와 같이 영역 $U(B, C, A)$에 인접한 3번 영역은 $U(B, A, C)$, $U(C, B, A)$중 하나이어야 하므로 3번 영역은 $U(C, B, A)$이다.

$U(C, B, A)$와 인접한 영역은 $U(B, C, A)$, $U(C, A, B)$중 하나이므로 4번 영역은 $U(C, A, B)$이고, 마찬가지로 $U(C, A, B)$와 인접한 영역은 $U(C, B, A)$, $U(A, C, B)$중 하나이므로 5번 영역은 $U(A, C, B)$이다.

(별해) 4번 영역은 세 직선 L, L', L'' 각각에 대해 1번 영역과 반대편에 있다. 따라서 $\overline{PA}$와 $\overline{PB}$, $\overline{PB}$와 $\overline{PC}$, $\overline{PA}$와 $\overline{PC}$의 세 쌍의 대소관계가 모두 반대가 되어야 한다. 즉, 4번 영역에서 $\overline{PA} < \overline{PB}$, $\overline{PC} < \overline{PB}$, $\overline{PC} < \overline{PA}$ 이므로 4번 영역은 $U(C, A, B)$이다. 마찬가지로 5번 영역은 2번 영역의 "반대편"이므로 $U(A, C, B)$이다.

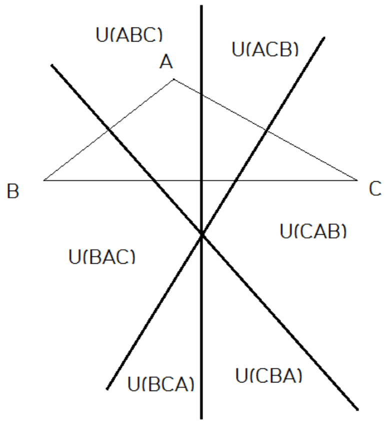
3-5. 1번 영역은 $U(A, B, C), U(A, C, B), \cdots, U(C, B, A)$ 중 어느 것도 될 수 있다. 가령 1번 영역이 $U(A, B, C)$가 되는 평면상의 세 점 A, B, C가 주어졌을 때 두 점 A, B의 위치를 서로 교환하면 1번 영역은 $U(B, A, C)$가 된다. (아래 설명과 그림 참고) 즉, 1번 영역은 하나의 배열로부터 세 점 A, B, C의 위치를 서로 교환함으로써 $U(A, B, C), U(A, C, B), \cdots, U(C, B, A)$중 어느 것도 될 수 있다.

1번 영역이 $U(A, B, C)$가 되는 평면상의 세 점 A, B, C가 주어졌다면 3에서와 같이 2번 영역은 $U(A, C, B)$ 또는 $U(B, A, C)$이다. 1, 2번 영역이 정해지면 4에서와 같이 3 ~ 6번 영역이 모두 결정된다. 따라서 1번 영역이 $U(A, B, C)$인 배열은 최대 2개이다.

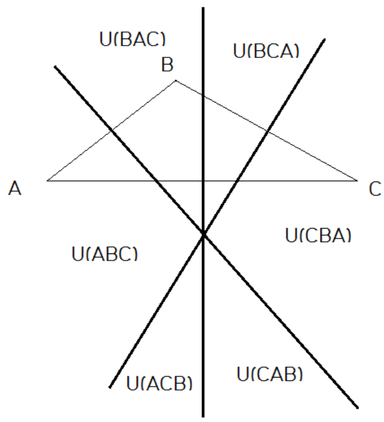
두 배열이 모두 가능함은 다음과 같이 설명할 수 있다. 1번 영역이 $U(A, B, C)$인 배열이 하나는 존재한다. 만약 이 배열에서 2번 영역이 $U(A, C, B)$이라면 세 점 A, B, C에서 A와 C의 위치를 교환하고 세 직선 L, L', L''의 교점 (즉, 삼각형 ABC의 외심)을 중심으로 180도 회전시키면 (즉, 이와 같이 얻은 위치의 세 점 A, B, C에 대해서)

1, 2번 영역은 각각 $U(A,B,C)$, $U(B,A,C)$이다. (아래 설명과 그림 참고) 따라서 가능한 모든 배열의 개수는 $6 \times 2 = 12$ 이다.

※ 특정한 위치의 세 점 A,B,C에 의해 (즉, A,B,C까지 거리의 순서에 의해) (그림2)와 같이 평면이 나누어졌다하자. 세 점 A,B,C의 위치를 서로 교환하면 (또는 세 점의 이름을 바꾸면) 1 ~ 6번 영역이 각각 $U(A,B,C), U(A,C,B), \cdots, U(C,B,A)$ 중 무엇에 해당하는 지가 바뀐다. (또는 1 ~ 6번 영역의 이름이 바뀐다.)
예를 들어 (그림 1)에서 A, B의 위치를 교환하면



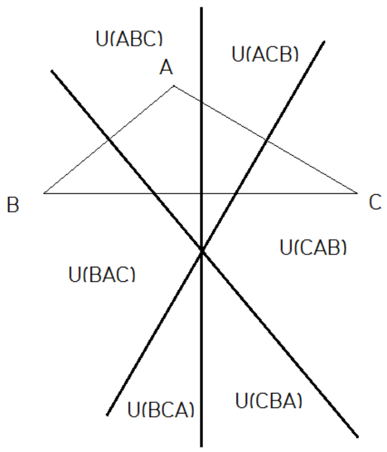
로부터



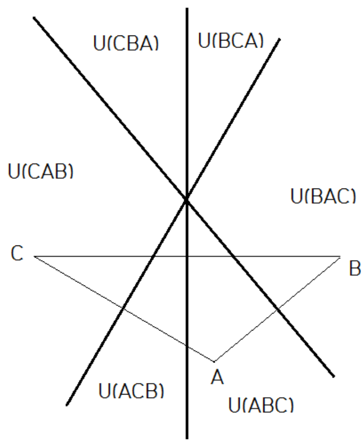
을 얻는다.

이와 같이 세 점 A,B,C의 위치를 교환하여 얻는 경우의 수는 $3!=6$ 이다. 이제 각각의 경우 세 직선의 교점(즉, 삼각형 ABC의 외심)을 중심으로 180도 회전하면 새로운 배열을 얻는다.

예를 들어 (그림 1)에서



로부터



를 얻는다.

따라서 1 ~ 6번 영역에 해당하는 $U(A,B,C), U(A,C,B), \cdots, U(C,B,A)$의 $3! \times 2 = 12$개의 배열을 얻는다.