홍익대학교 2016학년도 수시모집

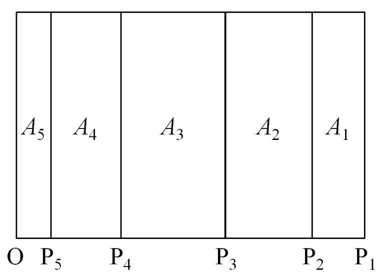
자연계열 논술고사

<유의사항>

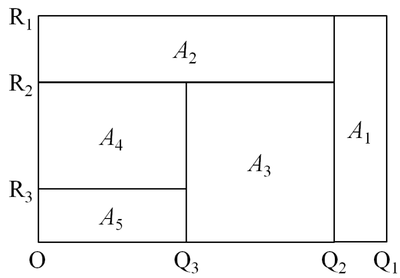
1. 자신을 드러내는 표현이나 불필요한 표시가 있는 답안은 0점으로 처리합니다.
2. 답안은 반드시 청색 볼펜으로만 작성하여야 합니다.
3. 답안을 수정할 경우에도 청색 볼펜만을 사용하여야 합니다. 수정액이나 수정테이프는 사용할 수 없습니다.
4. 본 문제지는 총 4장입니다.
5. 총 3문제가 있으며 문제 1에 20점, 문제 2에 20점, 문제 3에 20점을 배점합니다.
6. 문제 1번은 (1) ~ (4), 문제 2번은 (1) ~ (4), 문제 3번은 (1) ~ (4)로 구성됩니다.

문제 1

직사각형을 주어진 넓이의 비를 가지는 작은 직사각형들로 분할하여 보자. 예를 들어, 비 $A_1 : A_2 : A_3 : A_4 : A_5$가 주어졌을 때, 다음과 같이 두 가지 방법으로 직사각형을 분할하였다. 즉, 아래 그림에서 작은 직사각형들의 넓이의 비는 주어진 비와 같다.



<그림 1>



<그림 2>

<그림 1>의 분할 방법은 세로 방향으로만 분할한 단순한 방법임에 반하여, <그림 2>의 분할 방법은 복합적인 방법이다. 특히 <그림 2>의 분할에서 연속한 세 직사각형들 중(즉, A_k, A_{k+1}, A_{k+2}로 표시된 직사각형들 중) 임의의 두 직사각형은 변의 일부를 공유한다.

(1) <그림 1>에서 선분의 비 $r_1 = \dfrac{\overline{OP_2}}{\overline{OP_1}}$, $r_2 = \dfrac{\overline{OP_3}}{\overline{OP_2}}$, $r_3 = \dfrac{\overline{OP_4}}{\overline{OP_3}}$, $r_4 = \dfrac{\overline{OP_5}}{\overline{OP_4}}$를 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5를 이용하여 나타내어라.

(2) 위 문항 (1)의 r_1, r_2, r_3, r_4와 같은 값을 가지는 선분의 비를 <그림 2>에서 각각 찾고 그 이유를 설명하여라.

(3) 직사각형을 주어진 넓이의 비 $A_1 : A_2 : \cdots : A_n$을 가지는 작은 직사각형들로 분할하여 보자. 단, <그림 2>처럼 밑줄 친 제시문의 성질을 만족하여야 한다. 위 문항 (1)에서 구한 식을 일반화하여 $r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}$을 $A_1, A_2, \ldots, A_n$을 이용하여 정의하고, 이 값들을 이용하여 직사각형을 분할하는 과정을 설명하여라.

(4) 위 문항 (3)에서 $A_1 + A_2 + \cdots + A_n = 1$ 이라 하자. $A_1, A_2, \ldots, A_n$을 $r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}$로 나타내어라.

【출제의도】

직사각형을 주어진 넓이의 비를 가지는 작은 직사각형들로 나누는 과정에 대해 묻고 있다. 길이와 면적의 비의 관계, 도형에서 전체와 부분과의 관계를 파악하고 적용할 수 있는지 평가한다. 먼저 지문에서 가장 단순한 형태로 나누는 방법과 이보다 복잡한 형태로 나누는 방법의 예를 들어 보여주었다. 두 예에서 공통적인 것은 주어진 면적의 비로부터 얻어지는 새로운 비이다. <문제 1>에서는 <그림 1>과 같이 직사각형을 단순히 나누는 방법으로부터 이 새로운 비를 파악하고 이를 이용하여 <그림 2>에서 주어진 것과 같이 나누는 과정을 파악하고 설명할 수 있는지 평가한다.

【문항 (1) - 출제의도 및 해설】

지문의 <그림 1>과 같이 직사각형을 세로 방향으로만 나누었을 때 각 작은 직사각형들은 높이가 같다. 이를 이용하여 문제에서 요구하는 새로운 비를 주어진 면적의 비로부터 계산할 수 있는지 평가한다.

높이가 동일한 직사각형의 면적의 비는 밑변의 길이의 비와 같다. 일직선상에 있는 주어진 여러 점들 - 가령, 문항 (1)에서 점 $O, P_1, P_2, \cdots$ 들 - 사이의 거리의 비를 구하는 문제는 상술한 바와 같이 중학교 1학년 수학 교과서에서 다루고 있다. 역으로 주어진 비를 가지는 점(의 좌표)를 구하는 문제는 고등학교 <수학> 기하 단원 평면좌표 영역에서 다루고 있다.

【문항 (1) - 예시답안】

작은 직사각형들은 모두 높이가 같으므로 면적의 비는 아랫변의 길이의 비와 같다.

따라서 $r_1 = \dfrac{\overline{OP_2}}{\overline{OP_1}} = \dfrac{A_2 + \cdots + A_5}{A_1 + A_2 + \cdots + A_5}$ 이다.

마찬가지로 $k = 1,2,3,4$ 각 경우에 $r_k = \dfrac{\overline{OP_{k+1}}}{\overline{OP_k}} = \dfrac{A_{k+1} + \cdots + A_5}{A_k + A_{k+1} + \cdots + A_5}$ 이다.

【문항 (2) - 출제의도 및 해설】

문항 (1)에서 구한 비를 지문의 <그림 2>에서 다시 면적의 비로 환원함으로써 찾을 수 있는지 평가한다.

문항 (2)에서는 <그림 2>와 같이 직사각형을 좀 더 복잡한 형태로 나누었을 때 면적과 길이의 비의 관계를 묻고 있다. 중학교 <수학> 기하 단원에서 평면도형의 성질을 학습하기 위한 보조교구로서 정사각형을 7개로 나눈 칠교판을 이용한다. 이 조각들 각각 또한 이들로부터 얻을 수 있는 다양한 도형의 면적, 길이의 비를 묻는다. 평면도형을 나눌 때 면적과 길이의 비의 관계는 부채꼴의 면적과 호의 길이, 중심각과의 관계에서도 다룬다. 중학교 <수학> 기하 단원의 입체도형의 성질에서는 이러한 관계를 일반화하여 다양한 입체도형의 부피와 밑면의 넓이, 높이와의 관계에 대해서 다룬다. 가령, 정육면체를 잘라내어 얻을 수 있는 입체도형들의 부피의 비를 묻는다.

【문항 (2) - 예시답안】

(그림 2)에서 A_1으로 표시된 직사각형을 제외한 부분의 면적의 전체 면적에 대한 비는

$r_1 = \dfrac{A_2 + \cdots + A_5}{A_1 + A_2 + \cdots + A_5} = \dfrac{\overline{OQ_2} \cdot \overline{OR_1}}{\overline{OQ_1} \cdot \overline{OR_1}} = \dfrac{\overline{OQ_2}}{\overline{OQ_1}}$ 이다.

이제 남은 직사각형에서 A_2으로 표시된 직사각형을 제외한 부분의 비는

$r_2 = \dfrac{A_3 + \cdots + A_5}{A_2 + A_3 + \cdots + A_5} = \dfrac{\overline{OR_2} \cdot \overline{OQ_2}}{\overline{OR_1} \cdot \overline{OQ_2}} = \dfrac{\overline{OR_2}}{\overline{OR_1}}$ 이다.

마찬가지로 계속하면 $r_3 = \dfrac{\overline{OQ_3}}{\overline{OQ_2}}$, $r_4 = \dfrac{\overline{OR_3}}{\overline{OR_2}}$ 이다.

【문항 (3) - 출제의도 및 해설】

문항 (1), 문항 (2)에서 구한 식과 과정을 일반화하여 직사각형을 지문의 <그림 2>와 같은 형태로 주어진 면적의 비를 가지는 임의의 개수의 작은 직사각형으로 나누는 방법을 구하고 설명할 수 있는지 평가한다.

한 과정을 거친 후 그 결과에 동일한 방법을 다시 적용하는 것이므로 수열의 귀납적 정의 방법과 유사하다. 또한 원하는 결과를 얻기 위한 과정을 단계별로 명확히 서술하는 것은 수열 단원의 알고리즘과 순서도 영역에서 학습한다. 상술한 교과서의 문제는 이 문항과 유사하게 직사각형을 나누는 과정에 대한 알고리즘을 묻는다.

【문항 (3) - 예시답안】

각 $k = 1, 2, \ldots, n-1$에 대해 $r_k = \dfrac{A_{k+1} + \cdots + A_n}{A_k + A_{k+1} + \cdots + A_n}$ 라 하자.

직사각형의 오른쪽 아래 꼭지점, 왼쪽 위 꼭지점, 왼쪽 아래 꼭지점을 각각 Q_1, R_1, O 라 하고

직사각형의 아랫변과 왼쪽변에 점 $Q_2, Q_3, \ldots$와 $R_2, R_3, \ldots$를 다음의 비에 따라 표시한다.

$r_1 = \dfrac{\overline{OQ_2}}{\overline{OQ_1}}$, $r_2 = \dfrac{\overline{OR_2}}{\overline{OR_1}}$, $r_3 = \dfrac{\overline{OQ_3}}{\overline{OQ_2}}$, $r_4 = \dfrac{\overline{OR_3}}{\overline{OR_2}}$, $r_5 = \dfrac{\overline{OQ_4}}{\overline{OQ_3}}$, $r_4 = \dfrac{\overline{OR_4}}{\overline{OR_3}}$, $\ldots$

먼저 직사각형을 Q_2에서 세로로 나누고 꼭지점 O를 포함하지 않는 부분을 A_1이라 표시한다. 남은 직사각형을 R_2에서 가로로 나누고 꼭지점 O를 포함하지 않는 부분을 A_2이라 표시한다. 이를 반복한다. 마지막에 O를 포함하는 부분을 A_n이라 표시한다.

(별해) 각 $k = 1, 2, \ldots, n-1$에 대해 $r_k = \dfrac{A_{k+1} + \cdots + A_n}{A_k + A_{k+1} + \cdots + A_n}$ 라 하자.

직사각형을 먼저 세로로 r_1의 비에 따라 A_1과 O를 포함하는 나머지 부분으로 나눈다. 나머지 부분을 가로로 r_2의 비에 따라 A_2와 O를 포함하는 나머지 부분으로 나눈다. 나머지 부분을 세로로 r_3의 비에 따라 A_3와 O를 포함하는 나머지 부분으로 나눈다. 이 과정을 r_{n-1}까지 반복한 후 O를 포함하는 나머지 부분이 A_n이다.

【문항 (4) - 출제의도 및 해설】

문항 (3)에서 직사각형을 나누는 과정에서 주어진 면적의 비로부터 문항 (1)에서와 같이 구한 비를 이

용한다. 문항 (4)에서는 역으로 면적의 비를 이러한 비로 나타낼 수 있는지 평가한다.

【문항 (4) - 예시답안】

$r_1 = A_2 + \cdots + A_n$, $r_1 r_2 = A_3 + \cdots + A_n$ 이고 일반적으로 $k = 1, 2, \ldots, n-1$ 에 대해

$r_1 r_2 \cdots r_k = A_{k+1} + \cdots + A_n$ 이다. 따라서

$A_1 = (A_1 + \cdots + A_n) - (A_2 + \cdots + A_n) = 1 - r_1$,

$A_2 = (A_2 + \cdots + A_n) - (A_3 + \cdots + A_n) = r_1 - r_1 r_2 = r_1(1 - r_2)$이고 일반적으로

$A_k = (A_k + \cdots + A_n) - (A_{k+1} + \cdots + A_n) = r_1 r_2 \cdots r_{k-1} - r_1 r_2 \cdots r_k = r_1 r_2 \cdots r_{k-1}(1 - r_k)$이다.

【채점기준】

1. 풀이 과정이 구체적이며 각 문항에서 요구하는 정확한 답 또는 수식 얻은 경우 만점이다.
2. 문제에서 요구하는 답에 이르는 설명이 부족한 경우 감점한다.
3. 각 문항의 풀이는 맞으나 계산에서 실수가 있는 경우 감점한다.
4. 풀이과정은 수식 및 명확한 서술로 설명되어야 한다.

문제 2

홍익대학교 와우 공학관에는 1층부터 5층까지 운행하는 승강기[엘리베이터] 두 대가 나란히 설치되어 있다. A 승강기(고속)는 각 층마다 정차할 수 있고, B 승강기(저속)는 짝수 층에는 정차하지 않고 홀수 층에만 정차할 수 있다. A와 B 승강기는 중간층에 대기하는 이용자가 없을 경우 그 층에는 정차하지 않는다. 3층에서 승차하려는 이용자는 A와 B 승강기 중 먼저 도착하는 승강기에 탑승하고, 이때 뒤따르는 승강기는 3층에 정차하지 않는다.

A 승강기는 한 층을 이동하는 데 시간이 1초가 걸리고 B 승강기는 두 층을 이동하는 데 3초가 소요된다. A와 B 승강기가 한 층에 도착하여 문이 열린 후 닫히고 다시 출발할 때까지 12초가 소요되며, 이 시간을 이용자가 임의로 연장하거나 단축시킬 수 없고 이 시간 내에 모든 이용자가 승하차한다. 예를 들어, B 승강기가 1층을 출발하여 중간에 한 번 정차하고 5층에 도착하는 순간까지의 소요시간은 $3 + 12 + 3 = 18$초이다.

두 승강기가 1층을 출발할 때, 2층에서 5층으로 이동하려는 이용자가 2층에서 대기하고 있을 확률은 $\frac{1}{3}$이고 3층에서 5층으로 이동하려는 이용자가 3층에서 대기하고 있을 확률은 $\frac{1}{4}$이다. 이 두 사건은 서로 독립이며, 그 이외의 사건은 발생하지 않는다.

(1) A와 B 승강기가 1층에서 5층으로 동시에 출발할 때, A 승강기가 3층에 먼저 도착할 확률을 구하여라.

(2) A와 B 승강기가 1층에서 5층으로 동시에 출발할 때, A 승강기가 5층에 먼저 도착할 확률을 구하여라.

(3) A와 B 승강기가 1층에서 5층으로 동시에 출발할 때, 각 승강기가 1층에서 출발하는 순간부터 5층에 도착하는 순간까지의 소요 시간의 기댓값을 각각 구하여라.

(4) 두 명이 각각 다른 승강기를 타고 1층에서 동시에 출발하여 5층에 먼저 도착하는 시합을 할 때, A와 B 승강기 중 어느 승강기를 선택한 사람이 유리한지 설명하여라.

【출제의도】
실생활에서 승강기를 탈 때 접하는 상황을 단순화하여 제시하였다. 확률과 기댓값을 구할 수 있는지 평가한다. 먼저 한 건물에 나란히 설치되어 있는 두 승강기의 운행방식, 소요시간 등을 설명하고 중간층에서 대기하고 있는 승객이 있을 확률을 주었다. 일층에서 동시에 출발한 두 승강기 중 특정한 하나가 꼭대기 층에 먼저 도착할 확률과 각 승강기의 전체 소요시간의 기댓값을 묻는다. 사건과 여사건의 확률, 확률의 덧셈정리, 독립 사건, 조건부 확률, 확률의 곱셈정리, 기댓값 등을 이해하고 적용, 계산할 수 있는지 평가한다. 또한 꼭대기 층에 먼저 도착할 확률이 높다는 것과 소요시간의 기댓값이 작다는 것의 차이를 이해하는지 묻는다.

【문항 (1) - 출제의도 및 해설】
일층에서 동시에 출발한 두 승강기 중 특정한 하나가 3층에 먼저 도착할 확률을 구할 수 있는지 평가한다. 제시문의 조건으로부터 각 사건(2층에 승객이 대기하고 있는 경우와 아닌 경우)에 따른 승강기의 운행 소요시간을 계산하고 사건과 여사건의 확률을 구할 수 있는지 평가한다.
사건 A가 일어날 확률이 $\mathrm{P}(A)$일 때, 사건 A가 일어나지 않을 확률은 $1-\mathrm{P}(A)$임을 다루고 있다. 이것은 이용자가 2층에서 대기하고 있을 확률이 $\frac{1}{3}$일 때, 이용자가 2층에서 대기하고 있지 않을 확률은 $1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$을 구하는데 활용한다. 고교과정에서 '여사건의 확률' 부분에 해당한다.

【문항 (1) - 예시답안】
B 승강기는 2층에 정차하지 않으므로 1층에서 3층까지 소요시간은 항상 3초이다.
A 승강기는 2층에 정차하지 않으면 1층부터 3층까지 소요시간이 2초, 2층에 정차하면 1초+12초+1초=14초이다. 따라서 A 승강기가 B 승강기보다 3층에 먼저 도착하는 확률은 2층에 대기자가 없을 경우의 확률이며 이는 $1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$이다.

【문항 (2) - 출제의도 및 해설】
일층에서 동시에 출발한 두 승강기 중 특정한 하나가 꼭대기 층에 먼저 도착할 확률을 구할 수 있는지 평가한다. 문항 (1)과 유사하나 이 문항에서는 두 사건(2, 3층에 승객이 대기하고 있는 경우)과 그 여사건의 조합에 대한 각 경우의 소요시간과 확률을 계산하여야 한다. 독립 사건의 의미를 알고 확률의 곱셈정리를 적용할 수 있는지 평가한다.
문항 (2)에서는 조건에 따라 경우의 수를 먼저 나누고, 각각의 확률을 다루고 있다. 두 사건 A, B에 대하여 다음 4가지로 나누어 생각할 수 있다.

① 두 사건 A와 B가 모두 일어나는 경우는 $A\bigcap B$

② 사건 A는 일어나고 B는 일어나지 않는 경우는 $A\bigcap B^{C}$

③ 사건 A는 일어나지 않고 B는 일어나는 경우는 $A^C \cap B$

④ 두 사건 A와 B가 모두 일어나지 않는 경우는 $A^C \cap B^C$

이 4가지 사건은 모두 서로 소이다.

또한, 두 사건 A와 B가 서로 독립이면 $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이다.

고교과정에서 '조건부확률에서 사건의 독립' 부분에 해당한다.

【문항 (2) - 예시답안】

가능한 아래의 4가지 경우에 대해 각각 확률과 승강기 운행 총소요시간을 계산하면

① 2층, 3층에 모두 대기자가 없는 경우 (확률: $1-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$)

A 승강기: 1초+1초+1초+1초=4초

B 승강기: 3초+3초=6초

A 승강기 먼저 5층 도착

② 2층에만 대기자가 있는 경우 (확률: $\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$)

2층에 정차할 수 있는 승강기는 A뿐이므로 2층에서 대기하는 이용자는 모두 승강기 A를 이용한다.

A 승강기: 1초+12초+1초+1초+1초=16초

B 승강기: 3초+3초=6초

B 승강기 먼저 5층 도착

③ 3층에만 대기자가 있는 경우 (확률: $\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{6}$)

1층에서 동시에 출발하고 2층에 대기자가 없으면 A 승강기는 1초+1초=2초 후에 3층에 도착하며 B 승강기는 3층에 3초 후에 도착한다. 따라서 3층에 대기하고 있는 이용자는 모두 A 승강기를 이용하고, 이후 대기 승객이 없으므로 B 승강기는 3층에 멈추지 않고 5층까지 이동한다.

A 승강기: 1초+1초+12초+1초+1초=16초

B 승강기: 3초+3초=6초

B 승강기 먼저 5층 도착

④ 2층, 3층에 모두 대기자가 있는 경우 (확률: $\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$)

2층에 정차할 수 있는 승강기는 A 승강기뿐이므로 A 승강기가 2층에 정차하여 2층 대기자가 승차하고, 3층에는 B 승강기가 먼저 도착하여 3층 대기자는 모두 B 승강기에 승차한다. 따라서 A 승강기는 2층에 한번, B 승강기는 3층에 한번 정차한다.

A 승강기: 1초+12초+1초+1초+1초=16초

B 승강기: 3초+12초+3초=18초

A 승강기 먼저 5층 도착

따라서 A 승강기가 5층에 먼저 도착하는 경우는 ①과 ④이며 그 확률은 $\frac{1}{2}+\frac{1}{12}=\frac{7}{12}$이다.

【문항 (3) - 출제의도 및 해설】

일층에서 동시에 출발한 두 승강기가 꼭대기 층에 도착할 때까지 각 경우에 따른 확률과 소요시간을 구하여 각 승강기의 전체 소요 시간의 기댓값을 구할 수 있는지 평가한다.

문항 (3)에서는 이산 확률변수 X에 대하여 확률분포가 다음 표와 같을 때

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	계
$\mathrm{P}(X=x)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	1

확률변수 X의 기댓값 $\mathrm{E}(X)=x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n$ 을 다룬다.
고교과정에서 '이산 확률변수의 평균' 부분에 해당한다.

【문항 (3) - 예시답안】

A 승강기 소요시간 기댓값: $4\times\frac{1}{2}+16\times\frac{1}{4}+16\times\frac{1}{6}+16\times\frac{1}{12}=10$초

B 승강기 소요시간 기댓값: $6\times\frac{1}{2}+6\times\frac{1}{4}+6\times\frac{1}{6}+18\times\frac{1}{12}=7$초

【문항 (4) - 출제의도 및 해설】

문항 (2), 문항 (3)의 결과로부터 꼭대기 층에 먼저 도착할 확률이 높다는 것과 전체 소요시간의 기댓값이 작다는 것의 차이를 이해하는지 평가한다.

문항 (4)에서는 두 사람 '갑'과 '을'이 시합을 할 때(비기는 경우는 없다고 할 때), '갑'이 이길 확률이 p이면 '을'이 이길 확률은 $1-p$임을 다루고 있다. 선택의 문제에 있어서는 확률이 높은 것을 선택하는 것이 유리하다.

【문항 (4) - 예시답안】

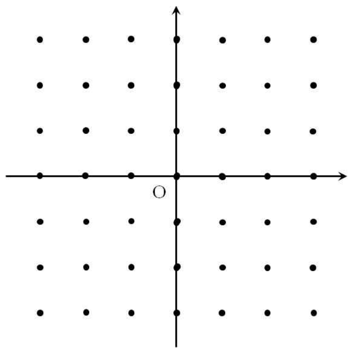
문항 (2) 풀이에 의하면 A 승강기가 5층에 먼저 도착하는 경우의 확률이 $\frac{7}{12}$, B 승강기가 5층에 먼저 도착하는 경우의 확률이 $\frac{5}{12}$이므로 A 승강기를 선택하는 것이 유리하다.

【채점기준】

1. 풀이 과정이 논리적이고 문항에서 요구하는 답이 맞은 경우 만점이다.
2. 최종적인 답을 얻지 못하였어도 중간 과정까지의 풀이가 맞는 경우 부분점수를 부여한다.
3. 문항 (4)의 경우 답은 맞더라도 설명이 부정확한 경우 맞는 답안으로 인정하지 않는다.

문제 3

좌표평면의 점 (a,b)에 대해 a와 b가 둘 다 정수인 점들을 생각하자.



양의 실수 x에 대해, 이러한 점들 중 원점 O에서의 거리가 x 이하인 점들의 개수를 $F(x)$라 하자. 예를 들어, $F(1)=5, F(\sqrt{3})=9, F(3)=29$ 이다.

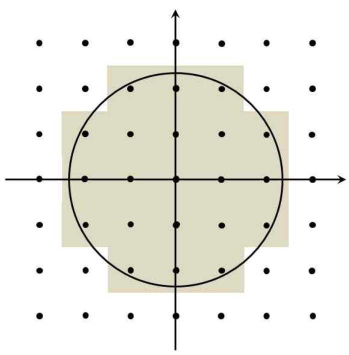
(1) 임의의 양의 실수 x에 대해, $F(x)$를 4로 나눈 나머지는 항상 1임을 설명하여라.

(2) $F(\sqrt{115})=357$ 이다. $F(\sqrt{116})$의 값을 구하여라.

(3) 아래 그림을 참고하여 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 이상의 임의의 실수 x에 대해

$$\pi\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \le F(x) \le \pi\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

이 성립함을 설명하여라.



(4) $\lim_{x\to\infty}\frac{F(x)}{x^2}$의 값을 구하여라.

【출제의도】

두 좌표가 모두 정수인 좌표평면의 점으로서 원점으로부터 거리가 주어진 변수값 이하인 점들의 개수를 함숫값으로 가지는 함수에 대해서 다음을 파악하고 설명할 수 있는지 평가한다.

① 주어진 함수의 함숫값은 기하학적으로는 원점을 중심으로 하는 주어진 원의 내부와 그 경계 상의 정수좌표 점들의 개수이다.
② 원의 내부의 한 점이 주어졌을 때, 적당한 대칭이동을 통해 원의 내부의 다른 점들을 대응시킬 수 있다.
③ 함수가 증가하는 변수값을 찾고 함숫값의 증분을 계산한다.
④ 지문에서 제시한 바와 같이 원과 단위 정사각형들로 이루어진 영역의 면적을 비교함으로써 부등식을 얻는다.
⑤ 부등식을 이용하여 극한값을 구한다.

【문항 (1) - 출제의도 및 해설】

원점을 제외한 좌표평면 상의 정수좌표 점들의 집합은 좌표축을 포함하여 각 사분면에 포함되는 점들로 사분할 수 있다. 원의 대칭성으로부터 이들 사분한 점들이 동일한 개수씩 원의 내부와 경계에 포함된다. 이로부터 주어진 함숫값을 4로 나눈 나머지에 대한 결론을 이끌어 낼 수 있는지 평가한다.

고등학교 <수학> 기하 단원 부등식의 영역에서는 부등식 $(x-a)^2+(y-b)^2<$ (또는 $\leq$) r^2의 영역의 의미와 이를 좌표평면 상에 나타내는 것에 대해 학습한다. 이로부터 지문에서 주어진 함수 $F(r)$는 좌표평면에서 원점을 중심으로 반지름 r인 원의 내부(경계를 포함)의 점들 중 두 좌표가 모두 정수인 점들의 개수임을 알 수 있다.

고등학교 <수학> 기하 단원 도형의 이동에서는 좌표평면에서 원점, x축, y축, 직선 $y=x$에 대한 대칭이동의 의미와 식에 대해서 학습한다. 또한 고등학교 <기하와 벡터> 일차변환과 행렬 단원에서는 회전이동에 대해 학습한다. 원 내부의 한 점이 주어지면 이들 대칭이동에 의해 다른 점을 대응시킬 수 있다.

【문항 (1) - 예시답안】

$F(x)$는 좌표평면에서 중심이 원점이며 반지름이 x인 원 안에 포함된 정수 순서쌍의 개수와 같다. 원점을 제외한 임의의 한 점이 이러한 원 안에 포함되면, 90°씩 회전하여 나타나는 4개의 점들이 동시에 포함된다. 그러므로 원점을 제외하면 원 안에 포함된 점의 개수는 4의 배수이다. 원점은 항상 포함되므로 총 개수를 4로 나눈 나머지는 1이다.

(별해1) 중심이 원점이며 반지름이 x인 원 안에 원점 $(0,0)$은 항상 포함된다. 원점이 아닌 x축 또는 y축 위의 점들은 원점에서의 거리가 같은 4개가 동시에 포함된다. 그 이외의 점 (m,n)이 포함되면 부호를 바꾼 순서쌍 4개 $(m,n), (m,-n), (-m,n), (-m,-n)$가 역시 모두 포함된다. 그러므로 이러한 정수 순서쌍들의 총 개수를 4로 나눈 나머지는 1이다.

(별해2) 정수 순서쌍 (m,n)이 중심이 원점이며 반지름이 x인 원 안에 포함되면 집합 $S=\{(m,n), (m,-n), (-m,n), (-m,-n), (n,m), (n,-m), (-n,m), (-n,-m)\}$ 안의 모든 순서쌍들 역시 포함된다. 집합 S의 원소의 개수는 $(m,n)=(0,0)$일 때 1개, 그 외 (m,n)이 x축, y축, 직선 $y=x$ 또는 $y=-x$위에 있는 경우 4개, 그 외의 경우 8개이다. 원점을 제외하면 원 안에 포함된 점의 개수는 4의 배수이므로, 총 개수를 4로 나눈 나머지는 1이다.

【문항 (2) - 출제의도 및 해설】

주어진 함수의 기하학적 의미로부터 함숫값이 어떤 변수값에서 증가하는지, 이 때 함수값은 얼마나 증가하는지 파악하고 계산할 수 있는지 평가한다.

함수 $F(r)$의 기하학적 의미와 원점과 정수좌표점 사이의 거리의 제곱은 0 이상의 정수라는 사실로부터 $F(\sqrt{115})$와 $F(\sqrt{116})$의 차이는 원점을 중심으로 반지름 $\sqrt{116}$인 원 위의 정수좌표점들의 개수,

즉 $x^2+y^2=116$인 정수의 순서쌍 (x,y)의 개수임을 알 수 있다. 문항 (1)의 풀이과정에서 파악한 좌표 평면의 대칭성을 이용하여 쉽게 계산할 수 있다. 가령, $116=100+16=10^2+4^2$으로부터 $(4,10), (-4,10), (4,-10), (-4,-10), (10,4), (-10,4), (10,-4), (-10,-4)$와 같이 원 $x^2+y^2=116$ 위에 있는 여덟 개의 정수 좌표점을 찾을 수 있다.

【문항 (2) - 예시답안】

$F(\sqrt{115})$은 $m^2+n^2 \le 115$인 모든 정수 순서쌍 (m,n)의 개수이며, $F(\sqrt{116})$은 $m^2+n^2 \le 116$인 모든 정수 순서쌍 (m,n)의 개수이다. 이때 m^2+n^2의 값은 항상 정수이므로, $115 < m^2+n^2 < 116$인 순서쌍 (m,n)은 존재하지 않는다. 따라서 $F(\sqrt{116})$에 새로 추가되는 점들은 $m^2+n^2=116$인 정수 순서쌍의 개수이다. 이를 구하기 위해 116이 언제 두 제곱수의 합으로 나타나는지 살펴보자. $116 < 11^2$이므로 10^2이하의 제곱수의 집합 $\{0^2, 1^2, 2^2, \cdots, 10^2\} = \{0, 1, 4, \cdots, 100\}$을 고려하면 충분하다. 이들 중 두 제곱수의 합이 116이 되는 경우는 $116=16+100=100+16$밖에 없다. 그러므로 $m^2+n^2=116$인 정수 순서쌍은 제1사분면에 $(4,10), (10,4)$ 두 개가 있고, 나머지 사분면에도 두 개씩 있으므로 총 8개 (즉, $(4,10), (-4,10), (4,-10), (-4,-10), (10,4), (-10,4), (10,-4), (-10,-4)$)이다. 그러므로 $F(\sqrt{116}) = F(\sqrt{115}) + 8 = 365$이다.

【문항 (3) - 출제의도 및 해설】

지문에서 제시한 바와 같이 원의 내부와 경계 상의 정수좌표 점들을 중심으로 하는 단위 정사각형들로 이루어진 도형을 고려하여 이 도형의 면적이 함수값과 일치함을 파악하고. 이 도형을 포함하는 원, 이 도형에 포함된 원의 면적을 비교하여 부등식을 얻을 수 있는지 평가한다.

평면에서 포함관계에 있는 영역들의 면적을 비교함으로써 부등식을 증명하는 예는 교과서에서 찾아볼 수 있다. 상술한 교과서의 예에서는 두 삼각형과 부채꼴의 면적을 비교함으로써 $0 < x < \frac{\pi}{2}$일 때, $\sin x < x < \tan x$이 성립함을 보이고 있다. 문항 (3)에서는 제시된 부등식은 $\pi\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \le F(x) \le \pi\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$ 이다. 첫 째 항과 셋 째 항은 원의 면적임을 쉽게 볼 수 있다. 문항 (3)에서 제시한 그림을 참고하여 $F(x)$를 면적으로 가지는 단위정사각형들로 이루어진 영역을 위의 두 원과 비교함으로써 부등식이 성립함을 볼 수 있다.

【문항 (3) - 예시답안】

주어진 그림과 같이 중심이 원점이며 반지름이 x인 원 안에 포함된 정수 순서쌍 (m,n)에 그 점을 중심으로 갖는 단위면적의 정사각형과의 일대일 대응을 고려하면, 색칠된 영역은 이 정사각형들의 합집합이므로 $F(x)$와 넓이가 같다. 색칠된 영역에 있는 임의의 점 (a,b)는 원점으로부터의 거리가 x이하인 어떤 정수 순서쌍 (m,n)을 중심으로 갖는 단위 정사각형에 포함되므로 (m,n)과 (a,b)사이의 거리는 $\frac{\sqrt{2}}{2}$이하이다. 삼각형의 한 변의 길이는 나머지 두 변의 길이의 합 이하이므로 (a,b)와 원점 사이의 거리는 $x+\frac{\sqrt{2}}{2}$이하이다. 즉, 색칠된 영역은 반지름 $x+\frac{\sqrt{2}}{2}$인 원 안에 포함되므로, 두 넓이를 비교하면 $F(x) \le \pi\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$를 얻는다. 비슷하게, 색칠된 영역에 포함되지 않은 임의의 점 (c,d)는 원점으로부터의 거리가 x보다 큰 어떤 정수 순서쌍 (m,n)을 중심으로 갖는 단위 정사각형에 포함되고, 역

시 (m,n)과 (c,d)사이의 거리는 $\frac{\sqrt{2}}{2}$이하이다. 그러므로 (c,d)와 원점 사이의 거리는 $x-\frac{\sqrt{2}}{2}$보다 크다. 즉, 반지름 $x-\frac{\sqrt{2}}{2}$인 원은 색칠된 영역에 포함되므로 $\pi\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \leq F(x)$ 이다.

【문항 (4) - 출제의도 및 해설】
 문항 (3)에서 구한 부등식을 이용하여 함수의 극한값을 계산할 수 있는지 평가한다. 고등학교 <수학 II> 함수의 극한과 연속 단원에서 극한의 성질에 대해 학습한다. 특히 상술한 함수의 극한의 대소 관계와 문항 (3)의 결과로부터 문항 (4)의 함수의 극한값을 구할 수 있다.

【문항 (4) - 예시답안】
$x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$일 때, 위 문항에서 구한 부등식 $\pi\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \leq F(x) \leq \pi\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$ 으로부터 부등식 $\pi\frac{(x-\sqrt{2}/2)^2}{x^2} \leq \frac{F(x)}{x^2} \leq \pi\frac{(x+\sqrt{2}/2)^2}{x^2}$을 얻는다. $x \to \infty$일 때 부등식의 좌, 우 항이 모두 π로 수렴하므로 $\frac{F(x)}{x^2}$도 π로 수렴한다.

【채점기준】
1. 풀이과정이 논리적이고 문제에서 요구하는 답이 맞은 경우 만점이다.
2. 각 문항에서 논리적인 기술이 부족한 경우 감점한다.
3. 각 문항의 풀이는 맞으나 계산에서 실수가 있는 경우 감점한다.