자연계열 논술고사 (서울 캠퍼스)

문제 1

좌표평면 위의 직선 ℓ은 다음과 같이 두 가지 방법으로 표현할 수 있다.

(가) 적당한 상수 a, b, c 에 대해 $\ell : ax + by + c = 0$

(나) 적당한 벡터 $\vec{u}, \vec{v}$ 에 대해 $\ell : \vec{p} = \vec{u} + t\vec{v}$ (t는 실수)

(가)에서 a, b, c가 모두 유리수인 식으로 직선 ℓ을 나타낼 수 있으면 ℓ을 <u>유리직선</u>이라 부르자. 예를 들면 직선 $\sqrt{2}x + \sqrt{2}y + 3\sqrt{2} = 0$은 $x + y + 3 = 0$으로 나타낼 수 있으므로 유리직선이다.

좌표평면에서 좌표가 모두 정수인 점을 <u>격자점</u>이라고 한다. 좌표평면 위의 주어진 직선이 몇 개의 격자점을 지나는지 생각해 보자. 예를 들면 직선 $x - y = 0$ 은 무한히 많은 격자점을 지나는 반면, 직선 $x + y - \sqrt{2} = 0$ 은 격자점을 하나도 지나지 않음을 알 수 있다.

(1) 두 직선 $4x + 3y + \frac{7}{3} = 0$과 $x + \sqrt{2}y + 3 = 0$ 위에 있는 격자점의 개수를 각각 구하고 그 과정을 설명하시오.
(2) 격자점을 하나라도 지나는 유리직선은 무한히 많은 격자점을 지남을 보이시오.
(3) 서로 다른 두 격자점 (x_1, y_1)과 (x_2, y_2)를 지나는 직선은 무한히 많은 격자점을 지난다는 것을 보이시오.
(4) 무한히 많은 격자점을 지나는 직선은 유리직선임을 보이시오.

【출제 의도】

좌표평면 위의 직선을 표현하는 방법을 소개하고, 직선이 좌표평면에서 좌표가 모두 정수인 격자점을 지난다는 조건은 직선을 표현하는 식에 어떻게 드러나는지 묻고 있다. 정수 및 유리수의 성질과 기하학적 도형들과의 관계를 이해하고, 논리적으로 설명할 수 있는지 묻는 문제이다. 각 소문항의 출제 의도는 다음과 같다.

(1) 주어진 직선이 격자점을 지난다고 가정할 때, 정수, (정수가 아닌) 유리수, 무리수를 구분하여 결론을 유도하는 문제이다. 또한 격자점을 지나지 않는 유리 직선의 예를 제시하고 있다.
(2) 직선을 나타내는 일차방정식과 직선상의 한 점이 주어졌을 때, 식의 계수와 점의 좌표로부터 직선상의 임의의 점을 나타내는 식을 구하고 이 중 격자점을 찾는 문제이다.
(3) 직선상의 두 점이 주어졌을 때, 직선상의 다른 점들을 (벡터방정식 등을 이용하여) 구하고 이를 이용하여 주어진 두 점이 격자점일 경우 직선상에 격자점이 무한히 많이 존재함을 보이는 문제이다.
(4) 두 점을 지나는 직선의 식을 이용하여 적어도 두 격자점을 지나는 직선은 계수와 상수가 유리수인 일차식으로 나타낼 수 있음을 보이는 문제이다.

【예시 답안】

(1) 직선 $4x+3y+\frac{7}{3}=0$ 위의 격자점의 개수는 0 개

이 직선이 격자점 (n,m)을 지난다면 $\frac{7}{3}=-(4n+3m)$이 되어 기약분수 $\frac{7}{3}$이 정수라는 결론이 되어 모순이다.

직선 $x+\sqrt{2}y+3=0$ 위의 격자점의 개수는 1 개

이 직선이 격자점 (n,m) 을 지난다 할 때, $m=0$이면 $n=-3$이므로 격자점 $(-3,0)$을 지난다. 반면, $m\neq 0$이라면 $\sqrt{2}=-\frac{n+3}{m}$이 되어 무리수 $\sqrt{2}$가 유리수라는 결론이 되어 모순이다.

첫 번째 직선에 대한 별해

(별해 1) 첫 번째 직선의 식은 $12x+9y=-7$이다. x,y가 정수인 경우 좌변은 3의 배수이나 우변은 3의 배수가 아니므로 모순이다.

(별해 2) 첫 번째 직선의 식은 $y=-\frac{12x+7}{9}$이므로 $12x+7$이 9의 배수인 정수 x가 이 직선 위의 격자점에 대응된다. $x=3k, 3k+1, 3k+2$ (k는 정수)일 때 (즉 x를 3으로 나눈 나머지가 각각 0, 1, 2인 경우) $12x+7=36k+7, 36k+19, 36k+31$은 9로 나눈 나머지가 각각 7, 1, 4이므로 9의 배수가 될 수 없고 따라서 이 직선은 격자점을 지나지 않는다.

(별해 3) (별해 2)에서와 마찬가지로 $x=-\frac{9y+7}{12}$ 에서 y가 4로 나누어 0, 1, 2, 3이 남는 정수일 때, $9y+7$은 12로 나누어 각각 7, 4, 1, 10이 남는 정수이므로 x는 정수일 수 없다.

(2) 유리직선 $ax+by+c=0$ (상수 a,b,c는 유리수)이 격자점 (x_0,y_0)를 지난다 하자. d를 a,b의 분모의 (최소)공배수라 하면 임의의 정수 k에 대해 (x_0+bdk, y_0-adk)는 격자점이고 $a(x_0+bdk)+b(y_0-adk)+c=ax_0+by_0+c=0$이므로 주어진 직선 위에 있다.

(참고: 0의 분모는 1 (또는 임의의 0이 아닌 정수)로 생각하면 위의 해는 a,b중 하나가 0이어도 성립한다.)

(별해 1) 유리직선 $ax+by+c=0$ (상수 a,b,c는 유리수)을 나타내는 식의 양변에 a,b,c의 분모의 (최소)공배수를 곱하면 유리직선은 항상 계수와 상수가 정수인 식으로 나타낼 수 있다. 이제 주어진 유리직선 $ax+by+c=0$ (상수 a,b,c는 정수)가 격자점 (x_0,y_0)를 지난다 하자. 임의의 정수 k에 대해 (x_0+bk, y_0-ak)는 격자점이고 $a(x_0+bk)+b(y_0-ak)+c=ax_0+by_0+c=0$이므로 주어진 직선 위에 있다.

(별해 2) 유리직선 $a'x+b'y+c'=0$ (상수 a',b',c'는 유리수)이 y축과 평행하지 않다면 $b'\neq 0$ 이고 식의 양변을 b'로 나누고 정리하여서 $y=ax+c$ (상수 a,c는 유리수)로 나타낼 수 있다. 이 유리직선이 격자점 (x_0,y_0)을 지난다 하자. $a=\frac{n}{m}$ (n,m은 정수)이라면 임

의의 정수 k에 대해 (x_0+mk, y_0+nk)는 격자점이고 $y_0+nk=\frac{n}{m}(x_0+mk)+c$이므로 주어진 직선 위에 있다.
위와 마찬가지로 y축과 평행한 유리직선은 $x=c$(상수 c는 유리수)로 나타낼 수 있다. 이 유리직선이 격자점 (x_0, y_0)을 지난다면, $c=x_0$ 은 정수이고 임의의 정수 k에 대해 (x_0, k)는 이 직선 위의 격자점이다.

(3) 서로 다른 두 점 $A=(x_1,y_1), B=(x_2,y_2)$를 지나는 직선은 벡터방정식 $\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AB}$ (t는 실수)로 나타낼 수 있다. 이때, A, B가 격자점이라면 임의의 정수 k에 대해 $\overrightarrow{OA}+k\overrightarrow{AB}=(x_1+k(x_2-x_1), y_1+k(y_2-y_1))=((1-k)x_1+kx_2, (1-k)y_1+ky_2)$는 이 직선 위의 격자점이다.

(별해 1) 직선 $ax+by+c=0$ (a,b,c는 상수)가 서로 다른 두 격자점
$A=(x_1,y_1), B=(x_2,y_2)$를 지난다 하자. 임의의 정수 k에 대해 격자점
$(x_1+k(x_2-x_1), y_1+k(y_2-y_1))=((1-k)x_1+kx_2, (1-k)y_1+ky_2)$은
$a(1-k)x_1+kx_2+b(1-k)y_1+ky_2+c=(1-k)(ax_1+by_1+c)+k(ax_2+by_2+c)=0$을
만족하므로 주어진 직선 위에 있다.

(별해 2) 서로 다른 두 점 $A=(x_1,y_1), B=(x_2,y_2)$를 지나는 직선은
식 $(y_2-y_1)x+(x_1-x_2)y+(y_1x_2-x_1y_2)=0$로 나타낼 수 있다. 이때, A, B가 격자점이라면 이 식의 계수와 상수는 모두 정수이고 따라서 이 직선은 유리직선이다. 문제 (2)에 의해 적어도 하나의 격자점을 지나는 이 유리직선은 무한히 많은 격자점을 지난다.

(별해 3) 서로 다른 두 점 $A=(x_1,y_1), B=(x_2,y_2)$를 지나는 직선은 $x_1 \neq x_2$일 경우 식 $y-y_1=\left(\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right)(x-x_1)$으로 나타낼 수 있고, $x_1=x_2$일 경우는 식 $x=x_1$으로 나타낼 수 있다. A, B가 격자점이라면 두 경우 모두 식의 계수와 상수는 모두 유리수이고 따라서 이 직선은 유리직선이다. 문항 (2)에 의해 적어도 하나의 격자점을 지나는 이 유리직선은 무한히 많은 격자점을 지난다.

(4) (위 (3)번 문항의 별해 2와 동일) 서로 다른 두 점 $A=(x_1,y_1), B=(x_2,y_2)$를 지나는 직선은 식 $(y_2-y_1)x+(x_1-x_2)y+(y_1x_2-x_1y_2)=0$로 나타낼 수 있다. 이때, A, B가 격자점이라면 이 식의 계수와 상수는 모두 정수이고 따라서 이 직선은 유리직선이다.

(별해 1) (위 (3)번 문항의 별해 2‘과 동일) 서로 다른 두 점 $A=(x_1,y_1), B=(x_2,y_2)$를 지나는 직선은 $x_1 \neq x_2$일 경우 식 $y-y_1=\left(\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right)(x-x_1)$으로 나타낼 수 있고, $x_1=x_2$일 경우는 식 $x=x_1$으로 나타낼 수 있다. 이때, A, B가 격자점이라면 두 경우 모두 식의 계수와 상수는 모두 유리수이고 따라서 이 직선은 유리직선이다.

【채점 기준】

- 문제에서 요구하는 답(가령 (1)의 격자점의 개수)을 구하고 모든 과정에 대한 설명이 정확하면 만점, 설명이 부족하면 감점한다.
- 풀이과정은 수식 또는 명확한 서술로 설명되어야 한다.

문제 2

우리들은 10진법으로 수를 표시하는 데 익숙하다. 예를 들어 324란 백의 자리수가 3, 십의 자리수가 2, 일의 자리수가 4인 수로서 $3\times10^2+2\times10^1+4\times10^0$로 표현할 수 있다. 10 대신에 2의 거듭제곱들을 이용하여 수를 표현하는 방법을 이진법이라 부른다. 거듭제곱의 지수를 음수까지 생각하면 소수도 이진법으로 표현할 수 있다. 예를 들어 $5.5=1\times2^2+0\times2^1+1\times2^0+1\times2^{-1}$이므로 5.5는 이진법으로는 $101.1_{(2)}$로 표현된다.

다음과 같이 함수 $T(x)$를 $0\le x<1$ 인 실수 x 에 대해 정의한다.

$$T(x)=\begin{cases}2x & (0\le x<\frac{1}{2})\\ 2x-1 & (\frac{1}{2}\le x<1)\end{cases}$$

$k\ge1$일 때 함수 $T(x)$를 k 번 합성한 함수를 $T^k(x)$라고 정의하고 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$T^k(x)=T(T^{k-1}(x))\quad (\text{단, } T^0(x)=x)$$

$0\le x<1$ 인 실수 x 에 대해 함수 $D(x)$를 다음과 같이 정의한다.

$$D(x)=\begin{cases}0 & (0\le x<\frac{1}{2})\\ 1 & (\frac{1}{2}\le x<1)\end{cases}$$

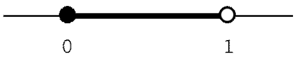
$k\ge1$일 때 함수 $M_k(x)$를 다음과 같이 정의한다.

$$M_k(x)=D(T^{k-1}(x))$$

(1) $x=0.110101_{(2)}$에 대해서 $T(x)$와 $T^2(x)$를 이진수로 각각 표현하시오.

(2) 어떤 수 x에 대해 k 가 1 일 때부터 $M_k(x)$들을 순서대로 나열하면 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1,⋯ 과 같이 첫 번째 항은 1 이고 그 다음 항부터 ‘0, 1, 1’의 패턴이 무한 반복된다. 이때 x를 기약 분수로 나타내시오.

(3) 구간 $A=\{x\in\mathrm{R}\mid 0\le x<1\}$을 수직선 위에 나타내면 아래 그림과 같다.



A의 부분집합 $\{x|M_1(x)=1\}$과 $\{x|M_2(x)=1\}$을 수직선 위에 각각 나타내시오.

(4) 연속확률변수 X의 확률밀도함수가 $f(x)=2x$ (단, $0 \le x < 1$) 일 때, $\mathrm{P}(M_k(X)=1)$ 일 확률을 구하시오.

【출제 의도】

0과 1사이 실수의 이진법 표현과 주어진 함수들 사이의 관계를 이해하는지 묻는 문제이다. 간단한 방법으로 정의된 두 함수를 합성하여 이진법으로 표현된 실수의 소수점 아래 k 번째 자리의 수를 읽어내는 함수를 소개하고 있다. 주어진 글을 읽고 함수의 이와 같은 성질을 이해하는지 물은 뒤, 순환소수, 급수, 확률밀도함수 등 기본적인 개념을 이해하고 있는지 묻는 문제이다. 각 소문항의 출제 의도는 다음과 같다.

(1) 변수값과 함수값을 각각 이진법으로 나타내었을 때, 함수의 규칙을 이해하는지 묻는 문제이다. 아래 문항들의 풀이 방법에 대한 단서를 제공한다.

(2) 주어진 함수들이 변수값을 이진법으로 나타내었을 때 각 자리의 수를 나타냄을 이해하는지 묻는다. 또한 등비급수의 합을 이용하여 이진법으로 나타낸 순환소수를 유리수로 나타낼 수 있는지 (즉, 십진법으로 나타낸 순환소수를 유리수로 변환하는 방법을 변형하여 적용할 수 있는지) 묻는 문제이다.

(3) 주어진 함수값을 가지는 실수들의 구간을 구하는 문제이다. 아래 문항의 해결을 위한 예시이다.

(4) 위 문항의 결과를 일반화하여 주어진 함수값을 가지는 실수들의 구간을 구하고 주어진 확률밀도함수에 대한 확률을 계산하는 문제이다.

【예시 답안】

(1)

(답안 1)

$x=0.110101_{(2)}=\dfrac{1}{2}+\ldots \ge \dfrac{1}{2}$

$\therefore T(x)=2x-1=1.10101_{(2)}-1=0.10101_{(2)}$

$T(x)=0.10101_{(2)}=\dfrac{1}{2}+\ldots \ge \dfrac{1}{2}$

$\therefore T^2(x)=2T(x)-1=1.0101_{(2)}-1=0.0101_{(2)}$

(답안 2)

$x = 0.110101_{(2)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} = \frac{53}{64} \geq \frac{1}{2}$

$\therefore T(x) = 2x - 1 = 2 \times \frac{53}{64} - 1 = \frac{21}{32} = 0.10101_{(2)}$

$T(x) = \frac{21}{32} \geq \frac{1}{2}$

$\therefore T^2(x) = 2T(x) - 1 = \frac{5}{16} = 0.0101_{(2)}$

(답안 3) 중간 과정을 생략한 경우

$x = 0.110101_{(2)} = \frac{53}{64}$ 이므로 $T(x)$를 정의된 대로 구해보면,

$T(x) = \frac{21}{32} = 0.10101_{(2)}$. 같은 방식으로 $T^2(x) = \frac{5}{16} = 0.0101_{(2)}$.

(2) 101 패턴이 반복되므로

$x = 0.1011011011\cdots_{(2)} = 0.101 + 0.000101 + \ldots = (0.101) \times \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-3k} = \frac{5}{8} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{8}} = \frac{5}{7}$

혹은 문제에서 1 다음에 011이 반복된다고 기술하였으므로

$x = 0.1011011011\cdots_{(2)} = \frac{1}{2} + 0.0011011011\cdots_{(2)} = \frac{1}{2} + y$

$2 \times y = 0.011011011\cdots_{(2)} = 3 \times \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-3k} = 3 \times \frac{\frac{1}{8}}{1 - \frac{1}{8}} = \frac{3}{7} \Rightarrow \therefore y = \frac{3}{14}$

$\therefore x = \frac{1}{2} + \frac{3}{14} = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}$

위의 과정에서 등비 수열을 구하는 방법이 여러 가지 있을 수 있다.

예 1:

$x = 0.1011011011\cdots_{(2)} = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4}\right) + \left(\frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^7}\right) + \ldots = \frac{1}{2} + \frac{3}{2^4} + \frac{3}{2^7} \ldots = \frac{1}{2} + \frac{\frac{3}{16}}{1 - \frac{1}{8}} = \frac{5}{7}$

예 2:

$x = 0.1011011011\cdots_{(2)} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^7} + \ldots\right) + \left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^9} + \ldots\right) = \frac{4}{7} + \frac{1}{7} = \frac{5}{7}$

예 3:

$x = 0.1011011011\cdots_{(2)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^7} + \ldots = 1 - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^8} + \ldots\right) = 1 - \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$

예 4:

$$x = 0.1011011011\cdots_{(2)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^7} + \cdots$$
$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots\right) - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^8} + \cdots\right) = 1 - \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$$

(3) 주어진 함수들 D, M_1, M_2의 정의로부터

$M_1(x) = D(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \le x < 1$,

$M_2(x) = D(T(x)) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \le T(x) < 1$ 이다.

한편 함수 T의 정의로부터 마지막 부등식은 $0 \le x < \frac{1}{2}$인 x에 대해서는 $\frac{1}{2} \le 2x < 1$,

$\frac{1}{2} \le x < 1$인 x에 대해서는 $\frac{1}{2} \le 2x - 1 < 1$로 주어진다. 따라서

$M_2(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{4} \le x < \frac{1}{2}$ 또는 $\frac{3}{4} \le x < 1$ 이다.

아래 그림의 굵게 색칠한 영역:

$\{x : M_1(X) = 1\}$ $\{x : M_2(X) = 1\}$

(4) (3)번 문제로부터 유추하면 구간은 $M_k(X) = 1$ 에 해당하는 집합은 0과 1 사이를 2^k 개로 나눈 구간 중 1 부터 시작해서 홀수 번째에 해당하는 2^{k-1} 개의 구간이다.($[\frac{1}{2^k}, \frac{2}{2^k})$, ... , $[\frac{2n-1}{2^k}, \frac{2n}{2^k})$, ... ,$[\frac{2^k-1}{2^k}, 1)$)

그 각각의 구간에 속할 확률은 확률밀도함수를 그 구간에서 적분하면 되고 전체 확률은 그 적분 값을 모두 더하면 되므로 전체 확률은 아래와 같다.

$$\mathrm{P}(M_k(X) = 1) = \sum_{n=1}^{2^{k-1}} \left(\int_{\frac{2n-1}{2^k}}^{\frac{2n}{2^k}} f(x)dx \right) = \sum_{n=1}^{2^{k-1}} \left(\int_{\frac{2n-1}{2^k}}^{\frac{2n}{2^k}} 2xdx \right) \qquad (가)$$

$$= \sum_{n=1}^{2^{k-1}} x^2 \Big|_{\frac{2n-1}{2^k}}^{\frac{2n}{2^k}} = \sum_{n=1}^{2^{k-1}} \left\{ \left(\frac{2n}{2^k}\right)^2 - \left(\frac{2n-1}{2^k}\right)^2 \right\} \qquad (나)$$

$$= \sum_{n=1}^{2^{k-1}} \frac{1}{2^{2k}}(4n-1) = \frac{1}{2^{2k}}\left(2\left(2^{k-1}\right)\left(2^{k-1}+1\right) - 2^{k-1}\right)$$

$$= \frac{1}{2^{2k}}\left(2^{2k-1} + 2^{k-1}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{2^k+1}{2^{k+1}}$$

【채점 기준】

● 문제의 풀이가 논리적이고 답이 맞으면 만점이다.

• 문제의 답은 맞으나 논리적인 기술이 부족한 경우 감점한다.
• 각 문제의 풀이는 맞았으나 계산에서 사소한 실수가 있는 경우 감점한다.

문제 3

홍익이는 비오는 날 길을 걷다가 왜 높은 하늘에서 떨어지는 빗방울을 맞아도 사람이 다치지 않는지 궁금해졌다. 즉 중력에 의해 빗방울의 속도가 점점 빨라져서 땅에 떨어질 시점에는 매우 큰 속도가 되어야 하는데 왜 실제로는 그렇지 않은지 궁금했다. 조사한 결과 속도가 커지면 공기의 저항력도 커지기 때문이라는 사실을 알게 되었다. 하늘에서 떨어지는 빗방울의 속도 v를 시간 t의 함수로 나타내었을 때, 홍익이는 상황을 단순화하여 $v(t)$가 다음의 운동방정식을 만족한다고 생각하였다.

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv^2$$

여기에서 양의 상수 m, g, k 는 각각 빗방울의 질량, 중력가속도, 공기의 저항계수를 나타낸다. 홍익이는 운동방정식을 풀기보다 자신이 알고 있는 수열을 이용하여 빗방울의 속도 변화를 나타내 보기로 하였다. 먼저 홍익이는 짧은 시간 간격 Δt 동안에 빗방울의 속도 변화는 대략 일정할 것이라고 가정하고, 초기 $(t=0)$ 부터 시작하여 일정한 짧은 시간 간격 Δt 후의 빗방울의 속도 $v_0, v_1, v_2, \cdots$ 는 다음 식을 만족한다고 생각하였다. (즉, v_n은 $t = n\Delta t$일 때의 속도)

$$m\frac{v_{n+1} - v_n}{\Delta t} = mg - kv_n^2 \qquad (n \geq 0) \qquad \text{(식 1)}$$

홍익이는 $v_0, v_1, v_2, \cdots$ 의 변화를 살펴보기 위해 (식 1)을 아래의 꼴로 변환하였다.

$$x_{n+1} = a - x_n^2 \qquad (n \geq 0) \qquad \text{(식 2)}$$

(식 2)로 주어지는 수열에 대해서 다음과 같은 사실이 알려져 있다.

(사실)

$-\frac{1}{4} < a < 0$ 이고 초기값이 $-\frac{1}{2} \leq x_0 \leq 0$ 이면 (식 2)로 주어지는 수열 $x_0, x_1, x_2, \cdots$ 는 증가 (즉, $x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots$) 하거나 감소 (즉, $x_0 \geq x_1 \geq x_2 \geq \cdots$) 한다. 두 경우 모두 모든 $n \geq 0$ 에 대해 $-\frac{1}{2} \leq x_n \leq 0$ 이 성립하고, 이 수열은 수렴한다.

(1) (식 1)을 (식 2)의 꼴로 변환하시오.
(2) 지문의 (사실)을 (1)에서 변환한 식에 적용하여 빗방울의 속도가 무한정 커지지 않고 일

정한 속도(종단속도)에 이른다는 결론을 내리려 한다.

(a) 지문의 (사실)을 적용하기 위해서는 Δt를 특정한 값보다 작게 설정해야 한다. 그 값을 상수 m, g, k 와 초기속도 v_0로 표현하고 그 과정을 기술하시오 (단 $v_0 \geq 0$).

(b) 이때 빗방울의 종단속도를 구하고, 모든 $n \geq 0$ 에 대해 v_n은 v_0와 종단속도 사이의 값임을 보이시오.

【출제 의도】

빗방울의 속도라는 물리적 현상을 소재로 $n+1$번째 항이 n번째 항의 제곱과 관계되는 수열의 관계식을 소개하고, 비슷한 형태로 주어지는 관계식을 만족하는 수열이 수렴하는 특별한 조건을 **(사실)**로 제시하고 있다. 주어진 **(사실)**을 적용할 수 있도록 주어진 식을 적절하게 변환할 수 있는지 묻고 있다. 주어진 글을 읽고 그 뜻을 이해하는지 묻는 문제이다. 각 소문항의 출제 의도는 다음과 같다.

(1) 점화식으로 주어진 수열을 완전제곱식 등을 이용하여 좀 더 단순한 형태의 점화식을 만족하는 수열로 변환할 수 있는지 묻는 문제이다.

(2-a) 위 문항에서 얻은 새로운 수열에 대해 지문에서 주어진 사실을 적용하기 위한 조건을 찾는 문제이다.

(2-b) 지문에서 주어진 사실을 적용하여 수열의 증감, 수렴성을 보이고, 극한값을 구하는 문제이다.

【예시 답안】

(1) (식 1)은 다음과 같은 과정을 거쳐 (식 2)로 변환될 수 있다.

$$m\frac{v_{n+1}-v_n}{\Delta t} = mg - kv_n^2$$

$$v_{n+1}-v_n = \Delta tg - \frac{k\Delta t}{m}v_n^2$$

$$v_{n+1} = \Delta tg - \frac{k\Delta t}{m}v_n^2 + v_n$$

$$v_{n+1} = -\frac{k\Delta t}{m}\left(v_n^2 - \frac{m}{k\Delta t}v_n + \left(\frac{m}{2k\Delta t}\right)^2 - \left(\frac{m}{2k\Delta t}\right)^2\right) + g\Delta t$$

(가) $$v_{n+1} = -\frac{k\Delta t}{m}\left(v_n - \frac{m}{2k\Delta t}\right)^2 + \frac{m}{4k\Delta t} + g\Delta t$$

양변에 $-\frac{m}{2k\Delta t}$을 더하면,

(나) $$\left(v_{n+1} - \frac{m}{2k\Delta t}\right) = -\frac{k\Delta t}{m}\left(v_n - \frac{m}{2k\Delta t}\right)^2 - \frac{m}{4k\Delta t} + g\Delta t$$

양변에 $\frac{k\Delta t}{m}$를 곱하면,

(다) $$\frac{k\Delta t}{m}\left(v_{n+1} - \frac{m}{2k\Delta t}\right) = -\left(\frac{k\Delta t}{m}\right)^2\left(v_n - \frac{m}{2k\Delta t}\right)^2 - \frac{1}{4} + \frac{k\Delta t}{m}g\Delta t$$

(라) $x_n = \frac{k\Delta t}{m}\left(v_n - \frac{m}{2k\Delta t}\right)$, $a = -\frac{1}{4} + \frac{gk(\Delta t)^2}{m}$ 으로 놓으면

$$x_{n+1} = a - x_n^2$$

(2-a)

(1)에서 $x_0 = \frac{k\triangle t}{m}v_0 - \frac{1}{2}$, $a = -\frac{1}{4} + \frac{gk(\triangle t)^2}{m}$인 것을 알 때 **(사실)**에 주어진 조건을 해석할 수 있는지 묻는 문제이다.

(가) $-\frac{1}{4} \le a \le 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{4} \le \frac{gk(\Delta t)^2}{m} - \frac{1}{4} \le 0$

$$\Leftrightarrow 0 \le \frac{gk(\Delta t)^2}{m} \le \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow 0 \le (\Delta t)^2 \le \frac{1}{4}\frac{m}{gk}$$

(나) $-\frac{1}{2} \le x_0 < 0$

(i) $v_0 = 0$ 이면 $x_0 = -\frac{1}{2}$: 주어진 조건 만족

(ii) $v_0 \ne 0$ 이면 $-\frac{1}{2} \le x_0 \le 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \le \frac{k\Delta t}{m}v_0 - \frac{1}{2} \le 0$

$$\Leftrightarrow 0 \le \Delta t \le \frac{1}{2}\frac{m}{v_0 k}$$

(가)와 (나) 모두 만족해야 하므로

$v_0 = 0$ 이면 $0 \le \Delta t < \frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{gk}}$

$v_0 \ne 0$ 이면 $0 \le \Delta t \le \min(\frac{1}{2}\frac{m}{v_0 k}, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{gk}})$

(2-b)

(가) 종단속도를 해석하는 방법에 따라 여러 가지로 구할 수 있다.

(i) 가속도 = 0, (ii) $\lim_{n\to\infty} v_n = v$, (iii) $\lim_{n\to\infty} x_n = x$일 때 v_n의 극한

(i) $m\frac{dv}{dt} = mg - kv^2$에서 $\frac{dv}{dt} = 0$이므로 $v = \sqrt{\frac{mg}{k}}$

(ii) (식 1)에서 $\lim_{n\to\infty} v_n = v$

$m\frac{v-v}{\triangle t} = mg - kv^2$ 이므로 $v = \sqrt{\frac{mg}{k}}$

(iii) $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ 이면 $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4a}}{2}$ ------------------------- (*)

$x = \frac{k\Delta t}{m}v - \frac{1}{2}$ 이고 $x \ge -\frac{1}{2}$ 이므로 $v = (x + \frac{1}{2})\frac{m}{k\Delta t}$ 에서 $v = \sqrt{\frac{mg}{k}}$ ------ (**)

(나)

$x_n = \frac{k\triangle t}{m}(v_n - \frac{m}{2k\triangle t}) = \frac{k\triangle t}{m}v_0 - \frac{1}{2}$

$$x_{n+1} - x_n = (\frac{k\Delta t}{m} v_{n+1} - \frac{1}{2}) - (\frac{k\Delta t}{m} v_n - \frac{1}{2})$$
$$= \frac{k\Delta t}{m}(v_{n+1} - v_n)$$

$$x_n \le x_{n+1} \Leftrightarrow v_n \le v_{n+1} \ (\because \frac{k\Delta t}{m} > 0)$$

그러므로 x_n이 증가하면 v_n도 증가하고, x_n이 감소하면 v_n도 감소한다.
지문에 주어진 **(사실)**에서 x_n이 증가하거나 x_n이 감소한다고 하였으므로, v_n이 증가하거나 v_n이 감소한다. 그러므로 v_n은 v_0와 종단속도 사이의 값이다.

【채점 기준】

- 문제에서 요구하는 바를 구하고 풀이과정과 설명이 정확하면 만점이다.
- 문제의 답은 맞으나 논리적인 기술이 부족한 경우 감점한다.
- (1)에서 문제에서 요구하는 형태로 식을 변환하지 못하였으나 이 과정을 이해하고 중간단계까지 변환한 경우 부분점수를 부여한다.