2014학년도 수시모집 논술고사

◆ 대학명: 홍익대학교
◆ 모집시기: 수시 1차
◆ 전형명칭: 일반전형
◆ 모집계열: 자연계열
◆ 출제유형: 수리형
◆ 개요
- 시험시간: 150분
- 출제문항수: 3문제
- 답안지 양식, 작성 분량: 무선, 분량은 제한 없으며 문제별로 A4 크기의 양면 답지 제공
- 지정된 필기구 : 청색 볼펜만 사용 가능
- 수험생 유의사항:

1. 자신을 드러내는 표현이나 불필요한 표시가 있는 답안은 0점으로 처리합니다.
2. 답안은 반드시 청색 볼펜으로만 작성하여야 합니다.0
3. 답안을 수정할 경우에도 청색 볼펜만을 사용하여야 합니다. 수정액이나 수정테이프는 사용할 수 없습니다.
4. 본 문제지는 총 6장입니다.
5. 총 3문제가 있으며 문제 1에 30점, 문제 2에 35점, 문제 3에 35점을 배점합니다.
6. 문제 1번은 (가) ~ (라), 문제 2번은 (가) ~ (마), 문제 3번은 (가) ~ (마)로 구성됩니다.

◆ 출제방향(취지) 및 교과서 관련여부 및 근거:

□ 출제방향(취지)

대학 교육이수에 기본적으로 요구되는 수리 능력, 기호화/추상화 능력, 분석적/종합적 사고 능력, 연역적 논증 능력, 창의적 사고력, 의사소통 능력, 독해력 등을 평가하기 위하여 다음 사항에 주안하여 출제한다.

- 자연과학 및 공학 분야와 관련된 제시문을 읽고 내포된 개념과 원리를 파악할 수 있는가
- 문제를 해결하기 위해 논리적으로 사고를 할 수 있는가
- 문제 해결을 위한 자기의 생각을 적절한 수학적 표현을 통해 논리적으로 기술할 수 있는가

자연계열 논술문제는 고등학교 수학과 과학 교과 내용을 응용하여 출제한다. 기본적인 개념과 원리를 정확하게 이해하고 있는지 본질적인 차원에서 묻거나, 다양한 현상에 내재된 수학과 과학의 원리를 인식하고 설명하도록 요구함으로써, 학생이 학교 학습을 충실히 하며 수학적 사고력을 길러왔는지의 여부를 판단할 수 있도록 한다.

□ 교과서 관련여부 및 근거:

문제 1

미분의 정의, 미분계수와 접선의 방정식:
고등학교 수학II (좋은책 신사고, 2010, 황선욱 외), pp. 107~110.
평균값의 정리: 고등학교 수학II (좋은책 신사고, 2010, 황선욱 외), p. 160.

문제 2

이계도함수: 고등학교 수학II (좋은책 신사고, 2010, 황선욱 외), pp. 150~151.
삼각함수의 합성: 고등학교 수학II (교학사, 2010, 황석근 외), pp. 43~44.
로피탈의 정리: 고등학교 고급수학II (2011 개정 수학과 교육과정, 교육과학기술부), p. 122.
진동과 공진: 고등학교 물리II (천재교육, 2011, 곽성일 외), pp. 50~55.

문제 3

벡터의 덧셈: 고등학교 기하와 벡터 (천재교육, 2010, 최용준 외). p. 130.
피타고라스의 정리: 중학교 수학 3 (두산동아, 2013, 우정호 외), pp. 184~191
두 원의 위치 관계: 중학교 수학 1 (두산동아, 2009, 우정호 외), pp. 238~240

◆ 평가기준:
① 문제의 제시문을 이해하고 논지를 파악하여 문제에서 요구하는 바를 정확하게 답하였는가?
② 답안을 논리적이고 모순 없이 명확하게 서술하고 있는가?
③ 수식이 적절하게 사용되었으며, 계산 과정에서 오류가 없는가?
④ 문제해결 아이디어가 창의적인가?

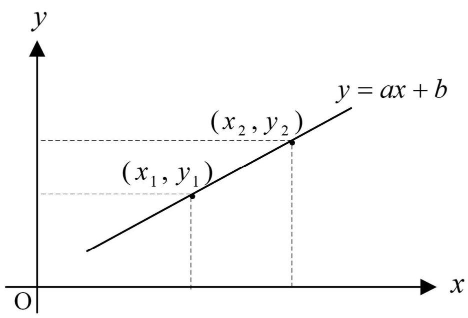
◆ 출제문제: 계열별로 구분
-자연

문제 1 (30점)

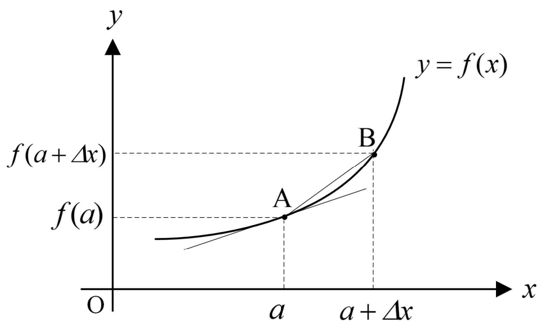
직선 위의 임의의 두 점을 이용하면 직선의 기울기 m을 구할 수 있다. 즉 [그림 1]에서 직선 $y=ax+b$의 기울기 m은

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{(ax_2+b)-(ax_1+b)}{x_2-x_1}=a$$

이다. 그런데 홍익이는 [그림 2]와 같은 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 A에서의 접선의 기울기를 구할 때는 접점이 하나이므로 위와 같은 방법으로 기울기를 계산할 수 없다는 사실을 깨달았다.



[그림 1]



[그림 2]

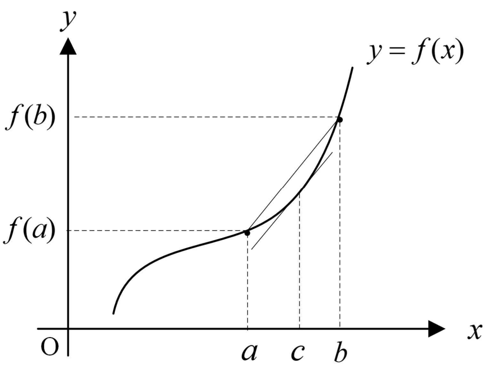
(가) [그림 2]와 같은 함수 $y=f(x)$에 대해 그래프 위의 두 점 A, B를 지나는 직선 AB의 기울기를 이용하여 점 A에서 접선의 기울기를 구하는 식을 적어라.

(나) 위의 <u>(가)에서 구한 식을 이용하여</u> $y=x^2$의 $x=a$에서의 접선의 기울기를 구하라.

함수 $y=f(x)$가 구간 $[a, b]$에서 연속이고 구간 (a, b)에서 미분가능할 때

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

를 만족하는 점 c가 a와 b 사이에 적어도 하나 존재한다는 것이 '평균값 정리'이다([그림 3]).

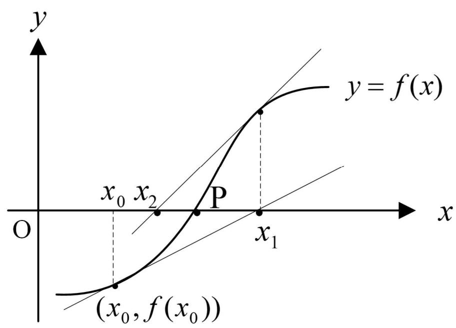


[그림 3]

(다) 지난 여름 폭염에 의해 전력 수요가 급증하면서 예비 전력이 낮아졌지만, 국민들의 협조 하에 어려움을 극복할 수 있었다. 정부에서는 에어컨을 켠 채 문을 열고 영업을 하거나 냉방온도 제한을 위반하는 업소를 단속하는 등 강도 높은 대책으로 전력 소비 감소를 유도하였다. 예를 들어 어떤 상점의 전력 소비율을 0.5KW로 제한하였는데 전기 계량기를 확인하니 10시간 동안 6KWh를 사용한 것으로 나타났다. 이 상황에 대해 평균값 정리를 적용할 수 있다고 가정할 때 전기를 사용한 10시간 사이에 전력 소비율이 0.5KW를 초과한 시점이 있음을 보여라(1 KWh는 1KW로

1 시간 사용한 전력량이다).

함수 $y=f(x)$의 접선의 기울기를 이용하여 방정식 $f(x)=0$의 근을 근사적으로 구할 수 있다. [그림 4]에서 $f(x)=0$의 하나의 근은 $y=f(x)$의 그래프와 x축과의 교점 P의 x좌표이다.



[그림 4]

먼저 구하려는 방정식의 근을 x_0로 가정하여 $x=x_0$에서 $y=f(x)$의 접선의 방정식을 구하면

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$$

이고, 이 접선과 x축과의 교점을 x_1이라고 하면

$$0-f(x_0)=f'(x_0)(x_1-x_0)$$

이 성립하므로 $f'(x_0)\neq 0$ 일 때

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

이다. 즉 $n=1,2,3,\cdots$에 대해

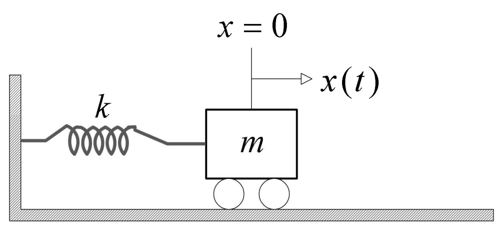
$$x_n=x_{n-1}-\frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

과 같은 계산을 반복하여 원하는 정확도까지 방정식의 근을 구할 수 있다.

(라) 방정식 $f(x)=x^2-2=0$의 양의 근을 위에서 설명한 방법으로 구하여라. $x_0=2$로 놓고 2회 반복 계산하여 x_2를 소숫점 아래 넷째 자리에서 반올림하여 소숫점 아래 셋째 자리까지 구한다.

문제 2 (35점)

고층 건물의 12층에 위치한 에어로빅센터에서 십여명의 사람이 박자에 맞춰 발을 구르며 운동을 한다. 그러자 건물 상층부가 심하게 흔들린다. 이것은 2011년 여름 서울의 한 건물에서 실제로 벌어진 일이다. 대한건축학회는 진동이 증폭되어 일어나는 ‘공진(resonance)’ 현상으로 이를 설명했다. 1831년 영국의 브로스턴 다리도 군인들이 발맞춰 행군하면서 생긴 진동이 하필이면 다리의 고유진동수와 같았기 때문에 무너졌다고 알려져 있다. 홍익이는 이러한 현상에 대해 좀 더 알아보려 한다.



질량 m인 물체가 용수철 상수 k인 용수철에 연결된 ‘질량−용수철계’를 생각하자. 여기서 $x(t)$는 시간 t에서 물체의 원래 위치($x=0$)로부터의 변위를 나타내며, 물체와 바닥 사이의 마찰은 무시한

다. 물체를 당겼다 놓으면 물체가 진동하는데 이와 같이 계에 외부힘이 작용하지 않는 진동을 '자유진동'이라고 한다. 자유진동을 기술하기 위해 뉴턴의 제2법칙 $F = ma$를 적용하면 용수철의 복원력은 $F = -kx$이고 물체의 가속도는 $a = \dfrac{d^2x}{dt^2}$이므로 $-kx = m\dfrac{d^2x}{dt^2}$, 즉 $m\dfrac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$이며 마지막 식의 양변을 m으로 나누면

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \quad --- \ ①$$

이다. 여기서

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \quad --- \ ②$$

이다. $t = 0$에서 물체를 오른쪽으로 x_0 만큼 당긴 후 정지상태에서 놓으면 시간 t에서 물체의 위치는

$$x(t) = x_0 \cos\omega t \quad --- \ ③$$

이다. 여기서 ω는 ③으로 표현되는 진동의 진동수를 나타내는 요인이며 특정한 질량-용수철계의 ω에 의해 결정되는 진동수를 그 질량-용수철계의 '고유진동수'라고 한다.

(가) ③에 대해 ①이 성립함을 보이고 ③이 위의 설명을 통해 알 수 있는 조건 $x(0) = x_0$과 $\left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=0} = 0$도 만족함을 보여라. ($\left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=0} = 0$는 $x'(0) = 0$을 의미한다.)

(나) 위의 설명에 의하면 질량-용수철계마다 특정한 고유진동수를 가짐을 알 수 있다.

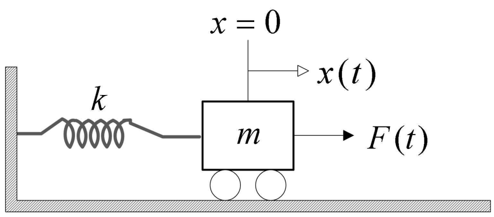
i) ③의 진동수를 구하고, ②를 이용하여 진동수를 m과 k의 식으로 나타내어라. 단, 진동수는 주기의 역수이다.

ii) m이 2배로 증가할 때 진동수는 몇 배가 되는가?

iii) k가 2배로 증가할 때 진동수는 몇 배가 되는가?

iv) x_0가 2배로 증가할 때 진동수는 몇 배가 되는가?

이번에는 질량-용수철계에 외부힘이 더해지는 '강제진동'에 대해 알아보자.



이 경우에도 자유진동에서와 같이 뉴턴의 제2법칙을 사용하면 힘은 복원력 $-kx$와 외부힘 $F(t)$의 합이므로 운동방정식은 $-kx + F(t) = m\dfrac{d^2x}{dt^2}$, 즉

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = f(t) \quad --- \ ④$$

가 된다. 여기서 $f(t) = \dfrac{F(t)}{m}$는 단위 질량당 작용되는 외부힘이다. ④의 ω가 ①의 ω와 같음에 유의해야 한다. $t = 0$에서 진동하지 않던 질량-용수철계에 Ω에 의해 결정되는 진동수를 갖는 외부힘 $f(t) = f_0 \sin\Omega t$ ($\Omega \neq \omega$, f_0는 상수)가 작용하는 경우 ④의 해는

$$x(t) = \frac{f_0(\omega\sin\Omega t - \Omega\sin\omega t)}{\omega(\omega^2 - \Omega^2)} \quad --- \ ⑤$$

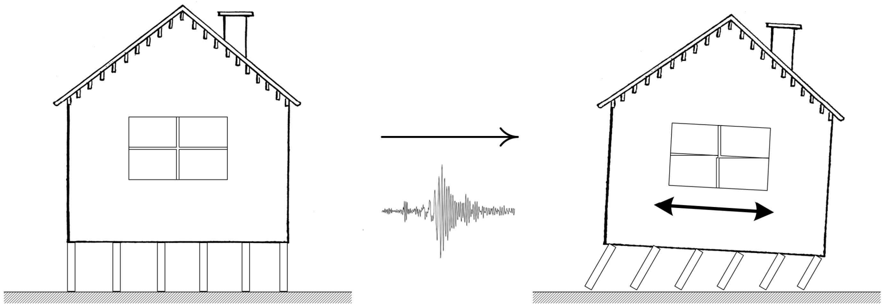
가 되어 서로 진동수가 다른 두 개의 진동 $\sin\Omega t$와 $\sin\omega t$가 중첩되어 나타난다. 그런데 만약 외부

힘의 진동수와 질량-용수철계의 고유진동수가 같다면, 즉 $\Omega = \omega$일 때 어떤 현상이 일어날까? 이러한 경우 진동의 진폭이 시간에 따라 증가하는 공진이 발생한다. 공진을 수학적으로 설명하기 위해서는 $f(t) = f_0 \sin\omega t$로 놓고 ④를 다시 풀어야 하지만, ⑤에서 Ω를 ω로 근접시킨 $x(t)$의 극한을 구하여 같은 결과를 얻을 수도 있다.

(다) ⑤와 다음 로피탈의 정리를 이용하여 $\lim_{\Omega \to \omega} x(t)$를 구하여라. Ω가 변하는 값임에 유의한다.

$f(x)$, $g(x)$가 a에서 미분가능하고 $f(a) = g(a) = 0$일 때 $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$이다(단, $g'(a) \neq 0$).

(라) 삼각함수 $A\sin(\omega t + \alpha)$에서 $|A|$를 진폭이라고 한다. 문제 (다)의 결과를 삼각함수의 합성을 이용하여 하나의 사인함수로 나타내고 진폭이 시간에 따라 증가하는 공진이 발생함을 보여라.



앞에서 살펴 본 강제진동은 지진이나 바람과 같은 외부힘에 의해 건물이 진동하는 경우에도 적용된다. 실제 건물에도 탄성이 존재하므로 진동의 특성을 질량 m과 용수철 상수 k로 나타낼 수 있다. 특정한 진동수를 가지고 좌우로 진동하는 지진력은 건물에 좌우 진동을 유발하는데 만약 공진이 발생하는 경우에는 작은 지진력에도 건물이 붕괴될 수 있다.

(마) 특정한 진동수의 지진에 대해 공진이 발생하는 건물이 있을 때, 건물의 공진을 감소시키기 위한 방안을 간단히 제시하여라.

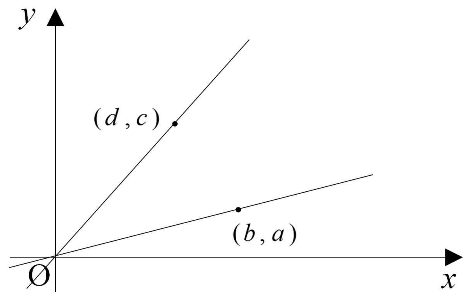
문제 3 (35점)

홍익이는 초등학교에서 분수의 덧셈을 처음 배웠을 때 $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$을 $\frac{1+1}{2+3} = \frac{2}{5}$로 잘못 계산하곤 하였다. 그러나 선생님은 홍익이에게 비록 덧셈은 잘못되었지만 이런 연산도 흥미로운 성질을 가질 수 있다고 말씀하셨다. 이제 대입 논술 시험을 앞둔 홍익이는 이런 연산이 어떤 성질을 갖는지 살펴보기로 했다.

유리수는 두 정수의 비 $\frac{p}{q}$ $(q \neq 0)$로 표현할 수 있다. 분모 q는 항상 양수라고 가정하자.

(가) 유리수 $\frac{p}{q}$는 좌표평면에서 원점과 점 $(q,\ p)$를 지나는 직선의 기울기로 볼 수 있다. 두 유리수 $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ $\left(\frac{a}{b} < \frac{c}{d}\right)$를 [그림 1]과 같이 나타내자. 여기에 기울기가 $\frac{a+c}{b+d}$인 직선을 그리고 이를 이

용하여 부등식 $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$가 성립함을 보여라.



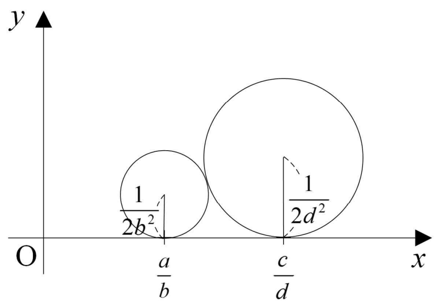
[그림 1]

(나) [그림 2]와 같이 x축 위의 서로 다른 두 유리수 $\frac{a}{b}$와 $\frac{c}{d}$에서 x축과 접하고 각각의 반지름의 길이가 $\frac{1}{2b^2}$과 $\frac{1}{2d^2}$인 두 원이 있다.

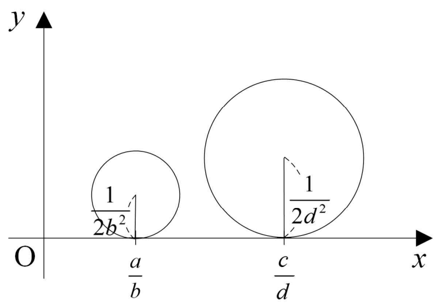
i) [그림 2-a]와 같이 두 원이 서로 접할 필요충분조건은 $|ad-bc|=1$임을 보여라.

ii) $|ad-bc|=1$일 때, $\frac{a}{b}$와 $\frac{c}{d}$는 기약분수임을 보여라. $\frac{p}{q}$가 기약분수임을 보이기 위해서는 양수 k를 p, q의 공약수라 할 때 $k=1$임을 보이면 된다.

iii) $|ad-bc| \neq 1$일 때 [그림 2-b]와 같이 두 원은 서로 만나지 않음을 보여라.



[그림 2-a]

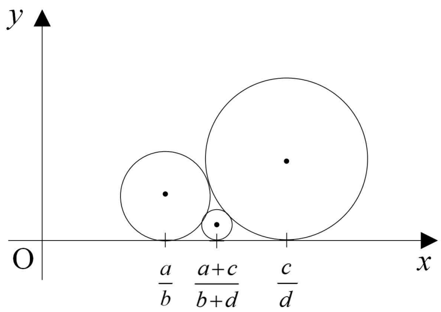


[그림 2-b]

(다) x축 위의 서로 다른 세 유리수 $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{a+c}{b+d}$에서 x축과 접하며 반지름의 길이가 각각 $\frac{1}{2b^2}$, $\frac{1}{2d^2}$, $\frac{1}{2(b+d)^2}$인 세 원이 있다. 이때, $|ad-bc|=1$이라고 하자.

i) [그림 3]과 같이 세 개의 원이 서로 접함을 보여라.

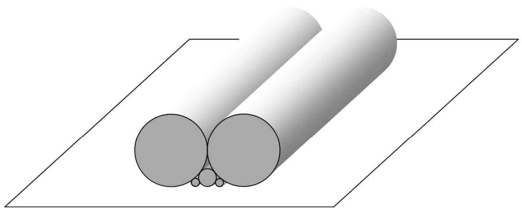
ii) $\frac{a+c}{b+d}$가 기약분수임을 보여라.



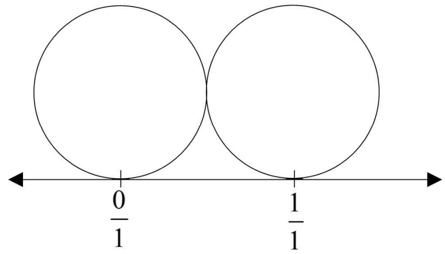
[그림 3]

홍익이는 원기둥 모양의 파이프들을 지면 위에 배치하는데 [그림 4-a]와 같이 이웃하는 두 개의

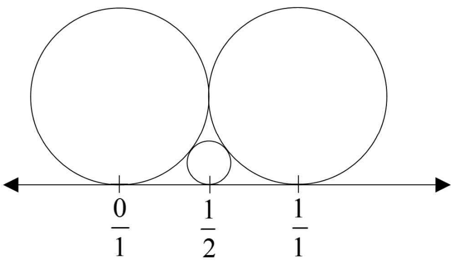
파이프와 지면 사이에 생기는 공간을 줄이기 위해 계속해서 더 작은 파이프를 집어넣는다. 이를 단순화하기 위해 직선 위에 원을 그리는 문제로 바꾸어 생각하였다. [그림 4-b]와 같이 x축의 0과 1에 그려진 크기가 같은 두 원이 서로 접한다. 1단계인 [그림 4-c]에서는 두 원과 x축 사이에 생긴 1개의 틈에 두 원에 접하는 원을 x축 위에 그린다. 2단계인 [그림 4-d]에서는 원들과 x축 사이에 생긴 2개의 틈에 원들과 접하는 2개의 원을 x축 위에 그린다. 3단계에서는 새로 생긴 4개의 틈에 4개의 원을 그리게 될 것이다. 이런 과정을 계속 반복한다.



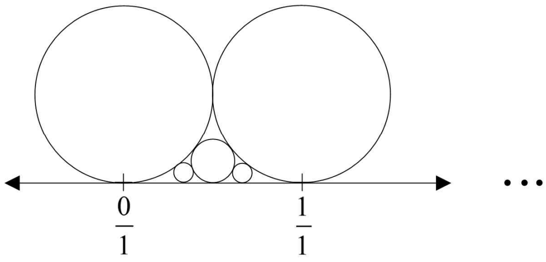
[그림 4-a]



[그림 4-b]



[그림 4-c]



[그림 4-d]

(라) 위의 과정에서 반지름의 길이가 $\frac{1}{50}$인 원은 몇 개를 그리게 되는가?

(마) 홍익이는 위와 같이 원을 그릴 때 x축 위의 0과 1 사이의 임의의 유리수, 예를 들어 $\frac{256}{365}$에 접하는 원을 그리게 될지 궁금했다. 복잡한 계산을 거치지 않고 이를 알아낼 수는 없을까? 홍익이는 $\frac{256}{365}$에 접하는 원을 그리는 단계가 존재한다는 성질을 다음과 같이 보이려 한다.

> 어떤 단계에서도 $\frac{256}{365}$에 접하는 원이 그려지지 않는다고 하자. 원을 그리는 단계가 반복될수록 원들과 x축 사이의 틈이 작아지므로, 결국 어느 단계에 이르면 반지름의 길이가 $\frac{1}{2 \cdot 365^2} = \frac{1}{266450}$인 원을 0과 1 사이의 어디에도 접하도록 그릴 수 없다.
> ....

위에서는 보이고자 하는 성질을 부정함으로써 모순을 이끌어내는 방법을 사용하였다. 앞의 (나)의 결과를 이용하여 이 증명의 나머지 부분을 완성하여라.

◆ 출제문제 해설

문제 1

미분의 개념을 정확하게 이해하고 있는지를 묻는 기본적인 문제이다. 즉 이 문제의 의도는 미분 계산을 기계적으로 수행하지 않고, 그 본질적인 의미를 충실하게 파악하고 있기 진단하는데 있다. 각 소문항의 출제 의도는 다음과 같다.

(가) 함수의 그래프에서 할선의 극한을 통한 접선의 정의를 묻는 문제이다.
(나) 미분계수가 결국 접선의 기울기임을 이해하고 있는지 확인하는 문제이다.
(다) 주어진 전력 소비 상황을 평균값 정리를 이용하여 해석하는 문제이다.
(라) 접선을 그어감으로써 방정식의 근을 구하는 방법을 설명한 후 이를 적용하여 방정식 $x^2-2=0$의 양의 근을 소수 셋째 자리까지 계산하는 능력을 묻는 문제이다.

정답 예시

(가) $m=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$

(나) $f(x)=x^2$ 일 때

$$f'(a)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(a+\Delta x)^2-a^2}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^2+2a\Delta x+\Delta x^2-a^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2a+\Delta x)=2a$$

(다) 시간 t에서 전력 사용량을 $f(t)$라고 하면 전력 소비율은 $f'(t)$이다. 평균값 정리를 적용하면

$$\frac{f(10)-f(0)}{10-0}=\frac{6-0}{10-0}=0.6=f'(c)$$

를 만족하는 시점 c가 10시간 사이에 적어도 한 번 존재한다. 따라서 전력 소비율이 0.6KW인 시점이 적어도 한번 존재하고 이는 제한값인 0.5KW를 초과한다.

(라) $f(x)=x^2-2$, $f'(x)=2x$ 이므로

$$x_n=x_{n-1}-\frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}=x_{n-1}-\frac{x_{n-1}^2-2}{2x_{n-1}}.$$

$x_0=2$ 이므로

$$n=1\ :\ x_1=x_0-\frac{x_0^2-2}{2x_0}=2-\frac{2^2-2}{2\cdot 2}=\frac{3}{2}=1.500$$

$$n=2\ :\ x_2=x_1-\frac{x_1^2-2}{2x_1}=\frac{3}{2}-\frac{(3/2)^2-2}{2\cdot(3/2)}=\frac{17}{12}=1.4166\cdots=1.417$$

즉 $f(x)=x^2-2=0$의 양의 근은 $\sqrt{2}$이고, 위의 방법으로 계산한 값은 1.417이다.

문제 2

수학의 기본 개념 중 삼각함수의 미분, 삼각함수의 주기 및 진동수, 삼각함수의 합성, 함수의 극한값 계산에 대한 이해 능력을 간단한 ‘질량-용수철계’를 통해 평가하는 문제이다. 학생들이 매우 간단한 ‘질량-용수철계’에 대한 사전 물리 지식 없이도 쉽게 이해할 수 있도록 자세한 제시문을 제공하여 단계에 따라 필요한 수학적 능력만 적용하면 풀이를 완성할 수 있도록 유도하였다. 각 소문항의 출제 의도는 다음과 같다.

(가) 주어진 삼각함수가 제시문에서 보인 '질량−용수철계'의 운동방정식을 만족하는가를 물어 학생들의 삼각함수 미분 능력을 평가하는 문제이다.
(나) 주어진 삼각함수를 이용하여 진동하는 물체의 진동수를 계산하고, 진동수와 주기의 상관관계에 대해 생각하도록 하는 문제이다.
(다) 외부 힘이 작용하는 경우의 진동을 함수의 극한을 이용하여 구하는 문제이다.
(라) (다)의 결과를 삼각함수 합성을 이용하여 간단한 하나의 삼각함수로 나타내어 진동의 진폭을 구하도록 유도하는 문제이다.
(마) (가)~(라)의 과정을 이해한 학생들이 지진의 수평진동에 의해 유발되는 건물의 수평진동을 줄일 수 있는 방안을 제시하도록 하여 수학적 지식이 실생활에 응용될 수 있고, 복잡한 공학적 문제도 간단한 수학적 모형으로 설명될 수 있음을 경험하게 하는 문제이다.

정답 예시

(가) 식③, 즉 $x(t)=x_0\cos\omega t$와 $x(t)$의 시간에 대한 2계도함수 $\dfrac{d^2x}{dt^2}=-\omega^2x_0\cos\omega t$를 식①에 대입하면

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=-\omega^2x_0\cos\omega t+\omega^2x_0\cos\omega t=0 \quad -- \ (1)$$

이고

$$x(0)=x_0\cos(\omega\cdot 0)=x_0 \quad -- \ (2)$$

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0}=-\omega x_0\sin(\omega\cdot 0)=0 \quad -- \ (3)$$

(나) i) ③의 진동수는 $f=\dfrac{\omega}{2\pi}$이고 ②에서 $\omega=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$이므로

$$f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

ii) m이 두 배 증가하면 진동수는 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$배가 된다.

iii) k가 두 배 증가하면 진동수는 $\sqrt{2}$배가 된다.

iv) 진동수는 질량 m과 용수철 상수 k로만 표현되어 초기변위 x_0와 무관하므로 x_0가 두 배로 증가해도 진동수에는 변화가 없다.

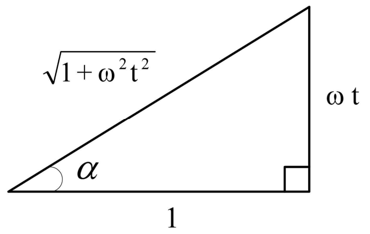
(다) 여기서는 $x(t)$를 Ω의 함수로 보아야 하는 문제이므로 Ω에 대한 로피탈의 정리를 이용하면

$$\lim_{\Omega\to\omega}x(t)=\lim_{\Omega\to\omega}\frac{f_0(\omega\sin\Omega t-\Omega\sin\omega t)}{\omega(\omega^2-\Omega^2)}=\left.\frac{f_0(\omega t\cos\Omega t-\sin\omega t)}{-2\omega\Omega}\right|_{\Omega=\omega}$$

$$=\frac{f_0}{2\omega^2}(\sin\omega t-\omega t\cos\omega t).$$

(라) (다)의 결과에서

$$\begin{aligned}x(t)&=\frac{f_0}{2\omega^2}(\sin\omega t-\omega t\cos\omega t)\\&=\frac{f_0}{2\omega^2}\sqrt{1+\omega^2t^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2t^2}}\sin\omega t-\frac{\omega t}{\sqrt{1+\omega^2t^2}}\cos\omega t\right)\\&=\frac{f_0}{2\omega^2}\sqrt{1+\omega^2t^2}(\cos\alpha\sin\omega t-\sin\alpha\cos\omega t)\\&=\frac{f_0}{2\omega^2}\sqrt{1+\omega^2t^2}\sin(\omega t-\alpha)\end{aligned}$$



[참고] $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$

이고, 여기서 $\tan\alpha = \omega t$ 이다. 따라서 $x(t)$ 의 진폭은 시간의 함수 $\frac{f_0}{2\omega^2}\sqrt{1+\omega^2 t^2}$ 이고 이는 시간에 대한 증가함수이므로 공진이 발생한다.

(마) i) 특정한 진동수의 지진에 의한 건물의 공진을 감소시키기 위해서는 건물의 고유진동수가 지진의 진동수로부터 멀어져야 한다. 그런데 건물의 고유진동수는 질량 m과 건물의 강성 또는 탄성을 나타내는 용수철 상수 k와 관계되므로($k = F/x$ 에서 k는 단위 변형당 가해지는 힘이므로 건물의 탄성을 줄이거나 강성을 증가시키면 k값이 증가한다.) 건물의 질량 m과 k로 나타나는 탄성 또는 강성을 변화시켜 공진을 줄일 수 있다.

ii) 따라서 건물의 질량을 변화시키거나 건물의 탄성 또는 강성을 변화시키는 합리적인 행위를 모두 답으로 간주한다. 보조재를 추가하여 기둥을 보강하고, 바닥판과 건물의 결합을 강화하고, 트러스(truss), 브레이싱(bracing) 등의 공법으로 구조물의 결합력을 높이는 것 등이 예가 될 것이다.

문제 3

수학의 여러 개념들이 복합적으로 연관된 이 문제를 푸는데 핵심을 이루는 것은 정수 및 유리수의 성질과 기하학적 도형들과의 관계를 이해하는 능력이다. 초반 문제들은 간단한 기하학적인 아이디어와 단순한 수식을 사용하여 풀 수 있지만, 이후에서는 귀납적으로 주어진 상황을 이해하고 또한 이를 이용하여 논리적인 증명을 도출할 수 있는지 묻고 있다. 간단한 계산 능력과 함께 각 문항에서 알게 되는 사실들을 문제에서 적절히 사용할 수 있는지의 종합적인 사고 능력을 평가하는 데에 이 문제의 목적이 있다. 각 소문항의 출제 의도는 다음과 같다.

(가) 주어진 두 유리수를 벡터 형태로 표현함으로써 제시문의 연산이 벡터의 합이 된다는 관점의 변화를 이해할 수 있는지 묻는 문제이다.
(나) 문제 해결에 필요한 기초적인 몇 가지 사실들을 피타고라스의 정리 및 공약수와 정수의 성질로부터 이끌어낼 수 있는지 평가하는 문제이다.
(다) (나)를 사용하여 처음에 제시된 세 유리수의 관계를 세 개의 원이 만족하는 기하학적 관계와 연관시키는 문제이다.
(라) 주어진 도형의 개수를 (다)에 주어진 관계를 여러 번 적용하여 알아내도록 하는 문제이다.
(마) 앞의 문제들을 통해 알게 된 사실을 논리적으로 조합하여 새로운 결론을 얻어낼 수 있는지 확인하는 문제이다.

정답 예시

(가) 구하는 직선은 점 $(b+d, a+c) = (b,a) + (d,c)$를 지난다. 따라서 두 벡터 (b,a)와 (d,c)의 합에 해당하는 점을 지나는 직선이다. 이 점은 벡터 $(b,a), (d,c)$를 변으로 갖는 평행사변형의 꼭지점이다. 평행사변형의 대각선은 양 변 사이에 위치하므로 기울기는 $\frac{a}{b}$와 $\frac{c}{d}$ 사이의 값이다.

(별해) 기울기가 $\frac{a+c}{b+d}$인 직선은 원점과 점 $\left(\frac{b+d}{2}, \frac{a+c}{2}\right)$를 지난다. 이때 점 $\left(\frac{b+d}{2}, \frac{a+c}{2}\right)$는 주어진 두

점 (b,a)와 (d,c)를 잇는 선분의 중점이므로 이 직선의 기울기는 $\frac{a}{b}$와 $\frac{c}{d}$ 사이의 값임을 알 수 있다.

(나)

i) $r=\frac{1}{2b^2}$, $R=\frac{1}{2d^2}$ 이라 하자. 두 원의 중심 사이의 거리를 D라 하면 피타고라스의 정리에 의해 $D^2=\left|\frac{a}{b}-\frac{c}{d}\right|^2+|R-r|^2$을 얻는다. 따라서

$$\begin{aligned}D^2-(R+r)^2 &= \left(\frac{a}{b}-\frac{c}{d}\right)^2+(R-r)^2-(R+r)^2\\ &= \left(\frac{ad-bc}{bd}\right)^2-4rR=\left(\frac{ad-bc}{bd}\right)^2-4\frac{1}{2b^2}\frac{1}{2d^2}\\ &= \frac{(ad-bc)^2-1}{b^2d^2}\end{aligned}$$

이다. 두 원이 접하는 필요충분조건은 $D^2-(r+R)^2=0$이므로 $(ad-bc)^2=1$, 또는 $|ad-bc|=1$을 얻는다.

ii) 양수 k가 a, b의 공약수라 하고 $a=mk$, $b=nk$라 두면 $ad-bc=mkd-nkc=(md-nc)k=\pm 1$로부터, 정수의 곱이 ± 1이 되는 경우 $k=1$이어야 하므로 $\frac{a}{b}$는 기약분수이고, 동일한 방법으로 $\frac{c}{d}$도 기약분수임을 알 수 있다.

iii) $\frac{a}{b}\neq\frac{c}{d}$에 의해 $ad-bc\neq 0$이며, $ad-bc$는 정수이므로 i)의 식으로부터 항상 $D^2-(r+R)^2\geq 0$이다. 즉, 만약 $|ad-bc|\neq 1$이라면 $D^2-(r+R)^2>0$이므로 두 원은 만나지 않는다.

(다)

i) (나)의 결과에 의해 $|a(b+d)-b(a+c)|=1$과 $|c(b+d)-d(a+c)|=1$임을 보이면 된다. 주어진 가정에 의해 $|a(b+d)-b(a+c)|=|ad-bc|=1$이며 동일하게 두 번째 등식도 성립한다.

ii) 역시 (나)의 방법으로 $|a(b+d)-b(a+c)|=1$는 $\frac{a+c}{b+d}$가 기약분수임을 의미한다. (이 식은 (나)에서 c,d 대신 $a+c,b+d$가 쓰인 것만 다를 뿐 나머지는 동일하다.)

(라) (다)의 결과를 계속 적용해 가면 처음 $\frac{0}{1},\frac{1}{1}$에서 시작해서 인접하는 두 분수 $\frac{a}{b},\frac{c}{d}$ 사이의 새 원의 위치는 $\frac{a+c}{b+d}$이고 일반적으로 $\frac{a}{b}$에 위치한 원의 반지름이 $\frac{1}{2b^2}$가 된다. $\frac{1}{50}=\frac{1}{2\cdot 5^2}$이므로 위 과정에서 분모가 5인 분수를 찾으면 된다.

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
\frac{0}{1} & & & & & & & & & & & & & & & & \frac{1}{1}\\
\frac{0}{1} & & & & & & & & \frac{1}{2} & & & & & & & & \frac{1}{1}\\
\frac{0}{1} & & & & \frac{1}{3} & & & & \frac{1}{2} & & & & \frac{2}{3} & & & & \frac{1}{1}\\
\frac{0}{1} & & \frac{1}{4} & & \frac{1}{3} & & \frac{2}{5} & & \frac{1}{2} & & \frac{3}{5} & & \frac{2}{3} & & \frac{3}{4} & & \frac{1}{1}\\
\frac{0}{1} & \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & \frac{2}{7} & \frac{1}{3} & \frac{3}{8} & \frac{2}{5} & \frac{3}{7} & \frac{1}{2} & \frac{4}{7} & \frac{3}{5} & \frac{5}{8} & \frac{2}{3} & \frac{5}{7} & \frac{3}{4} & \frac{4}{5} & \frac{1}{1}
\end{array}$$

이며 이후에는 분모가 5보다 큰 분수만 새로 등장하므로 $b=5$인 위치는 위에서 $\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{3}{5},\frac{4}{5}$이다. 총 4개의 원을 그리게 된다.

(마) 원을 그리는 단계를 충분히 거치면 반지름의 길이가 $\frac{1}{266450}$인 원을 어디에도 그릴 곳이 없는 도형을 얻게 됨을 문제에서 이미 설명하였다. 또한 가정에 의해 이 도형에는 $\frac{256}{365}$위에 반지름의 길이가 $\frac{1}{266450}$인 원은 존재하지 않는다. 그러므로 $\frac{256}{365}$위에 반지름의 길이가 $\frac{1}{266450}$인 원 C를 그리면 이 도형의 원 중에 원 C와 두 점에서 만나는 것이 있어야 한다. 문제 (나)의 결과에 의해, C와 이 도형의 임의의 원은 서로 접하거나 또는 만나지 않기 때문에 이는 모순이다.