2013학년도 수시 논술고사 출제문제

◆ 대학명: 홍익대학교
◆ 모집시기: 수시 1차
◆ 전형명칭: 수시 일반전형
◆ 모집계열: 자연
◆ 출제유형: 일반논술형
◆ 개요

- 시험시간: 150분
- 출제문항수: 3문제
- 답안지 양식, 작성 분량: 무선, 분량은 제한 없으며 문제별로 A4 크기의 양면 답지 제공
- 지정된 필기구 : 청색 볼펜만 사용 가능
- 수험생 유의사항:

1. 자신을 드러내는 표현이나 불필요한 표시가 있는 답안은 0점으로 처리합니다.
2. 답안은 반드시 청색 볼펜으로만 작성하여야 합니다.
3. 답안을 수정할 경우에도 청색 볼펜만을 사용하여야 합니다. 수정액이나 수정테이프는 사용할 수 없습니다.
4. 본 문제지는 총 6장입니다.
5. 총 3문제가 있으며 문제 1에 20점, 문제 2에 40점, 문제 3에 20점을 배점합니다.
6. 문제 1번은 (가) ~ (다), 문제 2번은 (가) ~ (바), 문제 3번은 (가) ~ (나)로 구성됩니다.

◆ 출제방향(취지) 및 교과서 관련여부 및 근거:

출제방향(취지)

대학 교육이수에 기본적으로 요구되는 독해, 분석, 종합 능력, 응용력, 논증력, 창의력, 표현력 등을 평가하기 위하여 다음 사항을 평가는 것을 목표로 한다.

- 자연과학 여러 분야에 대한 제시문을 읽고 내포된 문제들을 요약, 이해할 수 있는가
- 문제를 해결하기 위한 논리적 사고를 할 수 있는가
- 문제 해결을 위한 자기의 생각을 적절한 수학적 표현을 통해 논리적으로 기술할 수 있는가

자연계열 논술문제는 고등학교 수학(과학)교과 내용을 응용하여 출제한다. 다만, 익숙한 문제를 최소화하여, 어려워 보이지만 고등학교 교과과정 내의 기본 원리와 개념을 정확하게 이해하고, 문제를 분석하여 해결하려는 수학적 사고력을 길러온 학생들은 쉽게 해결할 수 있도록 출제한다.

교과서 관련여부 및 근거:

문제 1.

로그 : 수학 1 (두산동아, 2010, 우정호외) 89 - 108

문제 2.

함수 : 수학 (성지출판, 2008, 계승혁외), 240 - 255
결합법칙 : 수학 (성지출판, 2008, 계승혁외), 16 - 17
수열 : 수학 1 (두산동아, 2010, 우정호외) 119 - 218

문제 3.

도형의 방정식 : 수학 (성지출판, 2008, 계승혁외), 165 - 236
원 : 중학교 수학 3 (천재교육, 2010, 이준열외), 183 - 223
삼각함수 : 수학 (성지출판, 2008, 계승혁외), 288-297
삼각합수 : 수학 2 (두산동아, 2010, 우정호외, 43 - 72

◆ 평가기준:
① 논지를 제대로 이해하고 요구하는 바를 충분히 이행하고 있는가?
② 답안을 논리적이고 모순 없이 명확하게 서술하고 있는가?
③ 문제 해결이 창의적인가?

◆ 출제문제: 계열별로 구분
-자연

문제 1 (20점)

로그는 $3^x = 5$와 같은 지수 방정식을 풀 때도 사용되지만 동위원소의 반감기를 구하거나 산성도(pH), 지진의 규모(Richter, 리히터), 별의 밝기 등을 나타내는 데도 사용된다. 또한 측정한 자료가 광범위하게 변화하는 경우에도 로그를 사용하면 편리한 경우가 많다.

다음 표는 지구의 역사에서 중요한 사건이 발생한 시점을 나타낸 것이다. 홍익이네 반에서는 이 사건들을 수직선에 나타내려고 한다.

사건	기원전(단위100만년)	사건	기원전(단위100만년)
(1) 지구의 탄생	4450	(5) 공룡의 멸종	67
(2) 식물의 발생	2500	(6) 포유류의 발생	36
(3) 척추동물의 출현	570	(7) 유인원의 출현	5
(4) 공룡의 출현	245	(8) 인류의 발생	1

(예를 들어, “(5) 공룡의 멸종” 사건은 기원전 6700 만 년에 발생하였다.)

(가) 가로 30cm 크기의 종이에 가로 방향으로 그려진 직선이 있고, 여기에 1cm 간격으로 눈금을 표시하자. 1cm 간격은 100만년의 기간을 나타낸다. 이 수직선에 위의 8개의 사건을 표시하고자 한다면 어떤 문제점이 발생할지를 구체적으로 서술하시오.

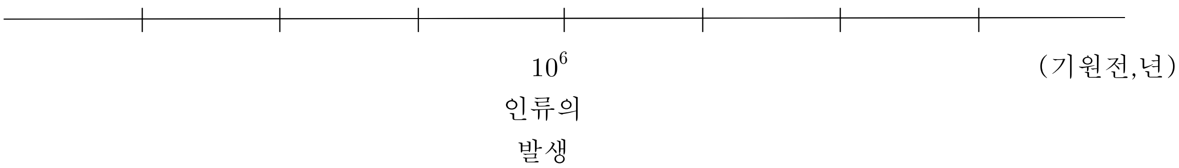
그리고 만약 1cm 간격이 10억년의 기간을 나타내면 어떤 문제점이 발생하는지를 구체적으로 서술하시오.

(나) 이번에는 한 눈금의 값이 바로 왼쪽의 눈금 값의 $\frac{1}{10}$이 되도록 표시하는 방법을 선택하여 위의 사건들을 나타내고자 한다. 아래의 수직선 위에는 “인류의 발생” 사건이 정 중앙의 눈금에 표시

되어 있다. 답안지에 아래와 동일한 수직선과 눈금을 그리고, “인류의 발생” 눈금의 왼쪽과 오른쪽에 있는 각각 세 개의 눈금들에 해당하는 값을 표시하시오

이 수직선에 “(4) 공룡의 출현” 시점과 “(6) 포유류의 발생” 시점이 각각 어느 눈금 사이에 위치하는지 나타내려고 한다. 이때 각 위치는 두 눈금 사이의 중앙점을 기준으로 왼쪽, 오른쪽 중 어디에 나타나는지를 명확히 표시하고, 그 이유를 구체적으로 기술하시오.

우리나라 역사에서 고조선은 기원전 2300년에 성립되었다고 한다. 이 시점도 같은 수직선 위에 동일한 방법으로 나타내시오. (단, $\log 2 = 0.30$, $\log 3 = 0.47$로 하자.)



LOG는 두 양의 관계를 나타내는 데 사용할 수 있다.
x와 y의 관계를 아래와 같이 정의하고, 이를 데시벨(decibel, 단위: dB)이라고 부르기로 한다.

$$10 \times \log\left(\frac{y}{x}\right)$$

예를 들면

$\frac{y}{x} = 1$ 이면, 0(dB)

$\frac{y}{x} = 10$ 이면, 10(dB)

$\frac{y}{x} = 0.1$ 이면 -10(dB)이다.

위의 정의를 이용하여 다음의 문제를 생각해 보기로 하자.

서울에서 대전으로 초고속 인터넷망을 통해 광통신 신호를 보내려고 한다. 광통신에서 신호의 전송은 광자라고 불리는 빛 입자가 광섬유를 통해 전송됨으로써 이루어진다. 광섬유를 통해 전송될 때는 광자들의 손실이 발생한다. 광섬유의 길이가 1km이면, 보낸 광자수와 받은 광자수의 비율, $\frac{\text{받은광자수}}{\text{보낸광자수}}$는 위에서 정의한 데시벨 단위로 -0.2(dB) 이 된다고 하자.

(다) 서울과 대전 사이의 광섬유 길이가 150km이고, 이 광섬유를 통해 서울에서 10^{10}개의 광자를 보낸다면 대전에서 받은 광자의 개수는 몇 개인지 구하시오.

문제 2 (40점)

0과 양의 실수를 10진법으로 표현하고 유효숫자 3개만 사용하여 덧셈과 곱셈을 하는 방법을 생각해 보려고 한다. 예를 들어, 유효숫자 3개만 사용하여 1224와 56.78의 덧셈을 해 보자. 1224는 1220으로 56.78은 56.8로 간주하고, $1220 + 56.8 = 1276.8$에서 1280을 얻는 셈을 생각하려는 것이다. 다음 글은 이러한 생각을 보다 정교하게 구현한 것이다. 읽고 물음에 답하시오.

(가) $R' = g(F) = \{g(u,v) \mid (u,v) \in F\}$이라 하자. R'의 원소 중 0이 아니면서 크기가 최소인 것은

F^*는 순서쌍 (u,v)의 집합으로서, 여기서 u와 v는 정수이고 각각 조건 $0 \le u \le 9$과 $100 \le v \le 999$를 만족한다. $F = F^* - \{(9,999)\}$라 하자. 실수집합을 R, 0과 양의 실수들의 집합을 $R^+ = \{r \in R | r \ge 0\}$이라 하자. 실수집합 R의 원소가 아닌 것을 도입하여 기호 ∞로 표기하고, $R^* = R^+ \cup \{\infty\}$라 하자. 이때 함수 $g: F^* \to R^*$를 다음과 같이 정의하자:

(1) $g(0,100) = 0$,
(2) $g(9,999) = \infty$,
(3) $(u,v) \notin \{(0,100),(9,999)\}$이면, $g(u,v) = v \times 10^{u-7}$.

예를 들어, $g(5,123) = 123 \times 10^{-2} = 1.23$이다.

0.0000101인데 이를 ϵ으로 표기하자. R'의 원소 중 크기가 최대인 것을 Ω으로 표기하면, Ω의 값은 무엇인가?

이제 함수 $f: R^+ \to F^*$를 다음과 같이 정의하자.

(4) $r=0$이면, $f(0) = (0,100)$이다.
(5) r이 ϵ보다 작으면 $f(r) = (0,100)$이다.
(6) r이 Ω보다 크면 $f(r) = (9,999)$이다.
(7) 위 (4), (5), (6)이 아닌 경우, $\epsilon \le r \le \Omega$이다. 이때, $r \times 10^a$을 소수점 아래 첫째 자리에서 반올림한 값이 100 이상이고 998 이하가 되는 정수 a는 유일하게 존재한다. 그 반올림한 값을 b라 하고, $f(r)$은 $(7-a, b)$로 정의하자.

예를 들어, $r = 5555$인 경우를 생각하자. $5555 \times 10^{-1} = 555.5$이고 555.5를 소수점 아래 첫째 자리에서 반올림하면 556이다. $100 \le 556 \le 998$이므로 $f(5555)$는 $(7-(-1), 556) = (8,556)$이다.

(나) $f(0.0012)$는 무엇인가?

이제 집합 F에 이항연산 $\oplus$와 $\otimes$을 다음과 같이 정의하자.

(8) $(u_1,v_1) \oplus (u_2,v_2)$는 $f(g(u_1,v_1) + g(u_2,v_2))$로 정의하자.
(9) $(u_1,v_1) \otimes (u_2,v_2)$는 $f(g(u_1,v_1) \times g(u_2,v_2))$로 정의하자.

(다) $(4,123) \oplus (7,456)$은 무엇인가?

(라) $f(\frac{1}{3}) \otimes f(3)$은 무엇인지를 쓰고, 그 값을 얻게 되는 과정을 기술하시오.

(마) 집합 F의 이항연산 $\oplus$과 $\otimes$에 대하여 교환법칙은 모두 성립한다. 그러나 결합법칙은 성립하지 않는다. 예를 들어 아래 조건을 만족하는 (u,v)가 존재한다.

$$((4,300) \oplus (4,300)) \oplus (u,v) \ne (4,300) \oplus ((4,300) \oplus (u,v))$$

이러한 (u,v)를 F에서 하나 찾고, 좌변과 우변의 값을 쓰시오.

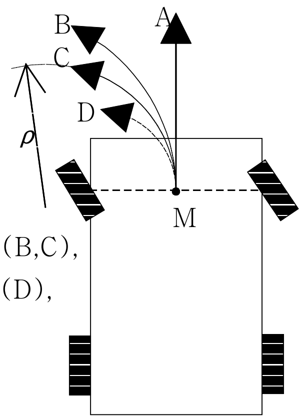
(바) 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots$ 은 무한대로 발산한다. 다음의 점화식에 의해 정해지는 수열 a_n을 생각하자.

$$\begin{cases} a_1 = g(f(1)), \\ a_n = a_{n-1} + g(f(\frac{1}{n})),\ n \geq 2. \end{cases}$$

수열 a_n은 수렴함을 설명하시오.

문제 3 (20점)

일반 승용차의 주행 방향은 운전대의 조작에 따라 바뀌는 앞바퀴의 조향각에 의해 결정된다. 운전대를 시계 방향 또는 반시계 방향으로 회전하면 그 각에 비례하여 앞바퀴의 조향각이 바뀌어 자동차가 회전하며 전진한다. 운전대를 회전하여 그 상태를 유지한 채 자동차를 움직이면, 그 이동 경로는 원의 일부가 되며, 이 원은 중심(회전 중심)의 위치와 반지름(회전 반경) ρ로 기술된다. 앞바퀴 조향장치의 설계구조에 따라 회전 반경의 최솟값이 결정된다. 즉, 운전대를 끝까지 돌렸을 때 가장 작은 원을 따라 회전하게 되며

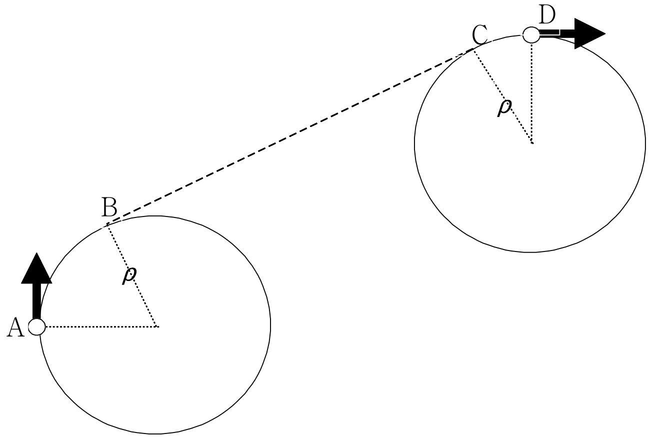


직진(A), 좌회전(B,C), 불가능한 좌회전(D), 회전반경 ρ

이때의 회전 반경이 최소 회전 반경이다. 최소 회전 반경보다 더 작은 반지름의 원을 따라 회전하는 것은 불가능하다. 자동차의 위치는 두 앞바퀴의 사이의 중앙에 해당하는 점 M의 위치로 표시하고, 자동차의 경로도 점 M의 경로로 표시하자.

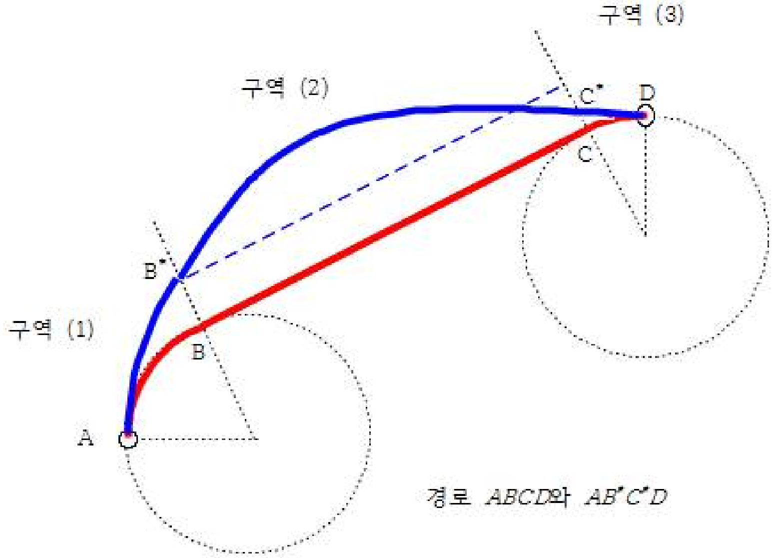
자동차가 회전하며 전진할 때는 자동차의 위치뿐 아니라 자동차의 방향도 변한다. 시작 위치와 시작 방향, 최종 위치와 최종 방향이 주어졌을 때, 자동차가 따라가는 길을 자동차의 운전경로라고 한다. 우리는 길이가 가장 짧은 운전경로를 찾아보려고 한다.

아래 그림과 같이 초기 위치 A와 최종 위치 D가 주어지고, 각각의 위치에서 주어진 방향이 화살표로 표시되고, 최소 회전 반경이 ρ일 때, A에서 화살표 방향으로 출발하여 D에 화살표 방향으로 도착하는 운전경로는 무수히 많다. 먼저 그림과 같이 점 A와 D에 접하는 반지름 ρ인 원을 그리고, 두 원의 공통 접선을 그리면, 원호 $\overset{\frown}{AB}$ ⇨ 직선 $\overline{BC}$ ⇨ 원호 $\overset{\frown}{CD}$로 이루어진 곡선이 운전경로이다.



원호, 직선, 원호로 이루어진
운전경로

또한 아래 그림의 곡선 AB^*C^*D를 따라 이동하는 것도 가능한 운전경로의 한 예이다. 이때 B^*는 원의 중심과 B점을 지나는 직선이 운전경로와 만나는 점이며 C^*점도 마찬가지이다.

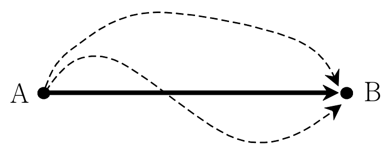


경로 $ABCD$와 AB^*C^*D

위 그림과 같은 경우 운전경로 $ABCD$의 길이와 운전경로 AB^*C^*D의 길이를 세 개의 구역 (1), (2), (3)으로 나누어 비교할 수 있다. 사실 일반적인 경우에도 모든 가능한 운전경로 가운데 길이가 가장 짧은 것은 원호 $\widehat{AB}$ ⇨ 직선 $\overline{BC}$ ⇨ 원호 $\widehat{CD}$ 꼴로 이루어진 경로이다. (이때 원호나 직선은 점일 수도 있다.)

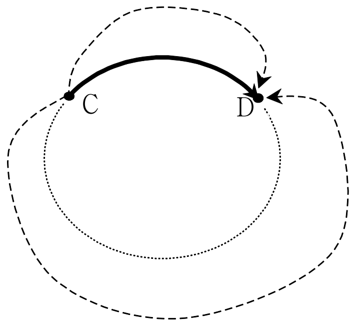
(가) 아래에 제시한 사실 ①과 ②를 이용하여 운전경로 $ABCD$의 길이가 운전경로 AB^*C^*D의 길이보다 짧다는 것을 논리적으로 설명하시오.

① 점 A에서 B까지 가는 경로 가운데 길이가 가장 짧은 것은 A와 B를 잇는 직선을 따른 것이다.

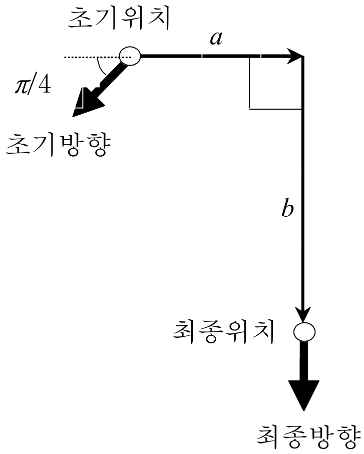


② 원 내부를 지나지 않으면서 원주상의 점 C에서 점 D까지 가는 경로들 중 길이가 가장 짧은 것

은 원호 $\widehat{CD}$를 따른 것이다.



(나) 초기/최종 위치와 방향이 아래 그림과 같이 주어질 때 길이가 가장 짧은 운전경로를 그림으로 나타내고 그 길이를 계산하시오. 최소 회전 반경은 앞의 경우와 같이 ρ이며, $a > \rho$, $b > 2\rho$의 조건을 만족한다.



◆ 출제문제 해설: 계열별로 구분

문제 1

로그함수와 지수함수의 성질을 이해하고 적용할 수 있는 지 묻는 문제이다. 약 45억년의 지구의 역사에서 8개의 사건이 발생한 시점이 주어졌는데 그 가운데 (5)-(8)까지의 4개의 사건들이 1억년 이내에 발생한 것이다. 질문 (가)에서는 이 사건들이 발생한 시점을 수직선위에 나타낼 때 생길수 있는 문제점을 서술하도록 하여, 지문을 이해하고 서술하는 기본능력을 묻고 있다. 질문 (나)에서는 로그눈금을 도입하고, 특정한 사건을 표시한 점이 두 눈금 사이의 중앙점을 기준으로 왼쪽, 오른쪽 중 어디에 나타나는지 판별하도록 하였다. 질문 (다)에서는 보낸 광자수를 N_t, 받은 광자수를 N_r이라 할 때, 로그함수를 지수함수로 변환하여 N_t와 N_r과의 관계식을 찾을 수 있는지, 지수함수의 성질을 이용하여 L km 전송 후의 관계를 아는지 묻고 있다.

문제 2

이 문제의 지문은 실제 컴퓨터에서 실수를 표현할 때 쓰는 부동소수점 방법을 10진법을 이용한 단순한 형태로 제시한 것이다. 집합, 함수, 수체계, 수열등의 기본 개념을 이용하여 어떤 새로운 체계를 정하고 있으며, 지문을 잘 읽고 그 체계를 이해하는 정도를 평가하는데 문제의 주된 목적이 있다.

문제 3

자동차가 전진할 때 자동차의 위치뿐 아니라 자동차의 방향도 변한다. 시작 위치와 시작 방향, 최종 위치와 최종 방향이 주어질 때 자동차가 따라가는 길 가운데 길이가 가장 짧은 것에 대해 묻고 있다. 지문에 주어진 사실을 이용하여 질문을 해결하는 과정을 보아 학생의 논리적 사고력을 평가하는데 이 문제의 주된 목적이 있다.