홍익대학교 **2012**학년도

수시모집 자연계 논술고사 문제지

지원학과(부)	수험번호	성 명

<유의사항>

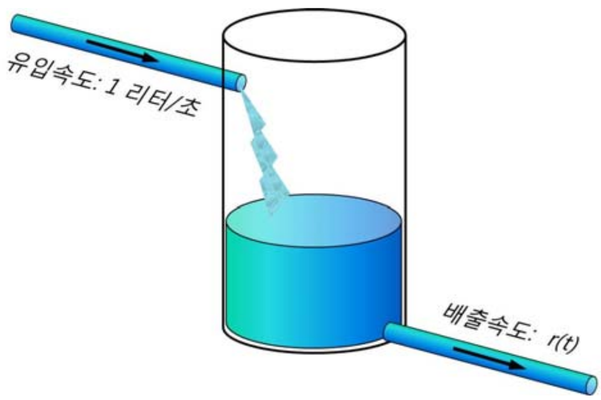
1. 자신을 드러내는 표현이나 불필요한 표시가 있는 답안은 0점으로 처리합니다.
2. 답안은 반드시 흑색 볼펜으로만 작성하여야 합니다.
3. 답안을 수정할 경우에도 청색 볼펜만을 사용하여야 합니다. 수정액이나 수정테이프는 사용할 수 없습니다.
4. 본 문제지는 총 4장입니다.
5. 총 3문제가 있으며 각 문제의 배점은 동일합니다.
6. 문제 1번과 2번은 (가) ~ (다), 문제 3번은 (가) ~ (라)로 구성됩니다.

문제 **1**

오른쪽 그림과 같이 물을 공급하는 유입관과 물이 외부로 배출되는 유출관이 연결된 수조가 있다. 수조에 1 (리터/초)의 속도로 물이 유입되며, 수조에서 물이 배출되는 속도는 다음의 함수로 주어진다.

$$r(t) = \frac{4}{\sqrt{t+1}}, \quad t \ge 0.$$

여기서 시간 t의 단위는 (초)이고, $r(t)$의 단위는 (리터/초)이다. 초기($t = 0$)에 수조에는 9 리터의 물이 담겨져 있다.



(가) 함수 $f(t)$는 초기 수조에 담겨있는 물의 양과 0초부터 t초까지 수조로 유입된 물의 양의 합이라 하고, 함수 $g(t)$는 0초부터 t초까지 수조에서 배출된 물의 양이라 하자. 이 두 함수의 그래프를 그리고 교점을 구하시오. 또한 이 교점이 의미하는 바를 수조에서 일어나는 현상과 관련지어 논술하시오.

문제 (가)에서와 유사한 개념의 그래프는 교통 신호 분석, 컴퓨터 네트워크 분석 등에 유용하게 쓰일 수 있다. 이제 문제 (가)에서의 물의 유입과 배출에 관한 사항을 교통 신호 문제에 적용해 보자. 차량의 수를 물의 양과 같이 실수값을 가지는 연속적인 양으로, 차량의 흐름도 연속적인 유체의 흐름으로 가정하자.

편도 1차선인 도로의 횡단보도 위에 차량을 위한 녹색과 적색의 2색 신호등이 있다. 차량은 녹색등이 점등되어 있을 때 횡단보도를 지나갈 수 있으나, 적색등이 점등되어 있을 때는 통과할 수 없다. 녹색등과 적색등은 번갈아 가며 켜지고, 적색등이 켜진 시점으로부터 다음번 적색등이 켜질 때까지의 시간은 T (초)이다. 이 T초 구간에 적색등이 점등되어 있는 시간은 T_r (초)이고, 녹색등이 점등되어 있는 시간은 T_g (초)이며, $T = T_r + T_g$이다. 시간 $t = 0$에서 적색등이 켜진다. 이 도로로 유입되는 차량은 항상 일정하게 초당 λ대이고, 녹색등이 점등되어 있는 동안에는 초당 μ대가 횡단보도를 지나간다.

우리는 임의의 시간 t_0에서 대기하는 차량의 수에 관심이 있다. 임의의 시간 t_0에서 대기하는 차량의 수란, $t = 0$에 횡단보도 정지선에 대기하고 있는 차량의 수와 0초에서 t_0초까지 이 도로로 유입된 차량의 총 수의 합에서, 0초에서 t_0초까지 횡단보도를 지나간 차량의 총 수를 뺀 값이다.

$T_r : T_g = 1 : 2$이며, $2\mu \geq 3\lambda$인 경우에 대해 다음의 물음에 답하시오.

(나) $t = 0$에 k대의 차량이 횡단보도 정지선에 대기하고 있다고 하자. $t = 2T$일 때, 대기하는 차량의 수가 0이기 위한 k의 조건을 μ, λ, T_r을 사용하여 표현하시오.

(다) 이번에는 $t = 0$에 횡단보도 정지선에서 기다리던 차량은 없다고 하자. $t = \frac{9}{2}T$일 때, 대기하는 차량의 수를 μ, λ, T_r을 사용하여 표현하시오.

문제 2

멘델의 유전법칙에 따르면 각 개체의 유전자형은 부모 각각으로부터 하나씩 받은 두개의 유전자에 의해 결정된다. 여기서 부모란 유전자를 자식에게 전해주는 두 개체를 의미한다. 양쪽 부모로부터 모두 유전자 D를 받은 경우의 유전자형을 DD, 모두 유전자 d를 받은 경우를 dd, 부모 중 어느 한쪽에게서 D를 받고 다른 한쪽에게서 d를 받은 경우를 Dd라 표현하자. 또한 각 개체는 자기가 가지고 있는 두개의 유전자 중 하나를 자식에게 무작위로 전해준다. 예를 들면, 유전자형 Dd를 가진 개체는 D나 d를 각각 $\frac{1}{2}$의 확률로 자식에게 전해준다.

하디-바인베르크 법칙(Hardy-Weinberg law)에 의하면 무한한 크기의 집단에서 무작위로 교배가 일어나고, 돌연변이나 이주, 혹은 자연 선택과 같은 일이 없다고 가정했을 때, 유전자형의 비율이 일정 세대가 지나면 변하지 않는다고 한다.

이러한 가정에 맞는 어떤 집단의 초기 유전자형 DD, Dd, dd의 비율을 각각 p_0, q_0, r_0 $(p_0 + q_0 + r_0 = 1)$라 하자. 이 경우 집단내의 유전자 D와 d의 비율은 각각 $\alpha = p_0 + \frac{1}{2}q_0$, $\beta = r_0 + \frac{1}{2}q_0$로 생각할 수 있다. 이 집단에서는 임의의 두 개체가 모여 다음 세대의 개체를 생산한다. 처음의 집단을 0세대라 하고, 0세대로부터 생산된 개체들만의 집단을 1세대라고 하자. 1세대는 같은 방법으로 2세대를 생산한다. 이 때, 1세대의 유전자형 DD, Dd, dd의 비율은, α와 β의 비율을 갖는 유전자 D와 d의 풀(pool)에서 임의로 뽑은 두 유전자가 모두 D일 확률, D와 d일 확률, 모두 d일 확률과 각각 같음을 알 수 있다.

(가) 위 집단의 1세대의 유전자형 DD, Dd, dd의 비율, p_1, q_1, r_1과 2세대의 유전자형 DD, Dd, dd의 비율, p_2, q_2, r_2를 각각 α와 β로 표현하시오. 이 결과를 바탕으로 하디-바인베르크 법칙의 정당성에 대해 논하시오.

어떤 단체의 회원들은 모두 3장의 카드를 가지고 있는데 각각은 A카드이거나 a카드이다. 각 회원은 가지고 있는 카드에 따라 AAA, AAa, Aaa, aaa의 네 가지로 구분되며, 이에 따라 회원의 등급이 결정된다. A카드를 두 장 이상 가진 회원은 골드회원이고 그렇지 않은 회원은 실버회원이다. 즉, AAA, AAa는 골드회원이고 Aaa, aaa는 실버회원이다.

이 단체의 규정에 따르면 같은 기의 회원 중에서 무작위로 선택된 세 명이 다음 기의 회원을 추천한다. 초기 회원을 0기 회원이라 하자. 0기 회원은 1기 회원을 추천하며, 1기 회원은 2기 회원을 추천한다. 즉, n기의 회원이 되기 위해서는 무작위로 선택된 $(n\text{-}1)$기의 회원 세 명으로부터 추천을 받아야 한다. 추천하는 세 명의 회원은 각자 자신의 카드 중 임의로 선택한 카드 하나의 복제본을 추천받는 회원에게 준다. 예를 들면, AAa회원이 추천받는 회원에게 A카드를 줄 확률은 $\frac{2}{3}$이고 a카드를 줄 확률은 $\frac{1}{3}$이다. 추천된 회원의 등급은 받은 세 장의 카드로 결정된다. 이 단체의 회원의 수는 충분히 크다고 하자.

(나) 초기 회원(0기)의 AAA, AAa, Aaa, aaa의 비율을 각각 p_0, q_0, r_0, s_0 $(p_0+q_0+r_0+s_0 = 1)$라 하자. 자연수 n에 대해, n기의 AAA, AAa, Aaa, aaa의 비율, p_n, q_n, r_n, s_n을 p_0, q_0, r_0, s_0로 나타내시오.

(다) 초기 골드회원 홍익이가 두 명의 실버회원과 함께 다음 대의 한 명의 회원을 추천하였는데, 추천된 회원이 골드회원이었다. 이 경우 홍익이가 AAA회원이었을 확률을 p_0, q_0, r_0, s_0로 나타내고, $p_0 = q_0 = r_0 = s_0$ 일 때의 값을 계산하시오.

문제 3

안드로메다를 여행하던 홍익이는 그곳에서 외계인을 만났다. 외계인은 3개의 문자를 사용하는데 각각의 문자를 a, b, c라고 부르기로 하자. 이들 외계인은 자연수 길이를 가지는 문자의 나열(예를 들어 $abaccabbbaab$)은 모두 단어로 사용한다. 앞으로 '단어'라는 용어는 항상 이러한 외계어의 단어를 지칭한다고 하자.

홍익이는 외계어의 사전을 만들기로 하였다. 모든 단어의 집합에 영어사전과 동일한 방법으로 순서를 부여하고, 두 단어 X와 Y가 있을 때, X가 사전에서 Y보다 앞에 등장할 경우

$$X < Y$$

라고 표기하자. 예를 들면 다음의 네 단어는 순서

$$abaccabbbaab < abba < bab < cab$$

를 만족하며, 이러한 순서를 단어들 사이의 '사전순서'라고 하자.

만약 두 단어 X와 Y가 $X < Y$를 만족하면서 $X < Z < Y$인 단어 Z가 존재하지 않는다면, X를 Y의 '앞 단어', Y를 X의 '뒷 단어'라고 하자.

(가) 두 단어 X와 Y를 다음과 같이 표현했을 때

$$X = x_1 x_2 \cdots x_m, \quad Y = y_1 y_2 \cdots y_n$$

$X < Y$ 일 필요충분조건을 문자 $x_1, \cdots, x_m, y_1, \cdots, y_n \in \{a, b, c\}$를 사용하여 서술하시오.

(나) 모든 단어에는 그 단어의 뒷 단어가 존재하는가? 그렇다면 그 이유를 설명하고, 그렇지 않다면 어떤 형태의 단어에 뒷 단어가 존재하는지 설명하시오.

(다) 모든 단어에는 그 단어의 앞 단어가 존재하는가? 그렇다면 그 이유를 설명하고, 그렇지 않다면 어떤 형태의 단어에 앞 단어가 존재하는지 설명하시오.

(라) 홍익이는 단어마다 실수값을 부여하여 두 실수값을 비교함으로써 단어들 사이의 사전순서를 이해하고자 한다. 모든 단어의 집합을 S라고 하고 실수의 집합을 $\mathbb{R}$이라고 하자. 각 단어 X에 실수값 $f(X)$를 주어, 임의의 두 단어가 $X < Y$를 만족할 때, $f(X) < f(Y)$가 되도록 하는 함수

$$f : S \to \mathbb{R}$$

의 예를 제시하시오.