홍익대학교 2011학년도

수시모집 자연계 논술고사 문제지

지원학과(부)	수험번호	성 명

<유의사항>

1. 자신을 드러내는 표현이나 불필요한 표시가 있는 답안은 0점으로 처리합니다.
2. 답안은 반드시 흑색 볼펜으로만 작성하여야 합니다.
3. 답안을 수정할 경우에도 흑색 볼펜만을 사용하여야 합니다 (수정액이나 수정테이프는 사용할 수 없습니다).
4. 각 문제의 배점은 동일합니다.

【문제 1】

(가) 순수 탄소(C)로 이루어진 활성탄이 순수 산소(O_2)와 함께 존재하여 화학반응(즉, 연소)이 일어나고 있다. 이 연소 반응에 대한 모델로서 다음의 두 화학반응식이 제안된다.

활성탄 표면: $2C + O_2 \rightarrow 2CO$ (1)

기체 중: $2CO + O_2 \rightarrow 2CO_2$ (2)

본 반응계에서 화학종은 탄소(C), 산소(O_2), 일산화탄소(CO), 이산화탄소(CO_2)의 4종이 존재하고 이들 화학종을 구성하는 원자는 탄소(C)와 산소(O)로서 2종이 존재한다. 위에서 제시된 두 반응을 사용하여 반응계 내의 화학종의 정량적 변화를 기술할 수도 있지만 이 두 반응 이외에도 화학종의 정량적 변화를 기술하기 위하여 사용할 수 있는 많은 반응 모델이 존재한다.

$C + O_2 \rightarrow CO_2$ (3)

$C + CO_2 \rightarrow 2CO$ (4)

$4C + 3O_2 \rightarrow 2CO + 2CO_2$ (5)

$2C + 3O_2 + 2CO \rightarrow 4CO_2$ (6)

⋮

만일 실제로 일어나는 화학반응이 무엇인가에는 관심이 없고 단지 포함된 화학종의 정량적 변화를 기술하고자 한다면 위의 화학반응식 중 어느 식이든지 두 가지를 사용하여도 상관없다.

(나) 화학반응식 내의 계수들을 벡터의 성분으로 이용하여 화학반응식을 벡터로 표현할 수 있다. 주어진 반응식의 반응물을 우변으로 모두 이항한 후 C, O_2, CO, CO_2의 계수를 벡터의 성분으로 순서대로 나열하자. 예를 들어, 반응식 (1)의 경우 반응물을 우변으로 모두 이항하면 아래와 같은 수식으로 바꿀 수 있고

$$0 = 2CO - 2C - O_2$$

위 반응식으로부터 만들어지는 벡터는 $(-2, -1, 2, 0)$이다. 이때 반응물의 계수는 음수가 되고 생성물의 계수는 양수가 된다.

(a) 화학반응식 (3)~(5)를 벡터 형태로 표현하시오.

(b) 벡터 $(-1,\ -1,\ 1,\ 1)$은 제시문의 화학종들로 구성된 그 어떠한 화학반응식으로부터도 만들어질 수 없다. 이 이유를 설명하고 벡터 $(a,\ b,\ c,\ d)$에 해당하는 화학반응식이 존재하기 위한 $a,\ b,\ c,\ d$의 조건을 기술하시오.

(c) 화학반응식 (6)은 화학반응식 (1)과 (2)를 이용하여 다음과 같이 표현된다.

$$\text{식}(6) = 1 \times \text{식}(1) + 2 \times \text{식}(2)$$

이를 벡터로 표현하면 아래와 같다.

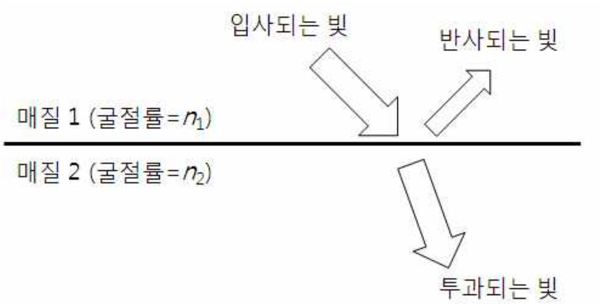
$$(-2,\ -3,\ -2,\ 4) = (-2,\ -1,\ 2,\ 0) + 2(0,\ -1,\ -2,\ 2)$$

같은 방법으로 화학반응식 (5)에 해당하는 벡터를 화학반응식 (3)과 (4)에 해당하는 벡터를 이용하여 표현하시오.

【문제 2】

진공에서 빛의 속도는 파장에 관계없이 일정한 값($c = 3 \times 10^8$ m/s)을 갖는다. 어떤 주어진 매질 내에서 빛의 속도 v에 대한 진공에서의 빛의 속도 c의 비를 그 매질의 굴절률($n = c/v$)이라 한다. 모든 매질에서 빛의 속도는 c보다 작거나 같으므로 그 굴절률은 1 이상이 된다.

빛은 균일한 매질 내에서는 직진하지만 매질이 다른 경계면에 도달하면 일부는 경계면에서 반사하고 나머지는 새로운 매질 내로 투과된다.



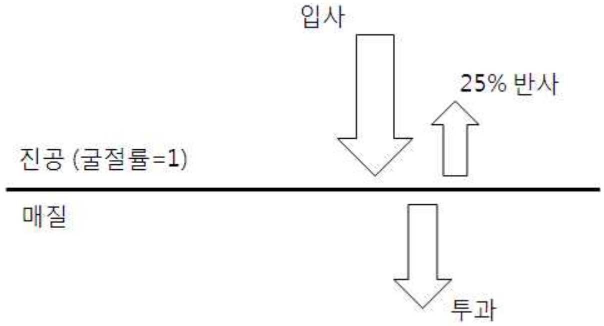
반사계수(R)는 입사되는 에너지에 대한 반사되는 에너지의 비이고, 투과계수(T)는 입사되는 에너지에 대한 투과되는 에너지의 비이다. 이 문제에서는 경계면에 수직으로 빛이 입사되는 경우만 고려하는데, 이때 각 계수의 값은 아래의 식으로 주어진다.

$$R = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2$$

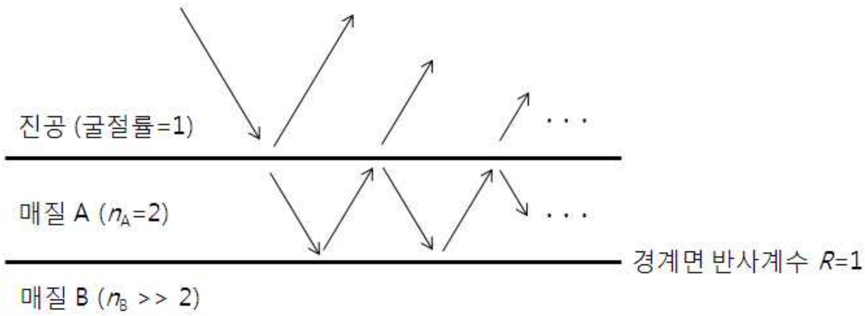
$$T = \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2} = 1 - R$$

이 문제에서는 빛의 진행과정에서 매질 내에서의 에너지 손실이 없다고 가정한다.

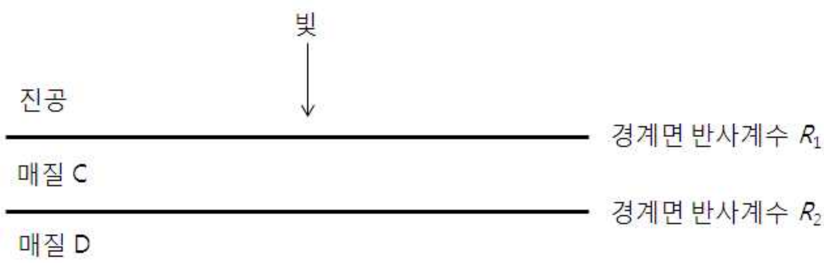
(a) 아래 그림과 같이 진공에서 매질의 면에 빛을 입사시키고 반사되어 나오는 빛을 측정하였더니 입사된 에너지의 25%가 반사되어 나왔다. 이때 주어진 매질의 굴절률을 구하고, 반사되는 에너지를 줄이고자 한다면 어떠한 굴절률을 갖는 매질을 선택해야 하는지 논하시오.



(b) 아래 그림과 같이 두 가지 매질 A와 B가 접촉되어 있는 경우를 고려해 보자. 매질 A의 굴절률은 2이고 매질 B의 굴절률은 매우 커서 두 매질간의 경계면에서 반사계수가 1이라고 가정하자. 즉, 두 매질 사이의 경계면에서는 모든 빛이 반사되고 투과되지는 못한다. 진공에서 빛이 들어오는 경우, 입사된 에너지가 1일 때 진공으로 되돌아 나오는 에너지의 총량을 계산하고 이러한 결과가 나오는 물리적 이유를 서술하시오.



(c) 아래 그림과 같이 두 가지의 매질 C와 D가 접촉되어 있는 경우를 고려해 보자. 두 경계면에서의 반사계수를 각각 R_1, R_2라고 하자. 진공에서 빛이 들어오는 경우, 입사된 에너지가 1일 때 진공으로 되돌아 나오는 에너지의 총량을 R_1, R_2의 식으로 표현하고, 이를 이용하여 (b)의 결과를 얻어낼 수 있음을 보이시오.



【문제 3】

(가) 임의의 자연수 n이 주어졌을 때, 1부터 n까지의 (1과 n을 포함한) 자연수 중 n과 서로 소인 자연수의 개수를 $\phi(n)$이라 하자. 이렇게 정의된 함수를 오일러의 ϕ 함수라 한다. 예를 들어, 1부터 10까지의 자연수 중 10과 서로 소인 수는 1, 3, 7, 9 이므로 $\phi(10)=4$ 이다. 또한, 오일러의 ϕ 함수는 다음 성질을 만족함이 알려져 있다.

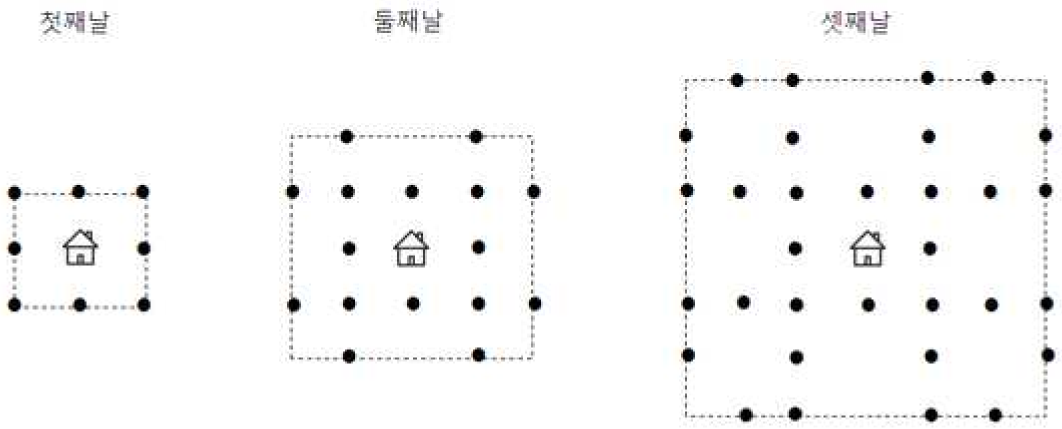
(1) 임의의 서로 소인 두 자연수 m, n에 대하여,

$$\phi(mn)=\phi(m)\phi(n).$$

(2) 임의의 소수 p와 자연수 n에 대하여,

$$\phi(p^n)=p^{n-1}(p-1).$$

(나) 중심에 원두막이 있고 그림과 같이 가로 세로 1미터 간격으로 나무를 심을 수 있는 과수원이 있다. 이곳에 매일 다음과 같은 방법으로 나무를 심는다.



위 그림과 같이, n번째 날에는 원두막을 중심으로 갖고 변의 길이가 $2n$미터인 정사각형의 변 위에 나무를 심되 중심에서 보았을 때 이전에 심은 나무에 의해 가려지지 않는 위치에만 심는다. 이때 나무의 굵기는 무시할 수 있을 만큼 작다고 가정한다.

(a) 임의의 자연수 n이 주어졌을 때, n번째의 날에 심은 나무의 개수를 오일러의 ϕ 함수를 사용하여 나타내는 방법을 설명하고, 이를 이용하여 열흘 동안 심은 나무의 총 개수를 구하시오.

(b) 나무를 매일 계속 심어나간다고 할 때, 하루에 48그루의 나무를 심게 되는 날을 모두 구하고, 풀이 과정을 서술하시오.