한양대학교 2020학년도 신입학전형 수시

자 연 계	**모 의 논 술 예 시 답 안**	1 번

1. 음함수의 미분법에 의해 $(3y^2+6y+4)y'=1$, 즉 $y' = \dfrac{1}{3y^2+6y+4} = \dfrac{1}{3(y+1)^2+1} > 0$이다.

   따라서 함수 $f(x)$는 증가함수이고 일대일 함수이다.

2. 함수 $g(x)$와 $h(x)$가 한 점에서 만날 조건은 함수 $g(x)$가 함수 $y=x$와 만날 조건과 동치이다.
$g(x)$의 정의에 의해

$$g(x)^3+3g(x)^2+4g(x)+1=f(x+k)^3+3f(x+k)^2+4f(x+k)+1=x+k$$

이므로, $g(x)=x$가 $g(x)$의 정의역 $\{x|x \ge -k\}$에서 해를 가질 조건은 삼차 방정식 $x^3+3x^2+4x+1=x+k$, 즉, $x^3+3x^2+3x+(1-k)=0$이 $\{x|x \ge -k\}$에서 해를 가질 조건과 같다.
$p(x)=x^3+3x^2+3x+(1-k)$ $(x \ge -k)$라 두자. $p'(x)=3x^2+6x+3=3(x+1)^2 \ge 0$이므로 $p(x)$는 증가함수이다.
따라서 $p(x)=0$이고 $x \ge -k$인 x가 한 개 이상 존재하기 위해서는 $p(-k)=-k^3+3k^2-4k+1 \le 0$ 이어야만 한다. $q(k)=-k^3+3k^2-4k+1$이라 두면, $q'(k) = -3k^2+6k-4=-3(k-1)^2-1 \le 0$이므로 감소함수이다.
그런데 $q(0.3)=0.043>0$ 이고 $q(0.4) = -0.184 < 0$ 이므로 $q(k) \le 0$인 k의 최솟값은 0.3...이다.
따라서 구하는 답은 3이다.

3. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 Q$(-1,-1)$에서 그은 접선의 방정식은 $y=f'(-1)(x+1)-1=-x$이다.
따라서 R의 좌표는 (0,0)이다.
한편, $f(x)$의 역함수를 $r(x)$라 하면 $r(x)=x^3+3x^2+4x+1$이다. 또한 $r(x) \ge x$가 $(x+1)^3 \ge 0$과 동치이므로 구간 $[-1,0]$에서 $r(x) \ge x$, 즉, $x \ge f(x)$가 성립한다. 이로부터 S를 좌표가 $(0,-1)$인 점이라 하면

(선분 PR, 선분 QR와 곡선 $y=f(x)$에 의해 둘러싸인 영역의 넓이)

$= $ (삼각형 QRS의 넓이) $- \displaystyle\int_{-1}^{a}|r(x)|dx = \frac{1}{2}\cdot 1 \cdot 1 + \int_{-1}^{a}(x^3+3x^2+4x+1)dx$

$= \dfrac{a^4}{4}+a^3+2a^2+a+\dfrac{1}{4}$.

그런데 a의 정의에 의해 $a^3+3a^2+4a+1=0$가 성립하므로,

$$\frac{a^4}{4}+a^3+2a^2+a+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}(a^3+4a^2+3a+1)=\frac{1}{4}(a^2-a)$$

이다. 정리하면

(선분 PR, 선분 QR와 곡선 $y=f(x)$에 의해 둘러싸인 영역의 넓이) $= \dfrac{1}{4}(a^2-a)$

를 얻는다.

한양대학교 2020학년도 신입학전형 수시		
자 연 계	모 의 논 술 예 시 답 안	2 번

1. $\overrightarrow{GE}=\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=-\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{FD}=\overrightarrow{FC}+\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{2}{3}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$

따라서 $a=-\frac{1}{6}$, $b=\frac{2}{3}$, $c=\frac{2}{3}$, $d=-\frac{1}{6}$ 이다.

2. $\overrightarrow{GH}=r\overrightarrow{GE}$, $\overrightarrow{FH}=s\overrightarrow{FD}$로 두면, $\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AG}+r\overrightarrow{GE}=\overrightarrow{AF}+s\overrightarrow{FD}$가 성립한다.

이 등식에 문항 1의 두 등식을 대입하여 r, s를 구하면, $r=s=\frac{3}{5}$ 이다.

따라서 $\overline{GH}:\overline{HE}=\frac{3}{5}:1-\frac{3}{5}=3:2$ 이다.

3. $\overrightarrow{GI_{k+l}}=\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{BI_{k+l}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{k+l}{n}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{k+l}{n}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})$

$=\frac{n-2(k+l)}{2n}\overrightarrow{AB}+\frac{k+l}{n}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{FI_k}=\overrightarrow{FC}+\overrightarrow{CI_k}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{n-k}{n}\overrightarrow{CB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{n-k}{n}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})$

$=\frac{n-k}{n}\overrightarrow{AB}+\frac{-n+2k}{2n}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{GJ}=r\overrightarrow{GI_{k+l}}$, $\overrightarrow{FJ}=s\overrightarrow{FI_k}$로 두면, $\overrightarrow{AJ}=\overrightarrow{AG}+r\overrightarrow{GI_{k+l}}=\overrightarrow{AF}+s\overrightarrow{FI_k}$ 이다.

위 두 등식을 이것에 대입하여 r과 s를 구한다.

FG와 BC는 평행이므로, $r=s$ 임을 이용하여 구하자.

$\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+s\left(\frac{n-2(k+l)}{2n}\overrightarrow{AB}+\frac{k+l}{n}\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+s\left(\frac{n-k}{n}\overrightarrow{AB}+\frac{-n+2k}{2n}\overrightarrow{AC}\right)$ 이므로, $s=\frac{n}{n+2l}$ 이다.

따라서 $\overline{FJ}:\overline{JI_k}=\frac{n}{n+2l}:1-\frac{n}{n+2l}=n:2l$ 이다.

한양대학교 2020학년도 신입학전형 수시 모의논술고사		
자 연 계	**출제 의도 및 평가 지침**	1 번

1. 출제 의도 및 문제 해설

미적분을 이용하여 음함수의 그래프의 개형을 파악할 수 있는지를 물었다. 1번 문제에서는 음함수의 미분법을 이용하여 함수가 증가함수임을 보이고, 이로부터 일대일임을 결론짓도록 하였다. 2번 문제에서는 함수가 역함수와 한 점에서 만날 조건 및 사잇값 정리를 이용하여 문제를 해결하도록 하였다. 3번 문제에서는 역함수의 성질 및 적분과 넓이 간 관계를 잘 이용할 수 있는지를 물었다.

2. 종합 평가 기준

문항	배점	세부 평가 기준	세부 배점
1	20	음함수의 미분법을 이용하여 $f(x)$의 미분값을 계산하였다.	10점
		$f(x)$가 일대일 함수임을 설명하였다.	10점
2	40	$g(x)$와 $h(x)$가 한 점에서 만날 조건을 제시하였다.	10점
		$g(x)$가 정의역에서 해를 가질 조건을 어떤 삼차 방정식이 해를 가질 조건과 같음을 보였다.	10점
		미분법을 활용하여 구하는 소수점 아래 첫째자리가 3임을 보였다.	20점
3	40	점 Q와 R의 좌표를 계산하였다.	10점
		선분 PR, 선분 QR와 곡선 $y=f(x)$에 의해 둘러싸인 영역의 넓이를 a에 대한 4차식으로 표현하였다.	15점
		선분 PR, 선분 QR와 곡선 $y=f(x)$에 의해 둘러싸인 영역의 넓이를 a에 대한 2차식으로 표현하였다.	15점

3. 출제 근거

p. 127-129, 177, 신향균 외, 고등학교 미적분 II, ㈜ 지학사, 2014

p. 34-37, 김창동 외, 고등학교 기하와 벡터, ㈜ 교학사, 2014

한양대학교 2020학년도 신입학전형 수시 모의논술고사

자 연 계	출제 의도 및 평가 지침	2 번

1. 출제 의도 및 문제 해설

문항 1, 2, 3번 모두 삼각형의 변들이 이루는 벡터들간의 합과 차의 관계만을 이용하면 해결 가능하도록 출제하였다. 다만, 문항 1, 2를 중간 단계로 하여 문항 3에서는 좀 더 일반적인 물음을 해결하도록 요구한다. 이를 통해 수학적 논의를 전개해나가고 이를 명확히 표현하는 능력을 평가하도록 하였다.

2. 종합 평가 기준

문항	배점	세부 평가 기준	세부 배점
1	30	a, b, c, d 의 값을 구하였는가?	30
2	30	문항1의 등식을 이용하여 비를 올바로 구하였는가?	30
3	30	요구된 길이의 비를 올바른 과정을 통해 구하였는가?	30
	10	문항1, 2의 결과들을 적절히 이용하였는가?	10

3. 출제 근거

벡터의 연산 – 고등학교 기하와 벡터 (지학사, 2016년), p66~76
벡터의 연산 – 고등학교 기하와 벡터 (교학사, 2015년), p62~75
벡터의 연산 – 고등학교 기하와 벡터 (천재교육, 2016년), p70~79

한양대학교

답안지 (자연계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지
		1/6

[문제 1-1]

$y^3+3y^2+4y+1=x$

$3y^2+6y+4=\frac{dx}{dy}$

$\frac{dx}{dy}=3(y+1)^2+1>0$ (모든 실수 y에 대해 $\frac{dx}{dy}>0$)

역함수의 미분법에 의해 $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}$

$\therefore$ 모든 실수 x에 대해

$\frac{dy}{dx}>0 \cdots$ ① 한편, $f(x)$는 모든 실수 x_1, x_2 (단, $x_1<x_2$)에 대해

$[x_1, x_2]$에서 연속, (x_1, x_2)에서 미분가능. 평균값의 정리에 의해 어떤 실수 c가 $c\in(x_1, x_2)$이고

$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(c)$ 만족한다. ①에 의해 $f'(c)>0$

$\therefore f(x_2)=f(x_1)+f'(c)(x_2-x_1)$

$>f(x_1)$

즉, 임의의 두 실수 x_1, x_2 $(x_1<x_2)$ $x_1<x_2 \rightarrow f(x_1)<f(x_2)$

충분하게 $x_1\neq x_2 \rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$ 성립

대우명제 $f(x_1)=f(x_2) \rightarrow x_1=x_2$.

일대일 함수의 정의에 따라 $f(x)$는 일대일 함수이다.

[문제 1-2]

$y=g(x)$ 의 정의역 $[-k, \infty)$ 이므로

$y=g^{-1}(x)$ 의 치역이 $[-k, \infty)$ 이다.

$g(x)=f(x+k)$ 에서 임의의 실수 x $f'(x)>0$ (문제1-2로부터)

$g'(x)=f'(x+k)$ $\therefore g'(x)>0$ $(\forall x \in \mathbb{R})$

$g(x)$는 증가함수이므로 $g(x)$의 치역은 $[g(-k), \infty)$

이는 $g^{-1}(x)$의 정의역이다.

$g(x)=g^{-1}(x)$ 의 해가 적어도 하나 존재. 가장 큰 근 α라 하자.

$\alpha \in [g(-k), \infty)$ 이고

$\alpha \in [-k, \infty)$

$g(-k)=f(0)$:

$f(0)$은 $x^3+3x^2+4x+1=0$ 의 근 (a라 하자)

$\therefore$ $\alpha \geq a$ 이고 $\alpha \geq -k$ ...㉠

$x^3+3x^2+4x+1=h_1(x)$ $h_1'(x)=3(x+1)^2+1>0$ $h(x)$ 증가함수

$h_1(-0.3)>0$ $\therefore -0.4<a<0.3$ ...㉠'

$h_2(-0.4)<0$

$g(x)$ 증가함수이므로 $g(x)=g^{-1}(x) \Leftrightarrow g(x)=x$ 만족 ...(*)

$(\rightarrow)$ 증명

$g(x)>x$ 이면 $g(g(x))>g(x)$ ($\because$ 증가함수의 정의)

$>x$

$\therefore g(x)>g^{-1}(x)$ ($g^{-1}(x)$도 증가함수이므로)

$\therefore g(x)=x$ 만 가능

$g(x)<x$ 이면 $g(g(x))<g(x)$ (증가함수의 정의)

$<x$

$g(x)<g^{-1}(x)$ ($g^{-1}(x)$도 증가함수)

한편, $g(x)=f(x+k)$.

$f(x+k)^3+3f(x+k)^2+4f(x+k)+1=x+k$

$\begin{cases} g(x)^3+3g(x)^2+4g(x)+1=x+k & \cdots ① \\ g(x)=x & \cdots ⓒ \ (\because (*)) \end{cases}$

의 교점의 x좌표가 α (단, $x \geq a$ 이고 $x \geq -k$) (by ㉠)

ⓒ는 ①에 대입

$x^3+3x^2+4x+1=x+k$

$k=(x+1)^3$ ...②

㉠에 의해 $\begin{cases} k=(x+1)^3 \geq (a+1)^3 = -a \\ k=(x+1)^3 \geq (1-k)^3 \text{ 이다} \end{cases}$ ...㉡

㉠'에 의해

$k \geq 0.3$

$k^3-3k^2+4k-1 \geq 0$

$h(k)=k^3-3k^2+4k-1$ 이라 하면 $h(k)$의 근찾기.

$h'(k)=3(k-1)^2+1>0$. $h(k)$ 증가함수

$h(0)=-1<0$ $h(1)=1>0$

$h(0.3)<0$

$h(0.4)>0$ 이므로

$\alpha=0.3+\varepsilon$ $(0<\varepsilon<0.1)$

$\therefore 3$

[문제 1-3]

P는 $y=f(x)$ 위 점이므로 $a^3+3a^2+4a+1=0$ … ㉠

$Q(-1, b)$라 하면

Q도 $y=f(x)$ 위점이므로 $b^3+3b^2+4b+1=-1$ … ㉡

㉡에서 $(b+1)((b+1)^2+1)=0$

$\therefore b=-1$

$\therefore Q(-1,-1)$

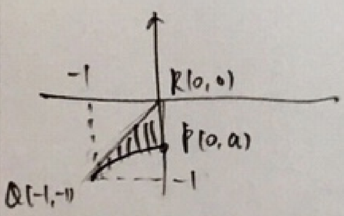
$$\left.\frac{dx}{dy}\right|_{y=-1} = \left.3y^2+6y+4\right|_{y=-1} = 1 \quad \therefore f'(-1)=1 \quad \cdots ①$$

$$f'(-1) = \frac{1}{(f^{-1})'(-1)} = 1 \quad \cdots ②$$

$\therefore$ $y=f(x)$의 Q에서의 접선의 방정식: $y=(x-(-1))-1$

$\rightarrow y=x.$

$\therefore$ y축과 교점 $R(0,0)$ 이다.



㉠에서 $a^3+3a^2+4a+1 = h(a)$라 하면

$h'(a) = 3(a+1)^2+1>0$ h(a)는 증가함수

$h(-1)<0 \quad h(0)>0$

$\therefore -1<a<0$

$$S = \left|\int_{-1}^{0} y\,dy\right| - \left|\int_{-1}^{a} x\,dy\right| \quad (단, y=f(x))$$

$$= \left|\left[\frac{y^2}{2}\right]_{-1}^{0}\right| - \left|\int_{-1}^{a} (y^3+3y^2+4y+1)\,dy\right|$$

$$= \frac{1}{2} - \left|\left[\frac{y^4}{4}+y^3+2y^2+y\right]_{-1}^{a}\right|$$

절댓값은 각 적분구간에서 피적분함수값 하나씩 넣어 구한 뒤 절댓값 취한다.

$$= \frac{1}{2} - \left|\left(\frac{a^4}{4}+a^3+2a^2+a\right)-\frac{1}{4}\right|$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{a^4}{4}+a^3+2a^2+a$$

$$\frac{1}{4}a^4+a^3+2a^2+a$$

$$= (a^3+3a^2+4a+1)\left(\frac{1}{4}a+\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4}a^2-\frac{1}{4}a-\frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{4}a^2-\frac{1}{4}a-\frac{1}{4} \quad (by ㉠)$$

$$\therefore S = \frac{1}{4}a^2-\frac{1}{4}a$$

한양대학교

답안지 (자연계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지
		4/6

[문제 2-1]

$\vec{AG} = \frac{1}{2}\vec{AB}$ 이다 …ㄱ

$\vec{AE} = \vec{AB} + \vec{BE}$

$= \vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{BC}$

$= \vec{AB} + \frac{2}{3}(\vec{AC} - \vec{AB})$

$= \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{AC}$ …ㄴ

$\therefore \vec{GE} = \vec{AE} - \vec{AG}$

$= -\frac{1}{6}\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{AC}$ (by ㄱㄴ)

$a = -\frac{1}{6}$

$b = \frac{2}{3}$

$\vec{AF} = \frac{1}{2}\vec{AC}$ … ㄷ

$\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{BD}$

$= \vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{BC}$

$= \vec{AB} + \frac{1}{3}(\vec{AC} - \vec{AB})$

$= \frac{2}{3}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC}$ …ㄹ

$\therefore \vec{FD} = \vec{AD} - \vec{AF}$

$= \frac{2}{3}\vec{AB} - \frac{1}{6}\vec{AC}$ (by ㄷㄹ)

$c = \frac{2}{3}$

$d = -\frac{1}{6}$

4

[문제 2-2]

$\overline{GH} : \overline{HE} = x:1$ 라 하자.

$\vec{GH} = \frac{x}{1+x}\vec{GE}$.

$\vec{AH} = \vec{AG} + \vec{GH}$

$= \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{x}{1+x}\left(-\frac{1}{6}\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{AC}\right)$

$= \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{6(1+x)}\right)\vec{AB} + \frac{2x}{3(1+x)}\vec{AC}$ ⋯ ㉠

$\overline{FH} : \overline{HD} = y:1$ 라 하면

마찬가지로 하면

$\vec{AH} = \frac{2y}{3(1+y)}\vec{AB} + \left(\frac{1}{2} - \frac{y}{6(1+y)}\right)\vec{AC}$ ⋯ ㉡

$\vec{a} = p\vec{b} + q\vec{c} = r\vec{b} + s\vec{c}$ ($\vec{b} \nparallel \vec{c}$ 이고 $\vec{b} \neq \vec{0}$ 이고 $\vec{c} \neq \vec{0}$)

일때 $(p-r)\vec{b} = (s-q)\vec{c}$.

if) $p \neq r$ $\vec{b} = \frac{s-q}{p-r}\vec{c}$

∴ $\vec{b} \parallel \vec{c}$ 모순

∴ $p=r$ 마찬가지로 $q=s$

∴ $\frac{1}{2} - \frac{x}{6(1+x)} = \frac{2y}{3(1+y)}$ ⋯ ㉢

$\frac{2x}{3(1+x)} = \frac{1}{2} - \frac{y}{6(1+y)}$ ⋯ ㉣

$$\begin{cases} \frac{1}{2} = \frac{x}{6(1+x)} + \frac{4y}{6(1+y)} & \cdots ㉤ \\ \frac{1}{2} = \frac{4x}{6(1+x)} + \frac{y}{6(1+y)} & \cdots ㉥ \end{cases}$$

㉤-㉥ : $\frac{3x}{6(1+x)} = \frac{3y}{6(1+y)}$

$x + xy = y + xy$

∴ $x = y$ ⋯ ㉦

㉦을 ㉤에 대입

$\frac{1}{2} = \frac{5x}{6(1+x)}$

∴ $x = \frac{3}{2}$

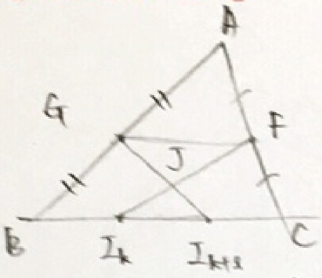
∴ $\overline{GH} : \overline{HE} = 3:2$

한양대학교

답안지 (자연계열)

수 험 번 호	성　　명	페 이 지
		6/6

[문제 2-3]



$k : l : n-k-l$

$\overrightarrow{AB} = \vec{p}$

$\overrightarrow{AC} = \vec{q}$ 라 하자

$\overrightarrow{AI_k} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI_k}$

$= \vec{p} + \frac{k}{n}\overrightarrow{BC}$

$= \vec{p} + \frac{k}{n}(\vec{q} - \vec{p})$

$= \frac{n-k}{n}\vec{p} + \frac{k}{n}\vec{q}$ ...㉠

$\overrightarrow{AI_{k+l}} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI_{k+l}}$

$= \vec{p} + \frac{k+l}{n}\overrightarrow{BC}$

$= \vec{p} + \frac{k+l}{n}(\vec{q} - \vec{p})$

$= \frac{n-k-l}{n}\vec{p} + \frac{k+l}{n}\vec{q}$ ...㉡

$\overrightarrow{GF} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AG}$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{I_kI_{k+l}} = \frac{l}{n}\overrightarrow{BC}$ 이므로

$\overrightarrow{I_kI_{k+l}} = \frac{2l}{n}\overrightarrow{GF}$.

$\therefore \overrightarrow{I_kI_{k+l}} \parallel \overrightarrow{GF}$ 이고

$|\overrightarrow{I_kI_{k+l}}| = |\overrightarrow{GF}| \cdot \frac{2l}{n}$

$\angle GFJ = \angle I_{k+l}I_kJ$ (엇각)

$\angle FGJ = \angle I_kI_{k+l}J$ (엇각)

$\therefore \triangle GFJ \sim \triangle I_{k+l}I_kJ$ (AA)

닮음비 $= \overline{GF} : \overline{I_{k+l}I_k}$

$= 1 : \frac{2l}{n}$

6

$\therefore \overline{FJ} : \overline{JI_k} = n : 2l$

[문제 1-1]

$f(x)$의 역함수 $h(x)$를 잡으면 $y=h(x)=x^3+3x^2+4x+1$,

$h'(x)=3x^2+6x+4=3(x+1)^2+1$

즉 $h(x)$는 증가만한다, $f(h(x))=x$ 이므로

$f'(h(x))\cdot h'(x)=1$,

$f'(h(x))=\frac{1}{h'(x)}$, $h'(x)$는 항상 0보다 크고 $h(x)$의 범위는 x가 실수전체일때 마찬가지로 실수전체이므로

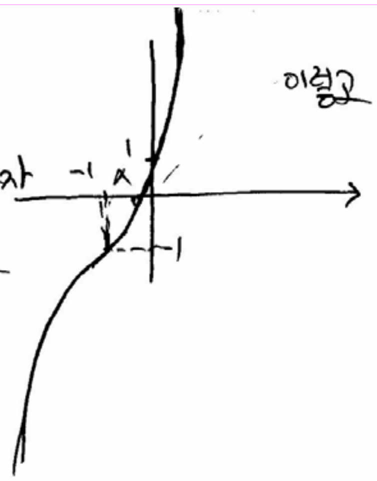
$f'(x)$는 실수전체에서 0보다 크다, (즉 증가함수다.) 따라서 일대일 함수이다.

한양대학교

답안지 (자연계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지
		2/6

[문제 1-2] $y=f(x)$의 역함수 $y=h(x)$의 그래프는



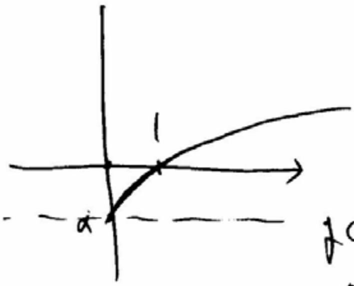
이렇고

$h(x)=0$인 x를 α라 하자

$h(x)$의 기울기 $h'(x)=3(x+1)^2+1 \geq 1$이므로

$h(x)$는 $x=-1$에서만 기울기가 1이다

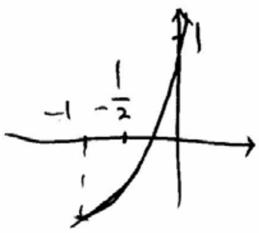
그리고 $f(x)$의 그래프를 $x \geq 0$에서 그리면



이렇게 되므로 $g(x)=f(x+k)$의 그래프를 짐작할때

$f(x)$와 $g(x)$의 역함수가 만나는 점은 두 함수 모두 증가함수이므로 $y=x$ 위에 있다, 그리고 $g(x)$와 $g(x)$의 역함수에는 기울기가 1인 점이 없으므로

$y=x$와 $g(x)$의 교점이 생길때 가장 처음 만나는데, 이것을 만족하고 k가 최소이려면 $g(x)$가 (α, α)를 지나야하고 $k=-\alpha$ 여야한다. 즉 α를 구하면



$h(\alpha)=\alpha^3+3\alpha^2+4\alpha+1=0$, $-1<\alpha<0$,

$h(-\frac{1}{2})=-\frac{1}{8}+\frac{3}{4}-2+1<0$

$h(-0.1)=-\frac{1}{1000}+\frac{3}{100}-\frac{4}{10}+1>0$, $h(-0.2)=-\frac{1}{125}+\frac{3}{25}-\frac{4}{5}+1>0$

$h(-0.4)=-\frac{8}{125}+\frac{12}{25}-\frac{8}{5}+1=-\frac{8}{125}+\frac{60}{125}-\frac{3}{5}=\frac{-75-8+60}{125}<0$,

$h(-0.3)=-\frac{27}{1000}+\frac{27}{100}-\frac{12}{10}+1=\frac{43}{1000}>0$

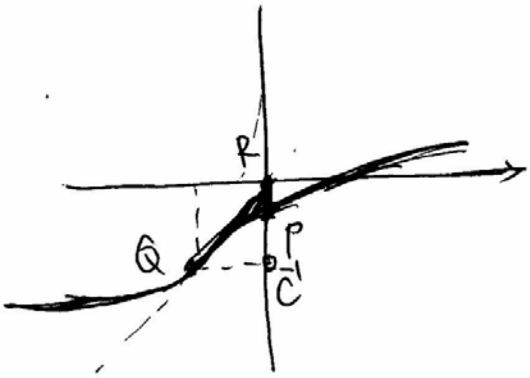
$-0.4<\alpha<-0.3$, $\alpha=-0.3\times\times$ (최소K)$=0.3\times\times$

즉 소수점아래 첫째자리 수는 3이다.

[문제 1-3]

$f(x)$의 역함수 $h(x)$를 생각하면 $h(x)$는 $(-1,-1)$을 지나고 $h'(-1)=1$이므로 접선이 $y=x$가 된다.

즉, $Q(-1,-1)$, $R(0,0)$ 임을 알수있다



점 $(0,-1)$을 C라고하면
$f(x)$와 $\overline{PC}$, $\overline{CQ}$ 로 둘러싸인 부분의넓이를 S라고 할때
$h(x)$를 ~~a부터 −1고~~ -1부터 a까지 적분하면 $-S$를 얻을수있다

$$\int_{-1}^{a}(x^3+3x^2+4x+1)\,dx=\left[\frac{1}{4}x^4+x^3+2x^2+x\right]_{-1}^{a},$$

$$=\frac{1}{4}(a^4-1)+(a^3+1)+2(a^2-1)+(a+1)=\frac{1}{4}a^4+a^3+2a^2+a-\frac{1}{4}=-S$$

이때 $a^3+3a^2+4a+1=0$, $\frac{1}{4}a^4+\frac{3}{4}a^3+a^2+\frac{1}{4}a=0$, 이므로

$$\frac{1}{4}a^3+a^2+\frac{3}{4}a-\frac{1}{4}=-S,\quad \frac{1}{4}a^3+\frac{3}{4}a^2+a+\frac{1}{4}=0,$$

$$\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{4}a-\frac{1}{2}=-S\quad S=-\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{4}a+\frac{1}{2}$$

이때 원하는넓이는 $\triangle RQC-S$ 이므로 $\triangle RQC=\frac{1}{2}$ 을대입해

$\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{4}a$ 임을 알수있다.

한양대학교

답안지 (자연계열)

수험번호	성명	페이지
		4/6

[문제 2-1] 내분점인 점을 이용해

$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

$\therefore \overrightarrow{GE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AG}=-\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$, $a=-\frac{1}{6}$, $b=\frac{2}{3}$

$\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{FD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AF}=-\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

$\therefore c=\frac{2}{3}$, $d=-\frac{1}{6}$

[문제 2-2]

$\overline{GH} : \overline{HE} = a : 1-a$ 라고 할때 $(0 \le a \le 1)$

$\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AG}(1-a) + a\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}(1-a) + \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right)a$ 로 나타낸다

마찬가지로 $\overline{FH} : \overline{HD} = b : 1-b$ 라고하면 $(0 \le b \le 1)$

$\overrightarrow{AH} = b\overrightarrow{AD} + (1-b)\overrightarrow{AF} = (1-b)\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right)b$

$\therefore \overrightarrow{AH} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}a + \frac{1}{3}a\right)\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}a\overrightarrow{AC}$

$= \frac{2}{3}b\overrightarrow{AB} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}b + \frac{1}{3}b\right)\overrightarrow{AC},$

$\frac{2}{3}b = \frac{1}{2} - \frac{1}{6}a, \ 4b = 3-a, \cdots ①$

$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}b + \frac{1}{3}b = \frac{1}{2} - \frac{1}{6}b = \frac{2}{3}a, \ 4a = 3-b \cdots ②$

①, ②를 연립하면 $4b = \cancel{12} - 16a = 3-a, \quad 15a = 9, \ a = \frac{3}{5} = b$

$\therefore \overline{GH} : \overline{HE} = \frac{3}{5} : \frac{2}{5} = 3 : 2$.

한양대학교

답안지 (자연계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지
		6/6

[문제 2-3]

$\overline{BI_{k+l}} : \overline{I_{k+l}C} = k+l : n-(k+l)$

$\overline{BI_k} : \overline{I_kC} = k : n-k$

$\therefore \overrightarrow{AE} = \frac{k+l}{n}\overrightarrow{AC} + \left(1-\frac{k+l}{n}\right)\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AD} = \frac{k}{n}\overrightarrow{AC} + \left(1-\frac{k}{n}\right)\overrightarrow{AB}$,

, $\overline{FJ} : \overline{JI_k} = b : 1-b$, $\overline{GJ} : \overline{JI_{k+l}} = a : 1-a$라 하면

$\overrightarrow{AG}(1-a) + \overrightarrow{AI_{k+l}}a = \overrightarrow{AF}(1-b) + b\overrightarrow{AI_k} = \overrightarrow{AJ}$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}(1-a) + a\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}(1-b) + b\overrightarrow{AD}$

$\left(b-\frac{k}{n}b\right)\overrightarrow{AB} + \left(\frac{k}{n}b+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}b\right)\overrightarrow{AC} = \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}a+a-\frac{k+l}{n}a\right)\overrightarrow{AB} + a\frac{k+l}{n}\overrightarrow{AC}$,

$b\left(1-\frac{k}{n}\right) = a\left(\frac{1}{2}-\frac{k+l}{n}\right)+\frac{1}{2}$; ---①

$b\left(\frac{k}{n}-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2} = a\frac{k+l}{n}$ ---② ②를 정리하면 $a = \frac{b(k-\frac{1}{2}n)+\frac{1}{2}n}{k+l}$,

①에 대입하면

$\frac{\left(b\left(k-\frac{1}{2}n\right)+\frac{1}{2}n\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{k+l}{n}\right)}{k+l} + \frac{1}{2} = b\left(1-\frac{k}{n}\right)$, 정리하면

$\frac{1}{4}n = -b\left(\frac{1}{2}k-\frac{1}{4}n-\frac{k(k+l)}{n}+\frac{k+l}{2}\right) + b\left(k+l-\frac{k(k+l)}{n}\right)$,

$b = \frac{\frac{1}{4}n}{\frac{l}{2}+\frac{1}{4}n} = \frac{n}{n+2l}$, $\overline{FJ} : \overline{JI_k} = b : 1-b = \frac{n}{n+2l} : \frac{2l}{n+2l}$

$= n : 2l$

한양대학교

답안지 (자연계열)

수 험 번 호	성　　　명	페 이 지
		1/6

[문제 1-1]

$y=f(x)$를 $y=x$에 대하여 대칭시킨 함수

$y=h(x)$를 $y=x^3+3x^2+4x+1$로 정의하면,

$h'(x)=3x^2+6x+4$

$=3(x+1)^2+1$ 이므로,

$h'(x)>0$ 이고, $f^{-1}(x)=h(x)$ 이다.

즉, $f(x)$와 $h(x)$는 역함수 관계이므로

$f'(x)=\dfrac{1}{h'(f(x))}$ 이고, $h'(f(x))$는 모든 실수 x에 대하여 $h'(f(x))>0$ 이다.

따라서 $f'(x)>0$ 이므로, $f(x)$는 모든 실수 x에서 증가한다.

$f(x)$가 모든 실수 x에서 증가하므로,

$x_1 \neq x_2$ 이면, $f(x_1) \neq f(x_2)$ 이다.

따라서 함수 $y=f(x)$는 일대일 함수이다.

[문제 1-2]

$g(x) = f(x+k)$ 이므로

함수 $y=g(x)$는 $y^3+3y^2+4y+1 = x+k$ 를 만족시킨다.

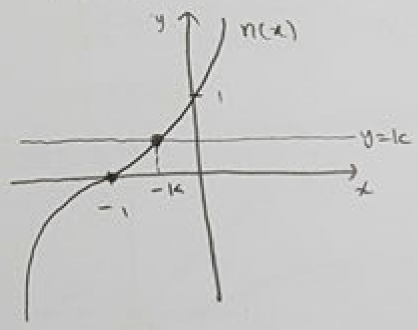
이때, $g(x)$와 $g^{-1}(x)$가 만나는 것은 $g(x)$가 증가함수이므로

$y=x$와 만나는 것과 같다.

따라서 $g(x)$가 $y=x$ 와 만날 때,

$x^3+3x^2+4x+1 = x+k$ 이므로 $x^3+3x^2+3x+1 = k$ 를 만족한다.

x^3+3x^2+3x+1 을 $n(x)$ 라고 하면,



$n'(x) = 3x^2+6x+3$

$n'(-1)=0$, $n(-1)=0$ 이므로

$n(x)$의 그래프는 왼쪽과 같다.

이때, 정의역인 $\{x \mid x \geq -k\}$ 에서

$y=k$ 와 만나는 x가 있어야

$y=g(x)$가 역함수와 만난다.

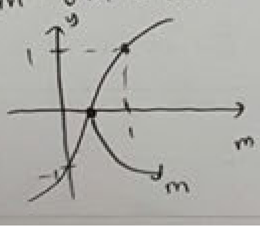
$k>1$ 이면 만족하는 x가 항상 있고,

$0<k<1$ 이면, $y=k$와 $x=-k$ 에서 만날 때가 k의 최솟값이고, 이 값보다 k가 더 작아지면 x가 존재하지 않는다.

따라서, k의 최솟값을 m이라고 하면, m은

$-m^3+3m^2-3m+1 = m$ 을 만족한다. (단, $0<m<1$)

$m^3-3m^2+4m-1=0$ 이므로 $y=m^3-3m^2+4m-1$ 인 함수를 살피면,



m이 0.3일 때, $y = 0.027 - 0.27 + 1.2 - 1$

$= 0.027 - 0.07 < 0$ 이고,

m이 $\frac{1}{3}$일 때, $y = \frac{1}{27} - \frac{1}{3} + \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{27} > 0$ 이다.

따라서 m이 $0.3 < m < \frac{1}{3}$ 이므로 소수점 첫째자리 수는 3이다.

한양대학교

답안지 (자연계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지
		3/6

[문제 1-3]

$P(0, a)$ 이므로

$a^3+3a^2+4a+1=0$ 이다.

x 좌표가 -1일 때 y 좌표를 구하면,

$y^3+3y^2+4y+1=-1$

$y^3+3y^2+4y+2=0$ $\quad$ $\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 3 & 4 & 2 \\ & & -1 & -2 & -2 \\ \hline & 1 & 2 & 2 & \underline{0} \end{array}$

$(y+1)(y^2+2y+2)=0$

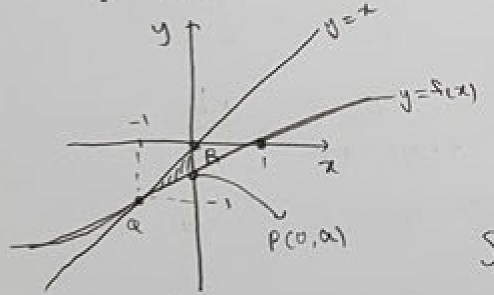
$\therefore y=-1$ $\quad$ $\therefore Q(-1,-1)$

R을 구하기 위해 $y=f(x)$를 미분하면, $3y^2\frac{dy}{dx}+6y\frac{dy}{dx}+4\frac{dy}{dx}=1$ 이므로,

$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{3y^2+6y+4}$, 점 Q에서의 접선의 기울기는 1 이므로, 접선은 $y=x$ 이다.

$\therefore R(0,0)$

$y=f(x)$의 그래프가 Q에서 변곡점을 가지고 $x>-1$ 에서 $f''(x)<0$ 이므로,



이고, 색칠한 영역이 선분 PR, 선분 QR, $y=f(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이이다.

이 영역의 넓이는

$$S=\int_{-1}^{0} x-f(x)\,dx$$ 로 구할 수 있다.

$S=\int_{-1}^{0} x-f(x)\,dx=\int_{-1}^{0} x\,dx-\int_{-1}^{0} f(x)\,dx=\frac{1}{2}[x^2]_{-1}^{0}-\int_{-1}^{0} f(x)\,dx=-\frac{1}{2}-\int_{-1}^{0} f(x)\,dx$

이때, $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx$ 에서 $f(x)=t$로 치환하면, $f(-1)=-1$ $f(0)=a$, $f'(x)\frac{dx}{dt}=1$

$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{f'(x)}=f^{-1\prime}(f(x))=f^{-1\prime}(t)$ 이므로 $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx=\int_{-1}^{a} t f^{-1\prime}(t)\,dt$ 이다

$f^{-1\prime}(t)=3t^2+6t+4$ 이므로 $\int_{-1}^{a} t f'(t)\,dt=\int_{-1}^{a} 3t^3+6t^2+4t\,dt=\left[\frac{3}{4}t^4+2t^3+2t^2\right]_{-1}^{a}$

$=\frac{3}{4}a^4+2a^3+2a^2-\left(\frac{3}{4}-2+2\right)=\frac{3}{4}a^4+2a^3+2a^2-\frac{3}{4}$

$\therefore S=-\frac{3}{4}a^4-2a^3-2a^2+\frac{1}{4}$ $\quad$ $a^3+3a^2+4a+1=0$ 이므로, $\frac{3}{4}a^4+\frac{9}{4}a^3+3a^2+\frac{3}{4}a=0$ 이다

$\frac{3}{4}a^4=-\frac{9}{4}a^3-3a^2-\frac{3}{4}a$ 이고, $a^3=-3a^2-4a-1$ 이므로, $S=\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{4}a$ 이다.

$\therefore \left(\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{4}a\right)$

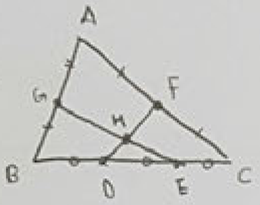
한양대학교

답안지 (자연계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지
		4/6

[문제 2-1]

제시문에 의하여



이다.

이때, $\overrightarrow{AB}$를 $\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}$를 $\vec{c}$로 표현하면,

$$\overrightarrow{GE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AG}$$

$$= \frac{\vec{b}+2\vec{c}}{3} - \frac{1}{2}\vec{b} = -\frac{1}{6}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{c}$$

$\therefore \overrightarrow{GE} = -\frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ 이므로

$a = -\frac{1}{6}$, $b = \frac{2}{3}$ 이다.

$\therefore \left(a = -\frac{1}{6},\ b = \frac{2}{3}\right)$

마찬가지로, $\overrightarrow{FD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AF}$

$$= \frac{2\vec{b}+\vec{c}}{3} - \frac{1}{2}\vec{c}$$

$$= \frac{2}{3}\vec{b} - \frac{1}{6}\vec{c}$$

$\therefore \overrightarrow{FD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$ 이므로

$c = \frac{2}{3}$, $d = -\frac{1}{6}$ 이다.

$\therefore \left(c = \frac{2}{3},\ d = -\frac{1}{6}\right)$

$\therefore \left(a = -\frac{1}{6},\ b = \frac{2}{3},\ c = \frac{2}{3},\ d = -\frac{1}{6}\right)$

4

답안지 (자연계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지
		5/6

[문제 2-2]

문항 1에 의하여,

$\overrightarrow{GE} = -\frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ 이고, $\overrightarrow{FD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$ 이다.

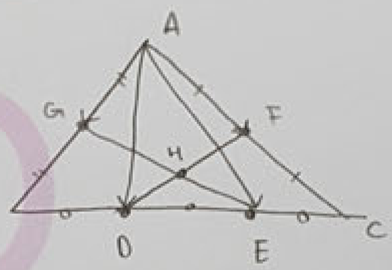
이때, 점 H는 $\overline{GE}$ 위의 점이고, $\overline{FD}$ 위의 점 이므로,

$\overrightarrow{AH} = t\overrightarrow{AG} + (1-t)\overrightarrow{AE}$ 로 나타낼 수 있고,

마찬가지로 $\overrightarrow{AH} = s\overrightarrow{AD} + (1-s)\overrightarrow{AF}$ 이다.

따라서 $t\overrightarrow{AG} + (1-t)\overrightarrow{AE} = s\overrightarrow{AD} + (1-s)\overrightarrow{AF}$ 이다.

모든 벡터를 문항 1에서와 같이 $\vec{b}, \vec{c}$로 표현하면,



$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\vec{b}$

$\overrightarrow{AE} = \frac{\vec{b}+2\vec{c}}{3}$

$\overrightarrow{AD} = \frac{2\vec{b}+\vec{c}}{3}$

$\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\vec{c}$ 이다.

따라서 $\frac{1}{2}t\vec{b} + (1-t)\frac{\vec{b}+2\vec{c}}{3} = \frac{s(2\vec{b}+\vec{c})}{3} + (1-s)\cdot\frac{1}{2}\vec{c}$

$\left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{3} - \frac{t}{3}\right)\vec{b} + \frac{(2-2t)}{3}\vec{c} = \frac{2s}{3}\vec{b} + \left(\frac{s}{3} + \frac{1-s}{2}\right)\vec{c}$

$\therefore \frac{1}{2}t + \frac{1}{3} - \frac{t}{3} = \frac{2}{3}s \cdots ①$

② $\cdots \frac{2-2t}{3} = \frac{s}{3} + \frac{1-s}{2}$ 이므로, $\frac{t}{6} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}s$ $\quad t - 4s = -2 \cdots ①$

$4-4t = 2s+3-3s$ $\quad 4t - s = 1 \cdots ②$

①, ②에 의하여 $s = \frac{3}{5}, t = \frac{2}{5}$ 이다.

$\therefore \overrightarrow{AH} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AG} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AE}$ 이므로 H는 $\overline{GE}$의 3:2 내분점이다.

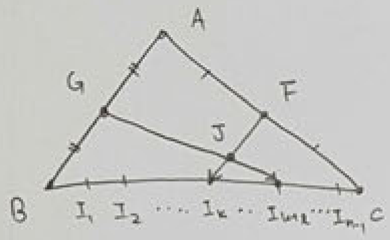
$\therefore \overline{GH} : \overline{HE} = 3 : 2$

답안지 (자연계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지
		6/6

[문제 2-3]

문항 1,2 에서와 마찬가지로 모든 벡터를 $\vec{b}, \vec{c}$ 로 설정하면,



I_k 는 $\overline{BC}$ 를 $k : n-k$ 로 내분하는 점이므로,

$$\overrightarrow{AI_k} = \frac{n-k}{n}\vec{b} + \frac{k}{n}\vec{c}$$

I_{k+l} 은 $\overline{BC}$ 를 $k+l : n-k-l$ 로 내분하는 점이므로,

$$\overrightarrow{AI_{k+l}} = \frac{n-k-l}{n}\vec{b} + \frac{k+l}{n}\vec{c}$$ 이다.

$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\vec{b}$, $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\vec{c}$ 이므로,

$$\overrightarrow{AJ} = t\overrightarrow{AI_k} + (1-t)\overrightarrow{AF} = s\overrightarrow{AI_{k+l}} + (1-s)\overrightarrow{AG}$$ 이다.

$$\therefore \overrightarrow{AJ} = t\left(\frac{n-k}{n}\vec{b} + \frac{k}{n}\vec{c}\right) + (1-t)\frac{1}{2}\vec{c}$$

$$= t\left(1-\frac{k}{n}\right)\vec{b} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t + \frac{kt}{n}\right)\vec{c}$$

$$\overrightarrow{AJ} = s\left(\frac{n-k-l}{n}\vec{b} + \frac{k+l}{n}\vec{c}\right) + (1-s)\frac{1}{2}\vec{b}$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}s + s\left(1 - \frac{k+l}{n}\right)\right)\vec{b} + \frac{s(k+l)}{n}\vec{c}$$

$t\left(1-\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}s + s - \frac{s(k+l)}{n}$ ⋯① 이고, $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t + \frac{kt}{n} = \frac{s(k+l)}{n}$ 이다. ⋯②

①에 의해 $\left(1-\frac{k}{n}\right)t + \left(\frac{k+l}{n} - \frac{1}{2}\right)s = \frac{1}{2}$, ②에 의해 $\left(\frac{k}{n} - \frac{1}{2}\right)t - \frac{(k+l)}{n}s = -\frac{1}{2}$

① 식과 ②식을 각각 더하면, $\frac{1}{2}t - \frac{1}{2}s = 0$ 이므로 $t = s$ 이다.

따라서 ①에 의해 $t=s$ 이므로 $\left(\frac{1}{2} + \frac{l}{n}\right)t = \frac{1}{2}$ 이고, $t = \frac{n}{n+2l}$ 이다.

이때, G는 $\overline{FI_k}$ 를 $t : 1-t$ 로 내분하는 점이므로

$$\overline{FJ} : \overline{JI_k} = t : 1-t = \frac{n}{n+2l} : 1 - \frac{n}{n+2l} = n : 2l$$

$\therefore (n : 2l)$