	한양대학교 2019학년도 신입학전형 수시	
자 연 계	**논 술 예 시 답 안**	오후(1)-1번

1. 일차함수 $f(x)=bx+c\ (b\neq 0)$가 $(*)$를 만족한다면, 임의의 x,y에 대하여

$$\{f(xy)\}^2=(axy+b)^2=a^2x^2y^2+b^2+2abxy,\qquad f(x^2)f(y^2)=(ax^2+b)(ay^2+b)=a^2x^2y^2+abx^2+aby^2+b^2$$

이므로

$$a^2x^2y^2+b^2+2abxy=a^2x^2y^2+b^2+abx^2+aby^2.$$

따라서

$$0=ab(x^2+y^2-xy)=ab(x-y)^2$$

이고 $a\neq 0$이므로 $b=0$.

2. $g(x)=ax^k+f(x)$가 $(*)$를 만족한다면, 임의의 x,y에 대하여

$$\{g(xy)\}^2=\{a(xy)^k+f(xy)\}^2=a^2(xy)^{2k}+f(xy)^2+2a(xy)^kf(xy),$$

$$g(x^2)g(y^2)=(ax^{2k}+f(x^2))(ay^{2k}+f(y^2))=a^2(xy)^{2k}+f(x^2)f(y^2)+ay^{2k}f(x^2)+ax^{2k}f(y^2)$$

이고, $\{f(xy)\}^2=f(x^2)f(y^2)$이므로

$$2a(xy)^kf(xy)=ax^{2k}f(y^2)+ay^{2k}f(x^2).$$

다시 양변을 제곱하면

$$4a^2x^{2k}y^{2k}\{f(xy)\}^2=a^2x^{4k}f(y^2)^2+a^2y^{4k}f(x^2)^2+2a^2x^{2k}y^{2k}f(x^2)f(y^2)$$

이고, $\{f(xy)\}^2=f(x^2)f(y^2)$을 이용하여 정리하면

$$a^2\{x^{2k}f(y^2)-y^{2k}f(x^2)\}^2=0.$$

따라서, 임의의 x,y에 대하여

$$x^{2k}f(y^2)-y^{2k}f(x^2)=0.$$

한편, $f(x)$가 $(k-1)$차 함수이므로 $f(p)\neq 0$인 실수 p가 존재한다. 따라서 이 p와 임의의 y에 대해

$$p^kf(y^2)-y^{2k}f(p)=0.\text{---------------}(**)$$

하지만 $f(p)\neq 0$이어서 임의의 y에 대해 $(**)$는 성립할 수 없고, $(*)$를 만족하는 $g(x)$는 존재하지 않는다.

3. 임의의 y에 대하여 $f(0)^2=f(0)f(y^2)$이므로, 만약 $f(0)\neq 0$면 $f(y)=f(0)$. 한편, $f(x)$가 상수함수가 아니므로 $f(0)=0$임을 알 수 있다.

이제 $f(x)$를 k차 다항함수라 하자. $f(0)=0$이므로, 인수정리(나머지정리)에 의해 적당한 $(k-1)$차 다항함수 $g(x)$에 대해

$$f(x)=xg(x).$$

한편 임의의 x,y에 대하여 $\{f(xy)\}^2=f(x^2)f(y^2)$이므로

$$(xy)^2\{g(xy)\}^2=x^2g(x^2)y^2g(y^2)=(xy)^2g(x^2)g(y^2)$$

따라서 $(k-1)$차 다항함수 $g(x)$ 역시 $(*)$를 만족한다. 다시 $g(x)$가 상수함수가 아니므로 $g(0)=0$임을 알 수 있다. 따라서 $g(x)$ 역시 x를 약수로 가짐을 알 수 있다. 결국 위의 방법을 반복하면

$$f(x)=ax^k\,(a\neq 0).$$

한편 $a=f(1)=2019$이므로

$$f(x)=2019x^k.$$

자 연 계	한양대학교 2019학년도 신입학전형 수시 **논 술 예 시 답 안**	오후(1)-2번

1. 학생의 수가 n명인 학급의 담임 선생님은 k명으로 구성된 조가 방문하면 이들에게 나눠줄 k개의 연필을 준비해야한다. k명으로 구성된 조는 ${}_nC_k$개가 가능하므로 어떤 경우라도 연필을 나누어 줄 수 있기 위해 담임 선생님이 준비해야하는 연필의 최소 개수는 $\sum_{k=1}^{n} k \times {}_nC_k$이다. 이를 이항정리를 활용하여 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n} k \times {}_nC_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} k \times \frac{n!}{(n-k)!k!} \\
&= \sum_{k=1}^{n} n \times \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} \\
&= \sum_{k=1}^{n} n \times {}_{n-1}C_{k-1} \\
&= n2^{n-1}
\end{aligned}$$

따라서, 구하고자 하는 연필의 최소개수는 $n2^{n-1}$개다.

2. 담임 선생님은 k명으로 구성된 조가 방문하면 이들에게 나눠줄 k^2개의 공책을 준비해야한다. k명으로 구성된 조는 ${}_nC_k$개가 가능하므로 담임 선생님이 준비해야하는 공책의 최소개수는 $\sum_{k=1}^{n} k^2 \times {}_nC_k$이다. 이를 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n} k^2 \times {}_nC_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} k \times k \times \frac{n!}{(n-k)!k!} \\
&= \sum_{k=1}^{n} k \times n \times \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} \\
&= \sum_{k=1}^{n} k \times n \times {}_{n-1}C_{k-1} \\
&= n\left(\sum_{k=1}^{n} (k-1) \times {}_{n-1}C_{k-1} + \sum_{k=1}^{n} {}_{n-1}C_{k-1}\right) \\
&= n\left(\sum_{k=1}^{n-1} k \times {}_{n-1}C_k + \sum_{k=0}^{n-1} {}_{n-1}C_k\right)
\end{aligned}$$

1번 문제의 결과에 n대신 $n-1$을 대입한 결과 $\sum_{k=1}^{n-1} k \times {}_{n-1}C_k = (n-1)2^{n-2}$와 이항정리를 적용하면 위 식은 $n\{(n-1)2^{n-2} + 2^{n-1}\} = n(n+1)2^{n-2}$와 같다. 따라서, 구하고자 하는 공책의 최소개수는 $n(n+1)2^{n-2}$개다.

3. 3명이 조를 짜서 방문하면 각 조원들은 3권의 공책을 받는다. 공책의 색깔이 매번 임의로 선택이 되기 때문에 3권 중 2권이상이 파란색 공책일 확률은 ${}_3C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right) + {}_3C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2}$이다. 한 학생이 포함되며 조원이 3명인 조가 6개가 있고, 6번 방문에서 매번 공책의 색깔은 독립적으로 결정되므로 구하고자 하는 확률은 $\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}$이다.

한양대학교 2019학년도 신입학전형 수시 논술고사		
자 연 계	**출제 의도 및 평가 지침**	오후(1)-1번

1. 출제 의도 및 문제 해설

본 문제는 특정한 조건을 만족하는 다항함수를 찾는 문제로, 기본적으로 다항식의 나누기에 대한 성질, 그리고 항등식의 개념을 알고 있는 학생은 충분히 풀 수 있는 문제이다. 다만 단순히 답을 제시하는 것이 아니라, 정확한 논리적인 전개를 통해 명확한 답을 끌어내는지를 확인하는 것이 주요한 포인트이다. 전체적으로 고교 교육과정안에서 그 내용의 수학적 의미를 정확하게 파악하고 있는지, 이를 명확하게 기술할 수 있는지를 파악하고자한다.

예시답안>

1. 일차함수 $f(x)=bx+c\ (b\neq 0)$가 $(*)$를 만족한다면, 임의의 x,y에 대하여

$$\{f(xy)\}^2=(axy+b)^2=a^2x^2y^2+b^2+2abxy, \qquad f(x^2)f(y^2)=(ax^2+b)(ay^2+b)=a^2x^2y^2+abx^2+aby^2+b^2$$

이므로

$$a^2x^2y^2+b^2+2abxy=a^2x^2y^2+b^2+abx^2+aby^2.$$

따라서

$$0=ab(x^2+y^2-xy)=ab(x-y)^2$$

이고 $a\neq 0$이므로 $b=0$.

2. $g(x)=ax^k+f(x)$가 $(*)$를 만족한다면, 임의의 x,y에 대하여

$$\{g(xy)\}^2=\{a(xy)^k+f(xy)\}^2=a^2(xy)^{2k}+f(xy)^2+2a(xy)^kf(xy),$$

$$g(x^2)g(y^2)=(ax^{2k}+f(x^2))(ay^{2k}+f(y^2))=a^2(xy)^{2k}+f(x^2)f(y^2)+ay^{2k}f(x^2)+ax^{2k}f(y^2)$$

이고, $\{f(xy)\}^2=f(x^2)f(y^2)$이므로

$$2a(xy)^kf(xy)=ax^{2k}f(y^2)+ay^{2k}f(x^2).$$

다시 양변을 제곱하면

$$4a^2x^{2k}y^{2k}\{f(xy)\}^2=a^2x^{4k}f(y^2)^2+a^2y^{4k}f(x^2)^2+2a^2x^{2k}y^{2k}f(x^2)f(y^2)$$

이고, $\{f(xy)\}^2=f(x^2)f(y^2)$을 이용하여 정리하면

$$a^2\{x^{2k}f(y^2)-y^{2k}f(x^2)\}^2=0.$$

따라서, 임의의 x,y에 대하여

$$x^{2k}f(y^2)-y^{2k}f(x^2)=0.$$

한편, $f(x)$가 $(k-1)$차 함수이므로 $f(p)\neq 0$인 실수 p가 존재한다. 따라서 이 p와 임의의 y에 대해

$$p^kf(y^2)-y^{2k}f(p)=0.\text{---------------}(**)$$

하지만 $f(p)\neq 0$이어서 임의의 y에 대해 $(**)$는 성립할 수 없고, $(*)$를 만족하는 $g(x)$는 존재하지 않는다.

3. 임의의 y에 대하여 $f(0)^2=f(0)f(y^2)$이므로, 만약 $f(0)\neq 0$면 $f(y)=f(0)$. 한편, $f(x)$가 상수함수가 아니므로 $f(0)=0$임을 알 수 있다.

이제 $f(x)$를 k차 다항함수라 하자. $f(0)=0$이므로, 인수정리(나머지정리)에 의해 적당한 $(k-1)$차 다항함수 $g(x)$에 대해

$$f(x) = xg(x).$$

한편 임의의 x,y에 대하여 $\{f(xy)\}^2 = f(x^2)f(y^2)$이므로

$$(xy)^2\{g(xy)\}^2 = x^2g(x^2)y^2g(y^2) = (xy)^2g(x^2)g(y^2)$$

따라서 $(k-1)$차 다항함수 $g(x)$ 역시 $(*)$를 만족한다. 다시 $g(x)$가 상수함수가 아니므로 $g(0)=0$임을 알 수 있다. 따라서 $g(x)$ 역시 x를 약수로 가짐을 알 수 있다. 결국 위의 방법을 반복하면

$$f(x) = ax^k\,(a \neq 0).$$

한편 $a = f(1) = 2019$이므로

$$f(x) = 2019x^k.$$

2. 종합 평가 기준

문항	배점	세부 평가 기준	세부 배점
1	20	제시문의 조건을 만족하는 1차함수를 잘 찾았는가?	20
2	40	항등식의 성질과 제시문의 성질로부터 만족하는 함수가 존재하지 않음을 잘 보였는가?	40
3	40	$f(x)$가 상수함수가 아니라는 사실을 이용하여 $f(0)=0$임을 보였는가?	10
		인수정리와 제시문의 조건을 이용하여 모든 $f(x)$를 찾았는가?	30

한양대학교 2019학년도 신입학전형 수시 논술고사		
자 연 계	**출제 의도 및 평가 지침**	오후(1)-2번

1. 출제 의도 및 문제 해설

고등학교 교육과정을 정상적으로 이수한 학생은 누구나 해결할 수 있는 문제를 고등학교 교과과정의 범위에서 출제하였다. 특히, 수학의 개념, 원리, 법칙을 정확히 이해하고, 제시문으로 주어진 상황을 정확히 파악하여 수학적 사고력을 바탕으로 문제를 해결할 수 있는 능력을 측정하는데 주안점을 두고 출제를 하였다.

문항 1은 주어진 제시문에서 읽고 이항정리를 활용하여 해결하는 문제이다. 문항 2는 문항 1의 결과를 바탕으로 문제해결을 위해 이항정리를 반복적으로 활용하여 해결하는 문제이다. 두 문항 모두 제시문의 상황을 정확히 파악하고 이항정리의 개념을 명확히 이해해서 활용할 수 있는지를 평가하는 문제이다. 문항 3은 주어진 상황을 파악하고 이에 맞는 독립시행의 확률을 계산하는 문제이다.

2. 종합 평가 기준

문항	배점	세부 평가 기준	세부 배점
1	30	제시문의 상황을 파악하여 연필의 최소개수를 식으로 표현하였다.	10
		연필의 최소개수를 구하였다.	20
2	40	제시문의 상황을 파악하여 공책의 최소개수를 식으로 표현하였다.	10
		공책의 최소개수를 구하였다.	30
3	30	한번 방문 시 파란색 공책을 매번 2권 이상씩 받을 확률을 계산하였다.	20
		6번 모두 방문할 때의 확률을 계산하였다.	10

3. 출제 근거

순열과 조합 - 고등학교 확률과 통계 p11~p51 (비상교육, 김원경 외 11인)

이항정리 p40~p42

확률 - 고등학교 확률과 통계 p57~p87 (비상교육, 김원경 외 11인)

독립시행의 확률 p79~p80

한양대학교

답안지 (자연계)

답안지 바코드

지원학과	
성 명	
수험번호	
생년월일 (예:000301)	

수험생 유의사항

1. 답안지는 검정색 펜(볼펜, 연필, 샤프)으로 작성하십시오. (빨강색이나 파랑색 사용금지)
2. 답안지를 수정할 경우 지우개(연필, 샤프 사용 시)를 사용하거나 두 줄을 긋고(볼펜 사용 시) 그 위에 재 작성하십시오.
3. 답안과 관련 없는 표현이나 표시를 한 답안지는 "0"점 처리 됩니다.
4. 본 고사는 답안지 1장 이내에 답안을 작성하여야 합니다. 답안지 교체는 가능하지만 기존 답안지 제출은 불가합니다.

문제 1번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

1-1. $f(x) = mx + n$ (m, n은 상수) 라 하자.

준식에 대입하면 $\{mxy + n\}^2 = (mx^2+n)(my^2+n)$ 이다.

$$m^2x^2y^2 + 2mnxy + n^2 = m^2x^2y^2 + mnx^2 + mny^2 + n^2$$

이 식이 x, y에 상관 없이 만족하려면.

$2mnxy = mn(x^2+y^2)$ 이 x, y에 상관 없이 성립해야 한다.

따라서 $mn=0$ 곧 $m=0$ or $n=0$ 이어야 하는데

$m=0$ 이면 $f(x)$는 일차함수가 아니므로 $n=0$ 인 모든 일차함수가 $f(x)$에 해당한다.

따라서 $\therefore f(x) = mx$ (m은 상수).

1-2. $ax^k + f(x) = h(x)$ 라 하자

$\{h(xy)\}^2 = h(x^2)\cdot h(y^2)$ 를 만족하는 k차 함수 $h(x)$의 존재성에 대해 논하겠다.

식에 대입하면 $\{ax^ky^k + f(xy)\}^2 = \{ax^{2k} + f(x^2)\}\{ay^{2k} + f(y^2)\}$.

$\cancel{a^2x^{2k}y^{2k}} + 2ax^ky^kf(xy) + \cancel{\{f(xy)\}^2}$

$= \cancel{a^2x^{2k}y^{2k}} + ax^{2k}f(y^2) + ay^{2k}f(x^2) + \cancel{f(x^2)f(y^2)}$.

위식이 만족하기 위해서는

$2ax^ky^kf(xy) = ax^{2k}f(y^2) + ay^{2k}f(x^2)$ 이 성립해야 한다.

$ax^{2k}f(y^2) - 2a\cdot x^k\cdot y^k\cdot f(xy) + ay^{2k}f(x^2) = 0$.

$a\{x^{2k}f(y^2) - 2x^k\cdot y^k\cdot f(xy) + y^{2k}\cdot f(x^2)\} = 0$.

x, y 값에 관계 없이 식이 만족하는 지를 따져보면. 이때 $a=0$ 인 경우는 함수가 $f(x)$가 되니 당연히 준식이 성립하므로 별도로 언급하지 않고 $a \neq 0$을 가정하겠다.

i) $f(xy) \geq 0$. $f(xy) = \sqrt{f(x^2)f(y^2)}$

ii) $f(xy) < 0$. $-f(xy) = \sqrt{f(x^2)f(y^2)}$

i) $a\{x^{2k}f(y^2) - 2x^ky^k\cdot\sqrt{f(x^2)f(y^2)} + y^{2k}\cdot f(x^2)\}$

$= a\{x^k\sqrt{f(y^2)} - y^k\cdot\sqrt{f(x^2)}\}^2 = 0$.

$x^k\sqrt{f(y^2)} - y^k\cdot\sqrt{f(x^2)} = 0$.

$x^k\sqrt{f(y^2)} = y^k\cdot\sqrt{f(x^2)}$ $\quad \dfrac{y^k}{x^k} = \dfrac{\sqrt{f(y^2)}}{\sqrt{f(x^2)}}$ $\quad \therefore \dfrac{y^{2k}}{x^{2k}} = \dfrac{f(y^2)}{f(x^2)}$

이때 $f(x)$는 $(k-1)$차 함수 이므로 $(\because)$식이 항상성립할수는 없다.

(ii)의 경우 식이.

$x^k\sqrt{f(y^2)} = -y^k\sqrt{f(x^2)}$ 이 되고.

$-\dfrac{x^k}{y^k} = \dfrac{\sqrt{f(x^2)}}{\sqrt{f(y^2)}}$ 역시 x, y에 상관없이 무조건 성립한다 볼수 없다.

$f(x^2)$과 $f(y^2)$이 모두 음수 or 하나만 음수 일수도 있으나

역시 x, y에 관계없이 식이 성립할수는 없으므로

$ax^k + f(x)$가 준 식을 만족하는 경우는 존재하지 않는다.

1-3. 우선 1-1 에서 등식을 만족하는 일차함수로 '$f(x) = mx$'가 존재하기에.

$f(1) = 2019$ 이면 $f(x) = 2019x$ 가 될수 있다.

만약 $f(x)$가 2차 이상의 다항함수 라면. 어떠지 논해보겠다

$y=0$을 대입하면 $\{f(0)\}^2 = f(x^2)\cdot f(0)$ $\quad$ $f(x^2)$은 항상 0인 것은 아니므로 상수함수가 아니기때문에.

즉은 (인것은 아니므로

$f(0) = 0$ 이어야 한다.

그런데 이때 $f(x) = a(x-m)\cdot x^{k-1}$ 로 가정해보자 $(k \geq 2)$.

즉, $f(x)$가 'x'를 제외하고 다른 인수를 갖는다 하면

$\{f(xy)\}^2 = f(x^2)f(y^2)$

$\{a(xy-m)(xy)^{k-1}\}^2 = a(x^2-m)\cdot x^{2k-2}\cdot a(y^2-m)y^{2k-2}$.

$a^2(xy-m)^2(xy)^{2k-2} = a^2(xy)^{2k-2}(x^2y^2 - m(x^2+y^2) + m^2)$.

식이 성립하려면 $(xy-m)^2 = x^2y^2 - 2m(x^2+y^2) + m^2$

x, y에 값에 관계 없이 $\quad x^2y^2 - 2mxy + m^2 = x^2y^2 - 2m(x^2+y^2) + m^2$.

$-2mxy = -2m(x^2+y^2)$.

이때 $xy = x^2+y^2$ 은 어떤 경우에도 성립할 수 없다.

따라서 $f(x)$가 'x' 이외의 다른 인수를 가져서는 안된다.

$f(x) = ax^k$ (a는 상수. k는 1이상의 자연수가 위와 관계없이 다시 규정하겠다.)

$f(1) = 2019 = a$

따라서 $\therefore f(x) = 2019x^k$. ($k \geq 1$인 자연수). 로 $f(x)$가 결정된다.

$f(x) = 2019x,\ 2019x^2,\ 2019x^3,\ 2019x^4, \ldots$

이 줄 아래 답안 작성 시 무효 처리됨

한양대학교

답안지 (자연계)

답안지 바코드

지원학과	
성 명	
수험번호	
생년월일 (예:000301)	

수험생 유의사항

1. 답안지는 검정색 펜(볼펜, 연필, 샤프)으로 작성하십시오. (빨강색이나 파랑색 사용금지)
2. 답안지를 수정할 경우 지우개(연필, 샤프 사용 시)를 사용하거나 두 줄을 긋고(볼펜 사용 시) 그 위에 재 작성하십시오.
3. 답안과 관련 없는 표현이나 표시를 한 답안지는 "0"점 처리 됩니다.
4. 본 고사는 답안지 1장 이내에 답안을 작성하여야 합니다. 답안지 교체는 가능하지만 기존 답안지 제출은 불가합니다.

문제 1번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

[1-1] $f = ax+b$ $(a\neq 0)$ 라 하자.

$(f(xy))^2 = f(x^2)f(y^2)$

$\Leftrightarrow$ $(axy+b)^2 = (ax^2+b)(ay^2+b)$

$\Leftrightarrow$ $ab(x-y)^2=0$ 이 항등식이기 위해

$b=0$ 이다.

따라서 $f(x)=ax$ (단, $a\neq 0$) 이다.

[1-2] $g(x) = ax^k + f(x)$ (단, $a\neq 0$) 라 하자.

$(g(xy))^2 - g(x^2)g(y^2)$

$= a(2x^k y^k f(xy) - x^{2k}f(y^2) - y^{2k}f(x^2))$

$= -a(x^k\sqrt{f(y^2)} - y^k\sqrt{f(x^2)})^2 = 0$ 이 항등식이기

위해 모든 실수 x, y 에 대해

$x^k\sqrt{f(y^2)} = y^k\sqrt{f(x^2)}$ 이어야 한다.

$x\neq 0$, $y\neq 0$ 인 경우

$\frac{\sqrt{f(x^2)}}{x^k} = \frac{\sqrt{f(y^2)}}{y^k}$ 가 항등식이라면

함수 $\frac{\sqrt{f(x^2)}}{x^k} = C$ (C는 상수) 이다.

정리하면 $f(x^2) = C^2 x^{2k}$

인데 $f(x)$는 $(k-1)$차 함수이므로 모순이다.

따라서 제시문의 조건을 만족하는

$ax^k + f(x)$ 꼴의 k차 함수는 존재하지 않는다.

(제시문을 만족하는 $(k-1)$차 함수 $f(x)$에 대해) (단 $k\geq 2$)

[1-3]

$g(0)=0$ 이고 다항함수 $h(x)$에 대해

$g(x) = x\,h(x)$ 로 나타낼 수 있다고 하자.

이때

$\{g(xy)\}^2 = g(x^2)g(y^2)$

$\Leftrightarrow$ $x^2y^2\{h(xy)\}^2 = x^2y^2h(x^2)h(y^2)$

$\Leftrightarrow$ $\{h(xy)\}^2 = h(x^2)h(y^2)$ $\cdots$ ①

$h(x)$가 조건을 만족하면 $xh(x)$도 조건을 만족함을 알 수 있다.

따라서 자연수 n에 대해 ax^n $(a\neq 0)$ 은 모두 조건을 만족한다. (문제 1-1에서 ax의 경우 보임)

$\therefore f(x) = 2019x^n$ (n은 자연수) $\cdots$ ②

명제 ① 에서 $h(x)$가 조건을 만족하지 않으면 $xh(x)$도 조건을 만족하지 않으므로

답은 ② 이외에 없다.

($\because$ $h(x)+k$ 는 조건 불만족)

1

이 줄 아래 답안 작성 시 무효 처리됨

문제 2번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

2-1.

$1 \le k \le n$인 자연수 k에 대해, 학생 수가 n명일 때 k명으로 구성되는 조의 구성의 개수는 ${}_nC_k$이고, 모든 k명에게 1개씩 한 조마다 총 k개의 연필이 필요하므로, 어떤 경우에도 연필이 부족하지 않으려면 연필은 최소 $\sum_{k=1}^{n} k\,{}_nC_k$개 필요하다.

$$k \cdot {}_nC_k = k \times \frac{n!}{(n-k)!k!} = n \times \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} = n \times {}_{n-1}C_{k-1}$$

이므로

$$\sum_{k=1}^{n} k\,{}_nC_k = \sum_{k=1}^{n} {}_{n-1}C_{k-1} \times n$$

$$= n \times \sum_{k=0}^{n-1} {}_{n-1}C_k = n \times 2^{n-1}$$ 이고

∴ 연필은 최소 $n \times 2^{n-1}$개 필요하다.

2-2

$1 \le k \le n$인 자연수 k에 대해, 학생수가 n명일 때 k명으로 구성되는 조의 구성의 개수는 ${}_nC_k$이고, 모든 k명에게 k개씩, 한 조마다 총 k^2개의 연필이 필요하므로

어떤 경우에도 공책이 모자라지 않으려면 공책은 최소 $\sum_{k=1}^{n} k^2\,{}_nC_k$개 필요하다.

$$\sum_{k=1}^{n} k^2\,{}_nC_k = \sum_{k=1}^{n} (k^2-k+k)\,{}_nC_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k(k-1)\,{}_nC_k + \sum_{k=1}^{n} k\,{}_nC_k$$

$$= \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\,{}_nC_k + \sum_{k=1}^{n} k\,{}_nC_k$$ 이고

$2 \le k \le n$인 자연수 k에 대해

$$k(k-1)\,{}_nC_k = k(k-1) \times \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

$$= n(n-1) \times \frac{(n-2)!}{(n-k)!(k-2)!} = n(n-1)\,{}_{n-2}C_{k-2}$$ 이므로

$$\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\,{}_nC_k + \sum_{k=1}^{n} k\,{}_nC_k$$

$$= n(n-1)\sum_{k=2}^{n} {}_{n-2}C_{k-2} + \sum_{k=1}^{n} k\,{}_nC_k$$

$$= n(n-1)\sum_{k=0}^{n-2} {}_{n-2}C_k + \sum_{k=1}^{n} k\,{}_nC_k = n(n-1)2^{n-2} + n \cdot 2^{n-1}$$

∴ 공책은 최소 $n(n-1)2^{n-2} + n \cdot 2^{n-1}$개 필요하다.

2-3.

문제의 학생은 한번 갈 때마다 공책을 3권씩 받는다.

그때 파란 공책을 2권 이상 받을 확률은

$$\underbrace{{}_3C_2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3}_{\text{2권 받을 확률}} + \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^3}_{\text{3권 받을 확률}} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times 4 = \frac{1}{2}$$ 이다.

방문한 6번 모두 파란 공책을 2권 이상 받을 확률은

$$\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}$$ 이다.

이 줄 위에 답안 작성 시 무효 처리됨

문제 2번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

[2-1] k명의 조는 $_nC_k$ 가지 있으므로 적어도

$$\sum_{k=1}^{n} {_nC_k}\, k = \sum_{k=1}^{n} {_{n-1}C_{k-1}}\, n = 2^{n-1}n$$ 개의

연필을 준비해야 한다.

[2-2] k명의 조는 $_nC_k$ 가지 있으므로 적어도

$$\sum_{k=1}^{n} {_nC_k}\, k^2 = \sum_{k=1}^{n} {_{n-1}C_{k-1}}\, nk$$

$$= n\sum_{k=0}^{n-1} {_{n-1}C_k}(k+1)$$

$$= n\sum_{k=1}^{n-1}(n-1)\,{_{n-2}C_{k-1}} + n\sum_{k=0}^{n-1} {_{n-1}C_k}$$

$= 2^{n-2}n(n+1)$ 개의 공책이 필요하다.

[2-3] 한 학생이 3명의 조로 한 번 방문해서 파란색 공책을 2권 이상 받을 확률은

$\dfrac{_3C_2 + {_3C_3}}{2^3} = \dfrac{1}{2}$ 이다.

따라서 6번 방문할 때마다 2권 이상의 파란색 공책을 받을 확률은

$\left(\dfrac{1}{2}\right)^6 = \dfrac{1}{64}$ 이다.

이 줄 아래 답안 작성 시 무효 처리됨