한양대학교 2019학년도 신입학전형 수시		
자 연 계	**논 술 예 시 답 안**	오전-1번

[문제 1]

1. 제시문 <가>의 곡선은

$$x(t)=2\sin t,\ y(t)=3\cos(2t)=3(1-2\sin^2 t)=3\left\{1-\frac{x(t)^2}{2}\right\}$$

이다. 즉, $y=3(1-\frac{x^2}{2})$ $(-2\le x\le 2)$이다.

이 곡선이 점 $(\pm\sqrt{2},0)$에서 x축과 만나므로, $\mathrm{F}(\sqrt{2},0)$, $\mathrm{F}'(-\sqrt{2},0)$으로 놓을 수 있다. 그리고 $\mathrm{P}(0,3)$, $\mathrm{Q}(0,-3)$이다. 그러므로 두 초점이 F, F'이고 선분 PQ가 단축인 타원의 장축의 길이는 $2\sqrt{3^2+2}=2\sqrt{11}$이다. 이로부터 구하는 타원의 방정식은

$$\frac{x^2}{11}+\frac{y^2}{9}=1$$

2. $A=1$, $B=3$, $\frac{3\pi}{4}<\theta<\pi$일 때, 제시문 <가>의 곡선이 x축과 만나는 점 R의 좌표를 계산하자.

$$y(t)=3\cos(2t+\theta)=0$$

그런데 $\frac{3\pi}{4}<2t+\theta<\frac{7\pi}{4}$이므로 $2t+\theta=\frac{3\pi}{2}$, 즉, $t=\frac{3\pi}{4}-\frac{\theta}{2}$가 되고 이로부터 $x(t)=\sin(\frac{3\pi}{4}-\frac{\theta}{2})$를 얻는다. 따라서 R의 좌표는 $(\sin(\frac{3\pi}{4}-\frac{\theta}{2}),0)$이다.

제시문 <가>의 곡선이 y축과 만나는 점 S의 좌표를 계산하자.

$$x(t)=\sin t=0$$

그런데 $0\le t\le\frac{3\pi}{8}$이므로 $t=0$이고 $y(0)=3\cos\theta$이다. 따라서 S의 좌표는 $(0,3\cos\theta)$이다.

이제 y좌표가 최소가 되는 점 T를 찾자. $\cos(2t+\theta)=-1$일 때 y좌표가 최소가 되므로, $2t+\theta=\pi$, 즉 $t=\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}$를 얻는다. 따라서 T의 좌표는 $(\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}),-3)=(\cos\frac{\theta}{2},-3)$이다. 점 U는 점 T를 y축에 대하여 대칭 이동하여 얻어지므로 U의 좌표는 $(-\cos\frac{\theta}{2},-3)$이다.

그러므로

$$\begin{aligned}f(\theta)=\overrightarrow{\mathrm{RU}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{ST}}&=(-\cos\frac{\theta}{2}-\sin(\frac{3\pi}{4}-\frac{\theta}{2}),-3)\cdot(\cos\frac{\theta}{2},-3-3\cos\theta)\\&=\cos\frac{\theta}{2}(-\cos\frac{\theta}{2}-\sin(\frac{3\pi}{4}-\frac{\theta}{2}))+9+9\cos\theta\end{aligned}$$

삼각함수의 덧셈정리에 의하면

$$\begin{aligned}f'(\theta)&=\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}+\frac{1}{2}(\sin\frac{\theta}{2}\sin(\frac{3\pi}{4}-\frac{\theta}{2})+\cos\frac{\theta}{2}\cos(\frac{3\pi}{4}-\frac{\theta}{2}))-9\sin\theta\\&=\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{1}{2}\cos(\frac{3\pi}{4}-\theta)-9\sin\theta=-\frac{17}{2}\sin\theta+\frac{1}{2}\cos(\frac{3\pi}{4}-\theta)\end{aligned}$$

θ에 $\frac{5\pi}{6}$를 넣으면 $f'(\frac{5\pi}{6})=-\frac{17}{2}\sin\frac{5\pi}{6}+\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{12}$

그런데 $\sin\frac{5\pi}{6}=\frac{1}{2}$이고 $\cos\frac{\pi}{12}=\cos(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})=\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$이므로

$$f'(\frac{5\pi}{6})=-\frac{17}{4}+\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{8}$$

3. $x(t)^2+2y(t)^2=\sin^2 t+\cos^2 t=1$이므로 제시문 <나>의 곡선은 타원 $x^2+2y^2=1$이다.

기울기가 m인 접선의 방정식을 $y=mx+n$라 하면, 교점의 x좌표는 $x^2+2(mx+n)^2=1$을 만족한다. 중근을 가져야 하므로,

$$D/4=(2mn)^2-(1+2m^2)(2n^2-1)=0$$

$$\Rightarrow\ \ 2n^2=2m^2+1\ \ \Rightarrow\ \ n=\pm\sqrt{m^2+\frac{1}{2}}$$

따라서 기울기가 m인 접선의 방정식은 $y=mx\pm\sqrt{m^2+\frac{1}{2}}$ 이다.

기울기가 m인 접선이 점 $\mathrm{P}(a,b)$를 지날 때($a\neq\pm1$)

$$b=ma\pm\sqrt{m^2+\frac{1}{2}}\quad\Rightarrow\quad(b-ma)^2=m^2+\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow\ (a^2-1)m^2-2abm+b^2-\frac{1}{2}=0\qquad\text{------------}\quad ①$$

식 ①의 두 근을 m_1, m_2라 하면, 두 직선이 서로 수직으로 만날 조건에 의해 $m_1m_2=\dfrac{b^2-\frac{1}{2}}{a^2-1}=-1$이다. 따라서 $a^2+b^2=\dfrac{3}{2}$을 만족한다. 한편, $a=\pm1$일 때 즉, 점 $\mathrm{P}(a,b)$의 좌표가 $\left(1,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(1,-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(-1,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(-1,-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$일 때도 모두 타원에 그은 접선은 수직이고, $a^2+b^2=\dfrac{3}{2}$을 만족하므로 점 P의 자취는 중점이 원점 $(0,0)$이고 반지름이 $\sqrt{\dfrac{3}{2}}$인 원이다.

	한양대학교 2019학년도 신입학전형 수시	
자 연 계	**논 술 예 시 답 안**	오전-2번

1. 문제에서 주어진 이차방정식을 $h(x)=x^2-2(st-\vec{a}\cdot\vec{b})x+1$으로 나타내자.

두 부등식 $\beta \le \frac{s}{t} \le \alpha$, $\beta \le \frac{t}{s} \le \alpha$를 보이기 위하여 이차함수 $h(x)$의 그래프를 생각하면, $h\left(\frac{t}{s}\right) \le 0$, $h\left(\frac{s}{t}\right) \le 0$임을 보이면 된다.

우선 $h\left(\frac{t}{s}\right)$, $h\left(\frac{s}{t}\right)$를 계산하면 다음과 같다.

$$h\left(\frac{t}{s}\right)=\frac{t^2}{s^2}-2(st-\vec{a}\cdot\vec{b})\frac{t}{s}+1=\frac{1}{s^2}(t^2-2st(st-\vec{a}\cdot\vec{b})+s^2)$$

$$h\left(\frac{s}{t}\right)=\frac{s^2}{t^2}-2(st-\vec{a}\cdot\vec{b})\frac{s}{t}+1=\frac{1}{t^2}(s^2-2st(st-\vec{a}\cdot\vec{b})+t^2).$$

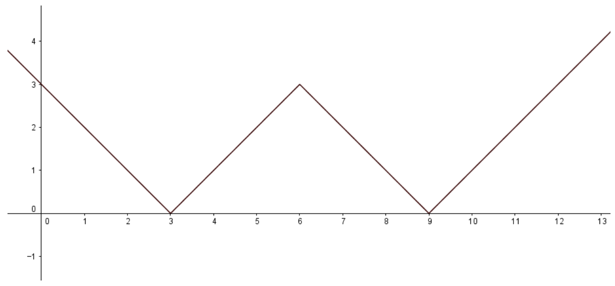
그런데, 양수 s,t에 대하여 다음 부등식이 성립한다.

$$2st(\vec{a}\cdot\vec{b}) \le 2st|\vec{a}||\vec{b}| \le s^2|\vec{b}|^2+t^2|\vec{a}|^2=2s^2t^2-s^2-t^2 \cdots\cdots ①$$

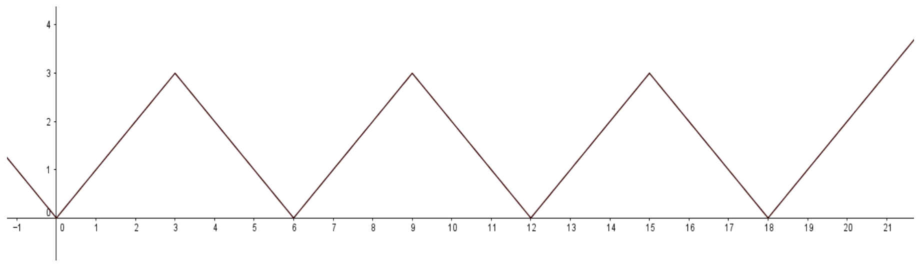
①의 부등식을 정리하면, $t^2+2st(\vec{a}\cdot\vec{b})+s^2-2s^2t^2=t^2-2st(st-(\vec{a}\cdot\vec{b}))+s^2 \le 0$이다.

그러므로 $h\left(\frac{t}{s}\right) \le 0$, $h\left(\frac{s}{t}\right) \le 0$ 이다.

2. $f(x-3)=||x-6|-3|$ 과 $f^2(x-3\cdot 2)$ 의 그래프는 다음과 같다.



$f(x-3)$



$f^2(x-3\cdot 2)$

A_1 의 넓이는 $S_1=\pi\left[\sum_{k=1}^{2}(24k-12)\right]=48\pi$ 이다.

같은 방법으로 n 이 홀수, 짝수인 경우를 나누어 생각하여 넓이를 구할 수 있다.

A_{2n-1} 의 넓이를 계산하면, $S_{2n-1}=\pi\{27(2n-1)^2+18(2n-1)+3\}$ 이다.

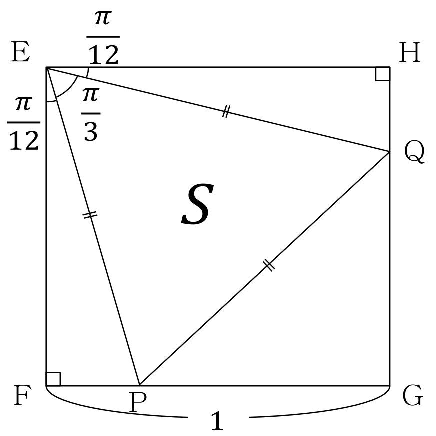
A_{2n} 의 넓이를 계산하면, $S_{2n}=\pi\{27(2n)^2+18(2n)+1\}$ 이다.

A_n 의 넓이를 구해보면, $S_n=\pi\{27n^2+18n+(-1)^{n+1}+2\}$ 이다.

그러므로 극한값은 $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^2}=27\pi$ 이다.

3. S를 정사각형 EFGH 에 들어있는 넓이가 최대인 정삼각형이라 하면,

S를 적당히 이동해 의해 S의 두 꼭짓점 P , Q 는 정사각형 EFGH 의 인접한 두 변에 놓여있다고 할 수 있다. 이 두 변을 변 FG 와 변 GH 라 가정하자.



S의 다른 한 꼭짓점이 정사각형 EFGH 의 내부에 있다면,

S보다 넓이가 더 큰 정삼각형을 찾을 수 있으므로 모순이다.

따라서 S의 다른 한 꼭짓점은 변 EF 또는 변 HE 위에 있다.

이 꼭짓점이 변 EF 또는 변 HE 위에 있고 점 E가 아니라면,

평행이동에 의해 꼭짓점 P 또는 Q 를 정사각형 EFGH 의 내부에 있도록

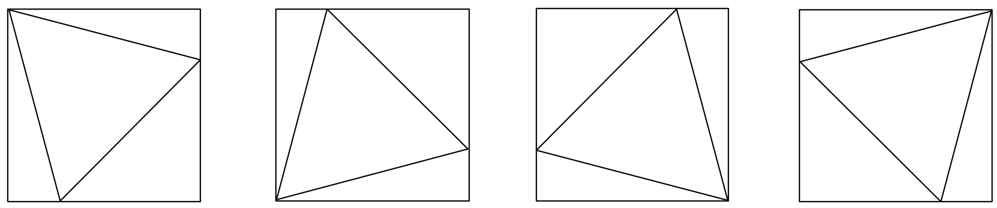
할 수 있어 모순이다. 따라서 정삼각형 S의 다른 한 꼭짓점은 점 E이다.

이 때, 삼각형 EPF 와 삼각형 EQH 는 합동이고, $\frac{1}{\overline{\mathrm{EP}}} = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ 이므로

$\overline{\mathrm{EP}} = \sqrt{6} - \sqrt{2}$ 이다. 따라서 S의 넓이$= \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2 = 2\sqrt{3} - 3$ 이다.

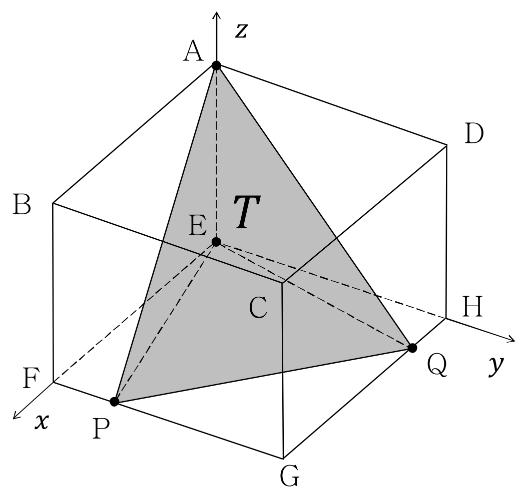
정사영 S의 한 꼭짓점이 정사각형 EFGH 의 한 꼭짓점이 되므로 이 꼭짓점의 선택에 따라 정사영 S는

다음 4가지 경우 중 하나가 되고, 각 경우 3개의 T가 존재하므로 구하는 T는 모두 12개 이다.



12개의 삼각형 T는 모두 합동임을 쉽게 알 수 있다. 따라서 그 중 하나인

삼각형 APQ 의 넓이를 구하자. T 를 포함하는 평면의 방정식은



$x + y + \sqrt{3}z = 3 - \sqrt{3}$ 이고, 이 평면과 xy-평면이 이루는 각을 θ 라 하면,

$\cos\theta = \frac{1\cdot 0 + 1\cdot 0 + \sqrt{3}\cdot 1}{\sqrt{1^2 + 1^2 + \sqrt{3}^2}\cdot\sqrt{0^2+0^2+1^2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$ 이다.

따라서 (T 의 넓이)$\times\cos\theta =$ (S의 넓이) 이므로

T 의 넓이 $= \frac{1}{\cos\theta}\cdot\left(2\sqrt{3}-3\right) = 2\sqrt{5} - \sqrt{15}$ 이다.

한양대학교 2019학년도 신입학전형 수시 논술고사

자 연 계	**출제 의도 및 평가 지침**	오전-1번

1. 출제 의도 및 문제 해설

학생들이 고등학교 수학과 교육과정에서 추구하는 여러 목표를 충분히 달성했는지를 측정하는 것에 주안점을 두고 문제를 출제하였다. 예컨대, 학생들이 수학적 개념, 원리 및 법칙을 제대로 이해하고, 문제를 합리적이고 창의적으로 해결하는 능력을 가지고 있는지를 확인하고자 하였다.

자연계 오전의 문제 1번은 매개변수로 나타낸 함수를 제대로 이해하는 지를 측정한다.

첫 번째 문항에서는 제시된 함수가 포물선임을 파악할 수 있는지, 또한 타원의 정의를 이용하여 타원의 방정식을 나타낼 수 있는지를 물었다. 이는 ‘기하와 벡터’의 주요 학습내용에 속한다.

두 번째 문항에서는 제시된 함수의 정의 및 대칭이동의 개념을 이용하여 두 평면벡터의 내적을 계산할 수 있는지, 미분법의 정의에 따라 사인함수와 코사인함수를 미분할 수 있는지, 삼각함수의 덧셈정리를 이해하는 지를 물었다. 이는 ‘수학I’, ‘미적분II’, ‘기하와 벡터’의 주요 학습내용에 속한다.

세 번째 문항에서는 제시된 함수가 타원임을 파악할 수 있는지, 한 점에서 타원에 그은 접선의 방정식을 계산할 수 있는지, 두 직선의 수직 조건을 이해하는지를 물었다. 이는 ‘수학I’, ‘기하와 벡터’의 주요 학습내용에 속한다.

2. 종합 평가 기준

문항	배점	세부 평가 기준	세부 배점
1	20	점 F, F′, P, Q의 좌표를 모두 구했는가?	10
		타원의 방정식을 구했는가?	10
2	40	점 R, S, T, U의 좌표를 모두 구했는가?	10
		$\overrightarrow{RU} \cdot \overrightarrow{ST}$를 θ에 대한 식 $f(\theta)$로 제대로 표현했는가?	10
		$\theta=\frac{5\pi}{6}$에서의 미분계수 $f'(\frac{5\pi}{6})$을 정확히 계산하였는가?	20
3	40	매개변수로 나타낸 곡선이 타원임을 파악하고, 한 점에서 타원에 그은 접선의 방정식을 제대로 계산하였는가?	20
		두 직선의 수직 조건을 이용하여, 점 P의 자취가 어떤 곡선인지 잘 설명하였는가?	20

3. 출제 근거

이 문제는 고등학교 수학과 교육과정을 정상적으로 이수한 학생들은 충분히 해결할 수 있는 문제들로 구성되어 있으며, ‘수학I’, ‘미적분II’, ‘기하와 벡터’의 주요 내용을 다룬다. 3개의 소문항은 교과서 내용과 다음과 같이 연계된다.

교과서 수학I (좋은책 신사고 황선욱 외 10인)−대칭이동 p.162−164

교과서 미적분II ((주)금성출판사 정상권 외 7인)−삼각함수의 덧셈정리 p.82−83

교과서 미적분II ((주)금성출판사 정상권 외 7인)−삼각함수의 미분 p.93−94

교과서 기하와 벡터 ((주)금성출판사 정상권 외 7인)−타원 p.18−20

교과서 기하와 벡터 ((주)금성출판사 정상권 외 7인)−매개변수로 나타낸 함수의 미분법 p.43−45

한양대학교 2019학년도 신입학전형 수시 논술고사

자 연 계	**출제 의도 및 평가 지침**	오전-2번

1. 출제 의도 및 문제 해설

자연계열 오전-2번 문제는 고교수학과정 중 “기하와 벡터–공간도형과 공간벡터–공간벡터”의 공간벡터의 내적, 직선과 평면의 방정식 단원, “미적분 I–수열의 극한–수열의 극한”의 극한값의 계산 단원 및 “기하와 벡터–공간도형과 공간벡터–공간도형”의 정사영 단원을 주요 내용으로 하고 있다. 수업시간에 배운 여러 도구와 지식을 적절히 활용해서 부등식이 성립함을 보이고, 주어진 도형의 넓이와 수열의 극한 등을 잘 구할 수 있는지를 묻고 있다. 다음 3개의 소문항으로 구성되어 있다.

문항 1. 이차방정식과 벡터의 내적을 적용하여 부등식의 성립을 보이기.
문항 2. 절대값을 포함하는 함수의 합성과 그래프의 이해를 통해 평면도형의 넓이를 구하고, 극한값을 구하기.
문항 3. 정육면체 안에 놓여 있는 한 삼각형의 정사영에 대한 정보로부터 이 도형의 넓이와 개수 구하기.

2. 종합 평가 기준

문항	배점	세부 평가 기준	세부 배점
1	30	$h\left(\frac{t}{s}\right),\ h\left(\frac{s}{t}\right) \le 0$임을 보이면 부등식이 성립하는지 알고 있는가?	10
		$h(\frac{s}{t}), h(\frac{t}{s})$의 값을 잘 구했는가?	10
		$h\left(\frac{t}{s}\right),\ h\left(\frac{s}{t}\right) \le 0$임을 잘 보였는가?	10
2	30	A_1의 넓이 S_1을 잘 구했는가?	10
		그래프의 관찰을 통해 S_{2n-1} 또는 S_{2n}을 잘 구했는가?	10
		A_n의 넓이 S_n을 구하고 극한값을 잘 구했는가?	10
2	40	정사영 S의 넓이를 잘 구했는가?	20
		삼각형 T의 개수를 잘 구했는가?	10
		삼각형 T의 넓이를 잘 구했는가?	10

3. 출제 근거

이 문제는 고등학교에서 고교과정의 수학을 정상적으로 이수한 학생들은 충분히 해결할 수 있는 문제들로 구성되었으며, 교과서 수학I, 기하와 벡터와 미적분I의 주요내용을 다루고 있다. 3개의 소문항은 교과서의 내용과 다음과 같이 연계되며, 모든 교과서에서 공통으로 다루는 내용만으로 구성되어 있다.
교과서 수학I (미래엔 이강섭 외 14인)–방정식과 부등식–이차방정식과 이차함수 p.80–87

교과서 수학I (미래엔 이강섭 외 14인)-도형의 방정식-부등식의 영역 p.203-210
교과서 미적분I (교학사 김창동 외 14인)-수열의 극한-극한값의 계산 p.18-26
교과서 미적분I (비상교육 김원경 외 11인)-수열의 극한- 수열의극한값의 계산 p.15-23
교과서 기하와 벡터 (금성교과서 정상권 외 7인)-공간곡선과 공간벡터-공간도형-정사영 p. 136-144
교과서 기하와 벡터 (금성교과서 정상권 외 7인)-공간곡선과 공간벡터-공간벡터-평면과 구의 방정식 p. 177-182

한양대학교

답안지 (자연계)

답안지 바코드

지원학과	
성 명	
수험번호	
생년월일 (예:000301)	

수험생 유의사항

1. 답안지는 검정색 펜(볼펜, 연필, 샤프)으로 작성하십시오. (빨강색이나 파랑색 사용금지)
2. 답안지를 수정할 경우 지우개(연필, 샤프 사용 시)를 사용하거나 두 줄을 긋고(볼펜 사용 시) 그 위에 재 작성하십시오.
3. 답안과 관련 없는 표현이나 표시를 한 답안지는 "0"점 처리 됩니다.
4. 본 고사는 답안지 1장 이내에 답안을 작성하여야 합니다. 답안지 교체는 가능하지만 기존 답안지 제출은 불가합니다.

문제 1번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

$\boxed{1}$

$A=2$, $B=3$, $\theta=0$ 일 때,

$x(t)=2\sin t$, $y(t)=3\cos 2t = 3(1-2\sin^2 t) = 3-6\sin^2 t$ 이다.

따라서 $y=-\frac{3}{2}x^2+3$ 이므로 x축과 만나는 두 점은 $\overset{F,\,F'}{(\sqrt{2},0),\ (-\sqrt{2},0)}$ 이고

y축과 만나는 점 P는 $(0,3)$ 이다. 따라서 Q는 $(0,-3)$ 이다.

문제에서 물어보는 타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (a, b는 양수)

라고 할 때, $2b=3\times 2$ 이므로 $b=3$ 이고,

$a^2-b^2=(\sqrt{2})^2$ 이므로 $a^2-9=2$ 따라서 $a^2=11$ 이므로

두 초점이 F, F'이고 단축이 선분 PQ인 타원의 방정식은 $\frac{x^2}{11}+\frac{y^2}{9}=1$ 이다.

$\boxed{2}$

$A=1$, $B=3$, $\frac{3}{4}\pi<\theta<\pi$ 이면

$x(t)=\sin t$ $y(t)=3\cos(2t+\theta)$ 이다.

이때 $x(t)=0$ 인 t값은 0 이고, 따라서

S의 y좌표는 $3\cos(2\times 0+\theta)=3\cos\theta$ 이다.

$y(t)=0$ 인 t값은 $2t+\theta=k\pi+\frac{\pi}{2}$ (k는 정수) 이고,

$t=\frac{k}{2}\pi+\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}$

이때 $0\le t\le\frac{3}{8}\pi$ 이므로 $t=\frac{6}{8}\pi-\frac{\theta}{2}$ 이고,

따라서 R의 x좌표는 $\sin\left(\frac{3}{4}\pi-\frac{\theta}{2}\right)$ 이다.

이때 y좌표가 최소가 되려면 $y(t)$가 최소라는 의미고

$3\cos(2t+\theta)=-3$ 인 점이므로 $t=\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}$ 이고, $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)$ $=\cos\frac{\theta}{2}$ 이므로

$T\left(\cos\frac{\theta}{2},\ -3\right)$ 이다.

따라서 $U\left(-\cos\frac{\theta}{2},\ -3\right)$ 이다. 이때 $\sin\left(\frac{3}{4}\pi-\frac{\theta}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{\theta}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{\theta}{2}$ 이므로

$\overrightarrow{RU}=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{\theta}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{\theta}{2}-\cos\frac{\theta}{2},\ -3\right)$ 이고,

$\overrightarrow{ST}=\left(\cos\frac{\theta}{2},\ -3\cos\theta-3\right)$ 이므로

$\overrightarrow{RU}\cdot\overrightarrow{ST}=\cos\frac{\theta}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{\theta}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{\theta}{2}-\cos\frac{\theta}{2}\right)+3(3\cos\theta+3)$

$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos^2\frac{\theta}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}-\cos^2\frac{\theta}{2}+9\cos\theta+9$

$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1+\cos\theta}{2}\right)-\frac{1}{2\sqrt{2}}\sin\theta-\left(\frac{1+\cos\theta}{2}\right)+9\cos\theta+9$

이므로 $f(\theta)=\cos\theta\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{1}{2}+9\right)+\sin\theta\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)-\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{1}{2}+9$

이고, $f'(\theta)=-\sin\theta\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{1}{2}+9\right)+\cos\theta\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$ 이므로

$f'\left(\frac{5}{6}\pi\right)=-\frac{1}{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{1}{2}+9\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{4}$

$=\frac{\sqrt{2}}{8}+\frac{1}{4}-\frac{9}{2}+\frac{\sqrt{6}}{8}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{8}-\frac{17}{4}$ 이다.

$\boxed{3}$

$x(t)=\sin t$ $\sqrt{2}y(t)=\cos t$ 이므로

$[x(t)]^2+\{\sqrt{2}\,y(t)\}^2=1$ 이다 따라서

$x^2+2y^2=1$, $x^2+\frac{y^2}{\frac{1}{2}}=1$ 이다. 따라서 제시문 <나>의

곡선은 초점이 $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$ 장축의 길이가 2 단축의 길이가 $\sqrt{2}$ 인 타원이다.

P 좌표를 (x_1, y_1) 이라하자

이때 기울기가 m인 접선의 방정식은 $y=mx\pm\sqrt{m^2+\frac{1}{2}}$ 이고,

이 직선이 $y=m(x-x_1)+y_1$ 과 같으므로

$|-mx_1+y_1|=\pm\sqrt{m^2+\frac{1}{2}}$ 이고

$m^2x_1^2-2mx_1y_1+y_1^2=m^2+\frac{1}{2}$ 이고,

$m^2(x_1^2-1)-2m(x_1y_1)+y_1^2-\frac{1}{2}=0$ 일 때

m 값은 두개가 존재해야 하므로 $|x_1|\ne 1$ 이고,

$\frac{y_1^2-\frac{1}{2}}{x_1^2-1}=-1$ 이다. (왜냐하면 기울기 수직

따라서 $y_1^2-\frac{1}{2}=-x_1^2+1$ $y_1^2+x_1^2=\frac{3}{2}$ 이고,

$|x_1|\ne 1$ 이다.

따라서 P의 자취는 $x^2+y^2=\frac{3}{2}$ (단 $x\ne 1, x\ne -1$) 이다.

이 줄 아래 답안 작성 시 무효 처리됨

한양대학교

답안지 (자연계)

답안지 바코드

지원학과	
성 명	
수험번호	
생년월일 (예:000301)	

수 험 생 유 의 사 항

1. 답안지는 검정색 펜(볼펜, 연필, 샤프)으로 작성하십시오. (빨강색이나 파랑색 사용금지)
2. 답안지를 수정할 경우 지우개(연필, 샤프 사용 시)를 사용하거나 두 줄을 긋고(볼펜 사용 시) 그 위에 재 작성하십시오.
3. 답안과 관련 없는 표현이나 표시를 한 답안지는 "0"점 처리 됩니다.
4. 본 고사는 답안지 1장 이내에 답안을 작성하여야 합니다. 답안지 교체는 가능하지만 기존 답안지 제출은 불가합니다.

문제 1번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

[1-1]

$A=2$, $B=3$, $\theta=0$ 이므로

$x(t)=2\sin t$ $y(t)=3\cos 2t$ 이다.

이때 두 점 F, F'은 x축과 만나므로 y좌표가 0이고,

$t=\pi n \pm \frac{\pi}{4}$ (단, n은 정수) 이다.

이때의 x좌표값는 $\sqrt{2}$ 또는 $-\sqrt{2}$ 이므로

$F'(-\sqrt{2},0)$ $F(\sqrt{2},0)$ 이라 해도 일반성을 잃지 않는다.

한편, 점 P는 y축과 만나는 점이므로 x좌표가 0 이고,

$t=\pi n$ (단, n은 정수) 이다.

따라서 y좌표는 3 이므로 $P(0,3)$ 이다.

Q는 점 P를 원점에 대하여 대칭이동 시켰으므로 $Q(0,-3)$ 이다.

따라서 두 점 $F'(-\sqrt{2},0)$ $F(\sqrt{2},0)$ 과 두점 $P(0,3)$, $Q(0,-3)$ 은 단축으로 하는 타원의 방정식은 장축의 길이가 $2\sqrt{11}$ 이므로

$$\frac{x^2}{11}+\frac{y^2}{9}=1$$ 이다.

[1-2]

$A=1$, $B=3$ 이므로

$x(t)=\sin t$, $y(t)=3\cos(2t+\theta)$ 이다.

문제 [1-1]과 같은 방법으로

점 R의 y좌표가 0 인 t의 값은

$t=\cdots -\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}, -\frac{\theta}{2}+\frac{3}{4}\pi, -\frac{\theta}{2}+\frac{5}{4}\pi \cdots$ 중 하나인데

$0\le t\le \frac{3}{8}\pi$, $\frac{3}{4}\pi<\theta<\pi$ 이고,

$0<\frac{\pi}{4}<-\frac{\theta}{2}+\frac{3\pi}{4}<\frac{3}{8}\pi$ 이므로 $t=-\frac{\theta}{2}+\frac{3}{4}\pi$ 이다.

이때 R의 좌표는 $R(\sin(\frac{3}{4}\pi-\frac{\theta}{2}),0)$ 이다.

또한 점 S의 x좌표가 0 인 t의 값은

$t=\pi n$ (단, n은 정수) 이므로

점 S의 좌표는 $S(0,3\cos\theta)$ 이다.

한편, y좌표가 최소가 되게 하는 t의 값은

$t=\cdots, -\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2}, -\frac{\theta}{2}+\frac{3\pi}{2}, \cdots$ 중 하나인데

$0\le t\le\frac{3}{8}\pi$, $\frac{3}{4}\pi<\theta<\pi$ 이고,

$0<-\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{8}<\frac{3}{8}\pi$ 이므로 $t=-\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2}$ 이다.

따라서 점 T의 좌표는 $T(\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}),-3)=T(\cos\frac{\theta}{2},-3)$ 이고,

점 U의 좌표는 y축 대칭에 의해 $U(-\cos\frac{\theta}{2},-3)$ 이다.

따라서 $f(\theta)=\overrightarrow{RU}\cdot\overrightarrow{ST}=\left(-\cos\frac{\theta}{2}-\sin(\frac{3}{4}\pi-\frac{\theta}{2}),-3\right)\cdot\left(\cos\frac{\theta}{2},-3-3\cos\theta\right)$

$=-\cos^2\frac{\theta}{2}-\cos\frac{\theta}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\theta}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right)+9+9\cos\theta$

$=-\frac{1+\cos\theta}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}\sin\theta-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1+\cos\theta}{2}+9+9\cos\theta$

$=\left(\frac{17}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\cos\theta-\frac{\sqrt{2}}{4}\sin\theta+\frac{17}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}$

이므로, $f'(\theta)=-\left(\frac{17}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\sin\theta-\frac{\sqrt{2}}{4}\cos\theta$ 이고,

$f'(\frac{5}{6}\pi)=-\frac{1}{2}\left(\frac{17}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)+\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=-\frac{17}{4}+\frac{\sqrt{2}}{8}+\frac{\sqrt{6}}{8}$ 이다.

[1-3]

제시문 <나>의 곡선은

$x^2+2y^2=1$ 이다.

이 타원에 접하고, 기울기가 m인 직선은

$y=mx\pm\sqrt{m^2+\frac{1}{2}}$ 이다.

이때 점 $P(t,s)$ 라 하면 점 P가 접선위의 점이므로

$s=mt\pm\sqrt{m^2+\frac{1}{2}} \iff (s-mt)^2=m^2+\frac{1}{2}$

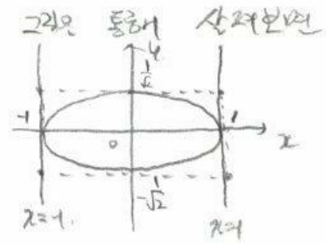
$\iff t^2m^2-2stm+s^2=m^2+\frac{1}{2}$

$\iff (t^2-1)m^2-2stm+s^2-\frac{1}{2}=0$ ……①

이다.

(ㄱ) $t^2=1$ 일때.

그림을 통해 살펴보면



$t=1$ 이고, $s=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, $t=-1$ 이고, $s=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ 일때

점P에서 그은 두 직선이 수직임을 알수 있다…(※)

(ㄴ) $t^2\ne1$ 일때

①의 m에 관한 이차방정식의 두근을 $\alpha\beta$라 하면 수직이므로 $\alpha\beta=-1$ 이다.

이때 근과 계수와의 관계에 의해

$\frac{s^2-\frac{1}{2}}{t^2-1}=-1 \iff s^2-\frac{1}{2}=-t^2+1$

$\iff t^2+s^2=\frac{3}{2}$ ……②.

이때 (※)에서 구한 t, s값은 ②에 대입하면 모두 성립한다.

따라서 점P의 자취는 중심이 원점이고, 반지름이 $\sqrt{\frac{3}{2}}$인 원 $x^2+y^2=\frac{3}{2}$ 이다.

이 줄 아래 답안 작성 시 무효 처리됨

이 줄 위에 답안 작성 시 무효 처리됨

문제 2번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

[1]

$\alpha+\beta = 2(st - \vec{a}\cdot\vec{b})$

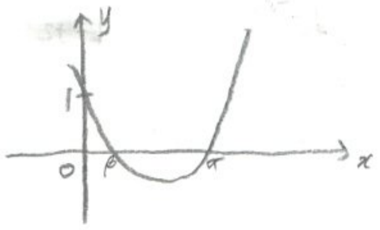
$\alpha\beta = 1$ 이고, $|\vec{a}| = \sqrt{s^2-1}$ $|\vec{b}| = \sqrt{t^2-1}$

이므로 $st - \vec{a}\cdot\vec{b} > 0$ 이기 때문에

$\alpha+\beta>0$ $\alpha\beta>0$ 이다. 따라서 $\alpha>0$, $\beta>0$ 이고

두 실근이 존재하기 때문에 $y = x^2 - 2(st - \vec{a}\cdot\vec{b})x + 1$ 의 개형은

아래와 같다. 그러므로



$\frac{s}{t}$와 $\frac{t}{s}$가 β와 α 사이에 있으려면

$f(x) = x^2 - 2(st - \vec{a}\cdot\vec{b})x + 1$ 일때

$f(\frac{s}{t}) \le 0$, $f(\frac{t}{s}) \le 0$ 이어야 한다. (등호는 β 혹은 α 일때 성립)

따라서

$f(\frac{s}{t}) = \frac{s^2}{t^2} - 2(st - \vec{a}\cdot\vec{b})\frac{s}{t} + 1 \le \frac{s^2}{t^2} - 2(st - \sqrt{(s^2-1)(t^2-1)})\frac{s}{t} + 1$

$= \frac{s^2}{t^2} - 2s^2 - \sqrt{s^2(s^2-1)(1-\frac{1}{t^2})} + 1$

일 때 $s^2(\frac{1}{t^2} - 2) + 1 \le 0$ 이고

왜냐하면 $s^2 \ge 1$ $t^2 \ge 1$ 이고 따라서 $s^2(\frac{1}{t^2}-2) \le -1$

$(s^2 = 1 + |\vec{a}|^2 \ge 1,\ t^2 = 1 + |\vec{b}|^2 \ge 1)$

이다. ($\because$ $s^2 \ge 1$ $\frac{1}{t^2} - 2 \le 1$)

$-\sqrt{s^2(s^2-1)(1-\frac{1}{t^2})} \le 0$ 이므로

$f(\frac{s}{t}) \le 0$ 이고 $f(\frac{t}{s})$도 같은 방법으로 0이하가 나온다.

따라서 $\beta \le \frac{s}{t} \le \alpha$, $\beta \le \frac{t}{s} \le \alpha$ 가 성립한다

[2]

$$f(x) = \begin{cases} -x & (x<0) \\ x & (0 \le x < 3) \\ 6-x & (3 \le x < 6) \\ x-6 & (x \ge 6) \end{cases}$$ 이다

따라서 $$f^2(x) \begin{cases} f(x) & 0 \le f(x) < 3 \\ 6-f(x) & 3 \le f(x) < 6 \\ f(x)-6 & 6 < f(x) \end{cases}$$ 이므로

$\lim_{n\to\infty} f^n(\sqrt{x^2+y^2} - 3n)$ 인경우

i) $n = 2k-1$ (k는 정수) 일때

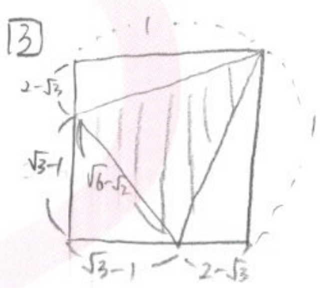
$\lim_{k\to\infty} f^n(\sqrt{x^2+y^2} - 6k + 3) = |3 - \sqrt{x^2+y^2}|$

ii) $n = 2k$ (k는 정수) 일때

$\lim_{k\to\infty} f^n(\sqrt{x^2+y^2} - 6k) = \sqrt{x^2+y^2}$

27π

[3]



왼쪽과 같은 모양일 때 정삼각형의 넓이는 최대이다.

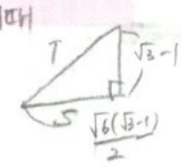
이 색칠된 부분

따라서 S는 꼭짓점 E or H or G or F를 지나야 한다.

i) T가 A, B, C, D를 지날 때 T의 넓이를 T_1 이라하면

$T_1 \cos\theta = (\sqrt{6}-\sqrt{2})^2 \times \frac{\sqrt{3}}{4}$ 이다. (θ는 T와 S 사이의 각의크기)

이때



이므로 $\cos\theta = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{10}} = \sqrt{\frac{6}{10}}$ 이고.

따라서 $T_1 = ((6+2-2\sqrt{12}) \times \frac{\sqrt{6}}{4} \times \sqrt{\frac{10}{6}}$

$= (\cancel{8-4\sqrt{3}}) \times \frac{\sqrt{6}}{4} \times \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{6}} = 2\sqrt{10} - \sqrt{30}$ 이다.

ii) T가 E, F, G, H 를 지날때 다른 한점도 지나야한다.

이때 면 △BCD를 지나는 점을 F 라하고 F에서 S에 내린수선의 발을 H

H에서 가장 먼 변에 내린수선의 발을 α 라하면

$\angle FH\alpha = \frac{\pi}{2}$ 이고 $\overline{FH} = \sqrt{3}-1$ $\overline{H\alpha} = \frac{\sqrt{6}(\sqrt{3}-1)}{2}$ 이므로

i)과 넓이가 같다.

따라서 8가지 이고 넓이는 $2\sqrt{10} - \sqrt{30}$ 이다.

이 줄 아래 답안 작성 시 무효 처리됨

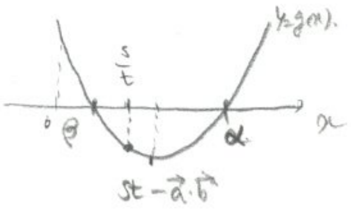
이 줄 위에 답안 작성 시 무효 처리됨

문제 2번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

[3-1]

$g(x) = x^2 - 2(st - \vec{a}\cdot\vec{b})x + 1$

$= (x - (st - \vec{a}\cdot\vec{b}))^2 + 1 - (st - \vec{a}\cdot\vec{b})^2$ 이므로 $g(x)$의 개형은 그림과 같다



이때 $st = \sqrt{(|\vec{a}|^2+1)(|\vec{b}|^2+1)}$ 이므로

$st - \vec{a}\cdot\vec{b} = \sqrt{(|\vec{a}|^2+1)(|\vec{b}|^2+1)} - |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta > 0$

(단, $-1 \le \cos\theta \le 1$)

이다.

$g(x)=0$ 이라 하면 근의공식에 의해

$\beta = st - \vec{a}\cdot\vec{b} - \sqrt{(st - \vec{a}\cdot\vec{b})^2 - 1}$

$\alpha = st - \vec{a}\cdot\vec{b} + \sqrt{(st - \vec{a}\cdot\vec{b})^2 - 1}$

$g(\frac{s}{t}) \le 0$ 임을 보이면 $\beta \le \frac{s}{t} \le \alpha$ 이다.

$g(\frac{s}{t}) = \frac{s^2}{t^2} - 2(st - \vec{a}\cdot\vec{b})\frac{s}{t} + 1$

이고, $s^2 = 1 + |\vec{a}|^2$, $t^2 = 1 + |\vec{b}|^2$ 이므로

$g(\frac{s}{t}) \le 0$ 이다.

따라서 $\beta \le \frac{s}{t} \le \alpha$ 이다.

이때 근과 계수의 관계에서 $\alpha\beta = 1$ 이므로

$\frac{1}{\alpha} \le \frac{s}{t} \le \frac{1}{\beta} \Leftrightarrow \beta \le \frac{t}{s} \le \alpha$ 이다.

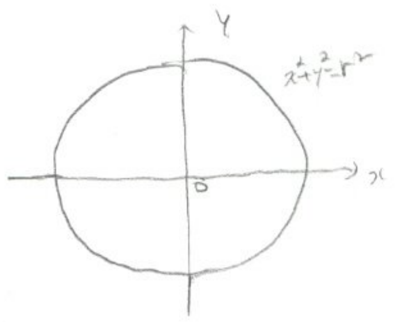
[3-2]

$f(\sqrt{x^2+y^2} - 3n) = ||\sqrt{x^2+y^2} - 3n - 3| - 3| \le 1$

$\Leftrightarrow -2 \le |\sqrt{x^2+y^2} - 3n - 3| \le 4$

$\Rightarrow \begin{cases} 2 \le \sqrt{x^2+y^2} - 3n - 3 \le 4 \\ -4 \le \sqrt{x^2+y^2} - 3n - 3 \le -2 \end{cases}$

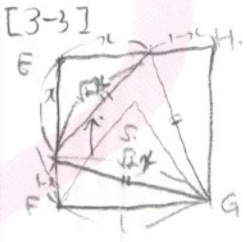
$\Rightarrow \begin{cases} 5 + 3n \le \sqrt{x^2+y^2} \le 7 + 3n \\ 3n - 1 \le \sqrt{x^2+y^2} \le 3n - 1 \end{cases}$ 이므로



이런 방식으로 합성을 계속하면

$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n^2} = \frac{1}{3}$ 이다.

[3-3]



S의 넓이가 최대가 되기 위해서는 정사각형 내부에 존재하고, 한변의 길이가 가장 길어야 한다. 그러면 그림과 같이 한변의 길이가 1인 정사각형은 돌렸을때 정삼각형의 꼭짓점중 하나가 정사각형의 꼭짓점에 위치하고 나머지 두개는 선분 EG에 대칭인 변위의 점이면 된다.

따라서 S의 한변의 길이는

$2x^2 = 1 + (1-x)^2 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 2 = 0$

$\therefore x = -1 + \sqrt{3}$ $(\because x > 0)$

$-\sqrt{2} + \sqrt{6}$ 임을 알수 있다.

이때 정삼각형의 세 변중 한변이 평면 EFGH에 있고 나머지 한 꼭짓점이 평면 ABCD 위에 있으면 되므로 그런 경우는 3가지이다

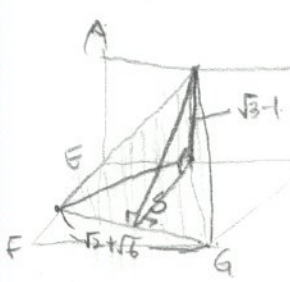
이때 그림의 S와 같은 정삼각형은 꼭짓점중 하나가 E, F, G, H 중 하나에 위치할수 있으므로 4개이다.

따라서 T의 개수는 12개이다

이때 T의 넓이는 색칠된 영역의 넓이이고, 높이는

$\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(-\sqrt{2}+\sqrt{6})\right)^2 + (\sqrt{3}-1)^2} = \sqrt{\frac{5}{2}(\sqrt{3}-1)^2} = \frac{\sqrt{10}}{2}(\sqrt{3}-1)$

이므로



T의 넓이는 $\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{10}}{2}(\sqrt{3}-1) \times (\sqrt{6}-\sqrt{2})$

$= \frac{\sqrt{5}}{2}(\sqrt{3}-1)^2$ 이다.

이 줄 아래 답안 작성 시 무효 처리됨