한양대학교 2019학년도 신입학전형 수시		
자 연 계	**모 의 논 술 예 시 답 안**	1 번

1. 음함수의 미분법을 이용하면

$$\frac{x}{2}+\frac{2y}{3}\frac{dy}{dx}=0$$

이다. 즉, $y\neq 0$ 일 때

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{3x}{4y}$$

를 얻는다. 따라서 $(-1,\frac{3}{2})$를 지나는 접선의 기울기는 $\frac{1}{2}$ 이다.

2. 포물선 $x=y^2$ 위의 점을 (a,b)라고 하자. 그러면 $a=b^2$이 성립한다. 원점이 아닌 점에서의 포물선에 접하는 접선의 기울기를 구하면 $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2y}$ 이므로 원점이 아닌 점 (a,b)를 지나고 포물선 $x=y^2$에 접하는 직선의 방정식은

$$y=\frac{1}{2b}(x-a)+b$$

가 된다. 평면위의 점 $(-3,1)$이 이 직선위에 있다고 하면 $1=\frac{1}{2b}(-3-a)+b$, 즉, $2b=-3-a+2b^2$을 만족하는데, 앞서 포물선 위의 점은 $a=b^2$ 을 만족하므로, $2b=-3-b^2+2b^2$ 이 성립한다. 따라서 $b^2-2b-3=0$을 풀면 $b=3$ 또는 $b=-1$ 을 만족하고, 이에 대응하는 a는 $a=9$또는 $a=1$ 이다. 따라서 포물선 $x=y^2$ 에 접하고 점 $(-3,1)$을 지나는 직선은

점 $(9,3)$에서 접하는 $y=\frac{1}{6}x+\frac{3}{2}$ 과

점 $(1,-1)$에서 접하는 $y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$이다.

두 직선이 x축과 이루는 각을 각각 α와 β라고 하자. (단, $0<\alpha,\beta\leq\frac{\pi}{2}$로 잡는다.) 이 때, $\tan\alpha=\frac{1}{6}$, $\tan\beta=\frac{1}{2}$ 이다. 이를 이용하면 $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{37}}$, $\cos\alpha=\frac{6}{\sqrt{37}}$, $\sin\beta=\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\beta=\frac{2}{\sqrt{5}}$ 를 얻을 수 있고,

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\frac{12}{\sqrt{185}}-\frac{1}{\sqrt{185}}=\frac{11}{\sqrt{185}}$ 를 얻는다.

이 때 $\cos(\alpha+\beta)$ 가 양수이므로 $0\leq\alpha+\beta\leq\frac{\pi}{2}$을 확인할 수 있다. 따라서 $\theta=\alpha+\beta$ 가 되고, $\cos\theta=\frac{11}{\sqrt{185}}$ 이다.

3. 초점 $C(1,0)$을 지나고 기울기가 m인 직선은 $y=m(x-1)$ 이다. 삼각형의 넓이를 구하기 위해서는 점 A와 점 B의 y좌표값을 알아야 한다. $x=\frac{y}{m}+1$을 타원의 방정식에 대입하면 $\frac{1}{4}\left(\frac{y}{m}+1\right)^2+\frac{y^2}{3}=1$이 되고, 정리하면 $\left(\frac{1}{m^2}+\frac{4}{3}\right)y^2+\frac{2}{m}y-3=0$ 이 된다. 따라서

$$y_1=\frac{-\frac{1}{m}-\sqrt{\frac{1}{m^2}+3\left(\frac{1}{m^2}+\frac{4}{3}\right)}}{\frac{1}{m^2}+\frac{4}{3}}=-\frac{3m\left(1+2\sqrt{m^2+1}\right)}{4m^2+3},$$

$$y_2=\frac{-\frac{1}{m}+\sqrt{\frac{1}{m^2}+3\left(\frac{1}{m^2}+\frac{4}{3}\right)}}{\frac{1}{m^2}+\frac{4}{3}}=\frac{3m(-1+2\sqrt{m^2+1})}{4m^2+3}$$

를 얻을 수 있다. 삼각형의 넓이는 $S_1=-\frac{3}{2}y_1$, $S_2=\frac{1}{2}y_2$ 이므로,

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{\frac{3}{2}\frac{3m(1+2\sqrt{m^2+1})}{4m^2+3}}{\frac{1}{2}\frac{3m(-1+2\sqrt{m^2+1})}{4m^2+3}}=\frac{3(1+2\sqrt{m^2+1})}{-1+2\sqrt{m^2+1}}$$ 이다.

따라서 $\lim_{m\to 0}\frac{S_1}{S_2}=\lim_{m\to 0}\frac{3(1+2\sqrt{m^2+1})}{-1+2\sqrt{m^2+1}}=9$ 를 얻는다.

한양대학교 2019학년도 신입학전형 수시		
자 연 계	**모 의 논 술 예 시 답 안**	2번

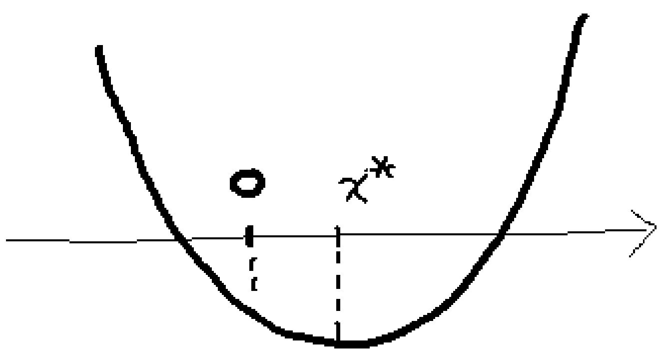
1. 거리가 최소가 되기 위한 필요조건은 점 A와 점 (x_0,y_0)를 연결하는 직선이 (x_0,y_0)에서의 접선에 수직이 되는 것이다. 접선의 기울기는 $-\dfrac{2x}{y}$ 이므로,

$\dfrac{y_0-b}{x_0-a}=\dfrac{y_0}{2x_0}$, 즉, $y_0=\dfrac{2bx_0}{x_0+a}$ 가 되고 이를 $2x^2+y^2=1$에 대입하면,

$$2x^4+4ax^3+(2a^2+4b^2-1)x^2-2ax-a^2=0$$

따라서 답은 $2a^2+4b^2-1$.

2. $f'(x)=8x^3+12ax^2+2(2a^2+4b^2-1)x-2a$, $f''(x)=24x^2+24ax+2(2a^2+4b^2-1)$ 인데,
$f''(x)$의 판별식은 $D=-192(-a^2+4b^2-1)$ 이다.
$a<\dfrac{3}{2}b$ 로부터 $-a^2+4b^2-1>-\dfrac{9}{4}b^2+4b^2-1=\dfrac{7}{4}b^2-1>0$ 이므로 $D<0$이 되어 $f''(x)>0$이다.
따라서 $f'(x)$는 증가함수이며 실근을 오직 하나만 가지며 이 실근은 양수이다.($f'(0)=-2a<0$이므로)
이 실근을 x^*라 하면 $f(x)$의 그래프는 다음과 같은 개형을 가진다.



3. $y_0=\dfrac{2bx_0}{x_0+a}$를 $2x^2+y^2=1$에 대입하면,

$\dfrac{4b^2x_0^2}{(x_0+a)^2}-(1-2x_0^2)=0$, $\left(\dfrac{2bx_0}{x_0+a}-\sqrt{1-2x_0^2}\right)\left(\dfrac{2bx_0}{x_0+a}+\sqrt{1-2x_0^2}\right)=0$ 이므로, $\dfrac{2bx_0}{x_0+a}=\sqrt{1-2x_0^2}$ 이다.

$x_0=\dfrac{1}{2}$ 이면, $b=\left(\dfrac{1}{2}+a\right)\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{1+2a}{2\sqrt{2}}$.

한양대학교 2019학년도 신입학전형 수시 모의논술고사		
자 연 계	**출제 의도 및 평가 지침**	1 번

1. 출제 의도 및 문제 해설

고등학교 수학교과를 정상화하기 위하여 철저하게 교과서를 중심으로 출제하였으며, 정상적인 수학교과를 이수한 수험생이면 충분하게 풀 수 있는 문제를 출제하였다. 1번에서는 음함수 미분을 통해 접선의 기울기를 구하는 방법을 묻고 있으며, 2번에서는 미분을 통해 접선의 기울기를 구하고 삼각함수의 성질을 이용하여 직선 사이의 각도를 찾도록 하였다. 3번에서는 타원 내부에 만들어지는 삼각형들의 넓이의 비율을 기울기를 통한 함수로 나타내고 극한을 이용하도록 하였다.

2. 종합 평가 기준

문항	배점	세부 평가 기준	세부 배점
1	30	미분을 이용하여 접선의 기울기를 구하였다.	30
2	20	두 직선의 기울기를 구하였다.	20
	20	코사인의 성질을 이용하여 두 직선 사이 각도의 코사인 값을 구하였다.	20
3	30	삼각형의 넓이 비율의 극한값을 구하였다.	30

3. 출제 근거

이차곡선 - 고등학교 기하와 벡터 (천재교육, 2009년) p10~p37.

음함수 미분법 - 고등학교 기하와 벡터 (천재교육, 2009년) p38~p67.

자 연 계	# 출제 의도 및 평가 지침	2번

1. 출제 의도 및 문제 해설

이차곡선의 접선과 미분과의 관계를 이해하는지, 다항함수의 미분으로부터 그래프의 개형을 추정할 수 있는지, 기하적 관계를 이용하여 방정식을 적절히 다룰 수 있는지를 평가하는 문제이다.

2. 종합 평가 기준

문항	배점	세부 평가 기준	세부 배점
1	40	이차곡선의 접선과 미분의 관계를 이용하여 거리가 최소가 되는 점의 x좌표가 만족하는 4차 다항 방정식을 유도하였는가?	40
2	40	미분을 이용하여 다항식의 그래프 개형을 추정할 수 있는가?	40
3	20	방정식의 해가 여러 개일 때 주어진 기하적 조건으로부터 적절한 해를 선택할 수 있는가?	20

3. 출제 근거

- 타원의 방정식: 기하와벡터(2016, 천재교육, 이준열외) 17쪽
- 평면곡선의 접선: 기하와벡터(2016, 천재교육, 이준열외) 46쪽
- 도함수의 활용: 미적분II(2016, 동아출판, 우정화외) 154쪽~159쪽

한양대학교

답안지 (자연계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지
		1/6

[문제 1-1]

타원 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 을 음함수의 미분하면 $\frac{2x}{4}+\frac{2y}{3}\frac{dy}{dx}=0$ 이다.

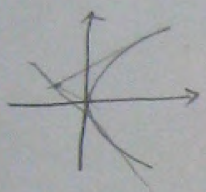
$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{4} \times \frac{3}{2y} = -\frac{3x}{4y}$$

이때 타원위의 점 $(-1, \frac{3}{2})$에서의 접선의 기울기를 구하는 것이므로

$x=-1$, $y=\frac{3}{2}$을 대입하면 $-\frac{3\times(-1)}{4\times\frac{3}{2}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

~~접(-1, 3/2)에~~ 타원 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$위의 점 $(-1, \frac{3}{2})$에서 타원에 접하는 직선의 기울기는 $\frac{1}{2}$ 이다.

[문제 1-2]



$y^2=x$

$y^2=4\cdot\frac{1}{4}x$

점$(-3,1)$에서 포물선 $y^2=x$ 에 접하는 직선을 그었을때

그 ~~포물선의~~ 접점을 (t^2, t)라 하자

이때 접선의 기울기를 구하기위해 포물선 $x=y^2$의 도함수를 구하면

$1=2y\frac{dy}{dx}$ $\quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{2y}$ 이다.

따라서 접선의 기울기는 $\frac{1}{2t}$이다.

이때 접선의 방정식은

$y=\frac{1}{2t}(x-t^2)+t$

$(-3,1)$을 지나므로 $\quad 1=\frac{1}{2t}(-3-t^2)+t$ 가 성립한다.

$1=-\frac{3}{2t}-\frac{t}{2}+t$

$2t=-3-t^2+2t^2$ $\quad t^2-2t-3=0$ $\quad (t+1)(t-3)=0$

$\therefore t=-1$ 또는 3

두개의 접점은 $(1,-1)$, $(9,3)$이다.

이때 각각의 접선을 l_1, l_2라 하고 구해보면

$l_1: y=\frac{-1-1}{1+3}(x-1)-1=\frac{-2}{4}(x-1)-1=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$

이때 l_1이 x축과 이루는 각을 α라 하면 $\tan\alpha=-\frac{1}{2}$.

$l_2: y=\frac{3-1}{9+3}(x+3)+1=\frac{2}{12}(x+3)+1=\frac{1}{6}(x+3)+1=\frac{1}{6}x+\frac{3}{2}$

이때 l_2가 x축과 이루는 각을 β라 하면 $\tan\beta=\frac{1}{6}$

l_1, l_2가 이루는 예각의 크기를 θ라 하면. 이때 $\tan\theta=|\tan(\beta-\alpha)|=\left|\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}\right|$

$=\left|\frac{\frac{1}{6}+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{12}}\right|=\frac{8}{11}$

$0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ 이므로 $\cos\theta>0$. $\sin\theta>0$. $\tan\theta>0$. $\quad \tan^2\theta+1=\sec^2\theta$ $\quad \frac{64}{121}+\frac{121}{121}=\sec^2\theta$ $\quad \sec^2\theta=\frac{185}{121}$

$\therefore \cos^2\theta=\frac{121}{185}$ $\quad \cos\theta=\frac{11}{\sqrt{185}}=\frac{11\sqrt{185}}{185}$

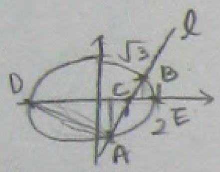
한양대학교

답안지 (자연계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지
		3/6

[문제 1-3] 점 $C(1,0)$을 지나고 기울기가 양수 m인 직선을 l이라 하면

l: $y = mx - m$



$$\frac{x^2}{4} + \frac{(mx-m)^2}{3} = 1$$

$$3x^2 + 4m^2(x-1)^2 = 12$$

$$(3+4m^2)x^2 - 8m^2x + 4m^2 - 12 = 0$$

따라서 근의 공식에 따라 $x = \dfrac{4m^2 \pm \sqrt{16m^4 - (4m^2-12)(3+4m^2)}}{(3+4m^2)} = \dfrac{4m^2 \pm \sqrt{+20m^2+36}}{3+4m^2}$

두 근 x_1, x_2는 $x_1 < x_2$를 만족하므로 $x_1 = \dfrac{4m^2 - 2\sqrt{5m^2+9}}{3+4m^2}$ $\quad x_2 = \dfrac{4m^2 + 2\sqrt{5m^2+9}}{3+4m^2}$

$y_1 = mx_1 - m, \quad y_2 = mx_2 - m$

$S_1 = \triangle ACD = \frac{1}{2}|y_1| \times 3 = \frac{3}{2}(-y_1)$ $\qquad S_2 = \triangle BCE = \frac{1}{2}|y_2| \times 1 = \frac{1}{2}y_2$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{3}{2}(-y_1)}{\frac{1}{2}y_2} = \frac{3(-y_1)}{y_2} = \frac{-3(mx_1 - m)}{mx_2 - m} = \frac{-3(x_1-1)}{x_2-1}$$

$m>0$ 이므로

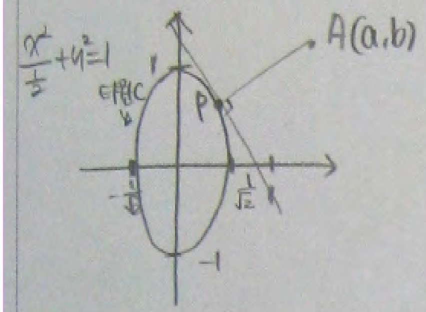
$$\therefore \lim_{m\to 0} \frac{S_1}{S_2} = \lim_{m\to 0} \frac{-3\left(\frac{4m^2 - 2\sqrt{5m^2+9}}{3+4m^2} - 1\right)}{\frac{4m^2+2\sqrt{5m^2+9}}{3+4m^2} - 1} = \lim_{m\to 0} \frac{-3(4m^2 - 2\sqrt{5m^2+9} - 3 - 4m^2)}{4m^2 + 2\sqrt{5m^2+9} - 3 - 4m^2}$$

$$= \lim_{m\to 0} \frac{-3(-2\sqrt{5m^2+9} - 3)}{2\sqrt{5m^2+9} - 3} = \lim_{m\to 0} \frac{6\sqrt{5m^2+9} + 9}{2\sqrt{5m^2+9} - 3} = \frac{6\sqrt{9}+9}{2\sqrt{9}-3} = \frac{6\times 3 + 9}{2\times 3 - 3}$$

$$= \frac{18+9}{6-3} = \frac{27}{3}$$

$= 9$

[문제 2-1]



타원 C위의 점 중 A까지의 거리가 최소가 되는 점의 좌표를 (x_0,y_0)라 하고 그 점을 P라 해보자

$\overline{AP}$가 최소가 되기 위해서는 P에서의 접선과 $\overline{AP}$가 수직이어야 한다.

따라서 P(x_0,y_0)에서의 접선의 기울기를 구해보면

$$2\times 2x+2y\frac{dy}{dx}=0$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{2x}{y}$$

∴ P에서의 접선의 기울기: $-\frac{2x_0}{y_0}$

$\overline{AP}$의 기울기는 $\frac{b-y_0}{a-x_0}$

P에서의 접선과 $\overline{AP}$가 수직이므로 $-\frac{2x_0}{y_0}\times\frac{b-y_0}{a-x_0}=-1$ $\frac{2x_0(b-y_0)}{y_0(a-x_0)}=1$

$a>1,\ b>1$ 이므로 $\overline{AP}$가 최소가 될때 $1>x_0>0,\ 1>y_0>0$. $\overline{AP}$의 기울기는 양수 ∴ $y_0(a-x_0)>0$

$$2bx_0-2x_0y_0=ay_0-x_0y_0$$

$$2bx_0=ay_0+x_0y_0 \qquad y_0=\frac{2bx_0}{x_0+a}$$

P(x_0,y_0)은 $2x^2+y^2=1$ 위의 점이므로 $2x_0^2+y_0^2=1$ $2x_0^2+\left(\frac{2bx_0}{x_0+a}\right)^2=1$

$$2x_0^2(x_0^2+2ax_0+a^2)+4b^2x_0^2=(x_0^2+2ax_0+a^2)$$

$$2x_0^4+4ax_0^3+(2a^2+4b^2)x_0^2=x_0^2+2ax_0+a^2$$

$$2x_0^4+4ax_0^3+(2a^2+4b^2-1)x_0^2-2ax_0-a^2=0$$

$f(x_0)=2x_0^4+4ax_0^3+(가)x_0^2-2ax_0-a^2=0$ 이므로

∴ $(가)=(2a^2+4b^2-1)$

한양대학교

답안지 (자연계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지
		5/6

[문제 2-2]

[문제2-1]에서 구한 $f(x)=2x^4+4ax^3+(2a^2+4b^2-1)x^2-2ax-a^2$

$f'(x)=8x^3+12ax^2+2(2a^2+4b^2-1)x-2a$

$f''(x)=24x^2+24ax+2(2a^2+4b^2-1)$

$=24(x^2+ax)+2(2a^2+4b^2-1)$

$=24(x+\frac{a}{2})^2+2(2a^2+4b^2-1)-\overset{6}{\cancel{24}}\times\frac{a^2}{\cancel{4}}$

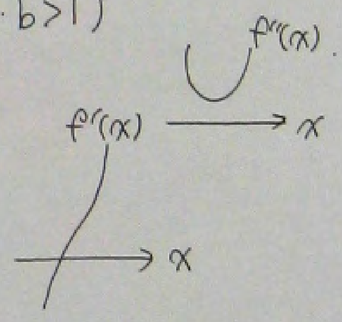
$=24(x+\frac{a}{2})^2+4a^2+8b^2-2-6a^2$

$=24(x+\frac{a}{2})^2+8b^2-2a^2-2=24(x+\frac{a}{2})^2+2(4b^2-a^2-1)$

$a<\frac{3}{2}b$ 이므로 $a^2<\frac{9}{4}b^2$ $\cdot$ $-a^2>-\frac{9}{4}b^2$

$4b^2-a^2>4b^2-\frac{9}{4}b^2=\frac{7}{4}b^2>\frac{7}{4}$ $(\because b>1)$

즉 $4b^2-a^2-1>0$ 이므로 $f''(x)>0$.

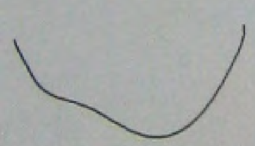


$f''(x)>0$ 이므로 $f'(x)$는 증가함수이다.

따라서 $f'(x)$ 0이 되는 x가 1개이므로

$f(x)$의 극값은 1개이다. 또한 $f''(x)=0$이 되는 x가 없으므로 변곡점은 없다.

따라서 $f(x)$의 그래프의 개형은 아래와 같다.



[문제 2-3] (x_0, y_0)을 점 P라 하자

[문제 2-1]에서와 같이 A와 $P(x_0, y_0)$간의 거리가 최소이려면 $\overline{AP} \perp$ 점 P에서의 접선 이어야 한다. 이때 점 P에서의 접선의 기울기는 $-\frac{2x_0}{y_0}$ 이고 $\overline{AP}$의 기울기는 $\frac{b-y_0}{a-x_0}$ 임을 [문제2-1]에서 구했다 또, 문제의 조건에 의해 $x_0 = \frac{1}{2}$ 이고, $P(\frac{1}{2}, y_0)$는 $2x^2+y^2=1$ 위의 점이므로

$2 \times \frac{1}{4} + y_0^2 = 1$ $y_0^2 = \frac{1}{2}$ $a>1, b>1$ 이고 $\overline{AP}$가 최소이므로 $x_0>0, y_0>0$

$\therefore y_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$-\frac{2x_0}{y_0} \times \frac{b-y_0}{a-x_0} = -1$ $\frac{2x_0(b-y_0)}{y_0(a-x_0)} = 1$ 을 $x_0 = \frac{1}{2}, y_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 일때 만족하므로 대입해보면

$\frac{2 \times \frac{1}{2}(b - \frac{1}{\sqrt{2}})}{\frac{1}{\sqrt{2}}(a - \frac{1}{2})} = 1$ $\sqrt{2}(b - \frac{1}{\sqrt{2}}) = a - \frac{1}{2}$ $\sqrt{2}b - 1 = a - \frac{1}{2}$ $\sqrt{2}b = a + \frac{1}{2}$

$\therefore b = \frac{a}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}a}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}$

$\Rightarrow b = \frac{\sqrt{2}a}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}$

6

한양대학교

답안지 (자연계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지
		1/6

[문제 1-1]

주어진 타원 식을 x에 대해 미분하면, 음함수 미분법에 의해

$\frac{2x}{4} + \frac{2y}{3}\cdot\frac{dy}{dx} = 0$ 이다.

그러면, 타원 위의 점 (x,y)에서 접선의 기울기 $(\frac{dy}{dx})$는

$\frac{dy}{dx} = -\frac{3x}{4y}$ 이다.

∴ $x=-1$, $y=\frac{3}{2}$을 대입하면

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3\cdot(-1)}{4\cdot\frac{3}{2}} = \frac{3}{2\cdot 3} = \frac{1}{2}$$

∴ $\frac{1}{2}$

한양대학교

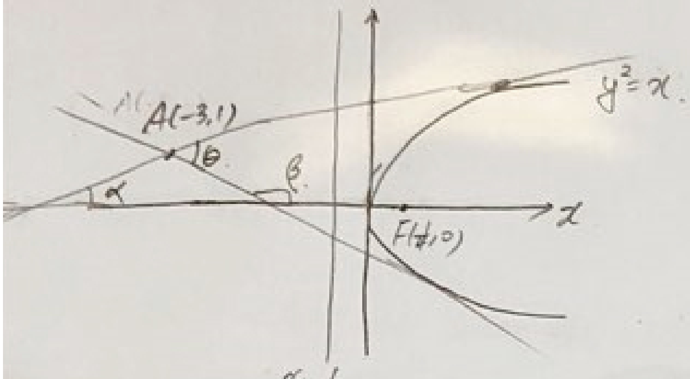
답안지 (자연계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지
		2/6

[문제 1-2]

$y^2 = x \Rightarrow y^2 = 4 \cdot \frac{1}{4} x$

∴ 주어진 포물선의 꼭지점은 $(0,0)$, 초점 $F(\frac{1}{4}, 0)$, 준선은 $x = -\frac{1}{4}$이다.



접선들이 x축의 양의 방향과 이루는 각을 α, β라 하자.

$$\Rightarrow \theta = \alpha + (\pi - \beta)$$

이제, 접선을 $y-1 = m(x+3)$이라 하고, 접점을 (t^2, t)라 하자. (t는 2개, m은 2개)

음함수 미분법에 의해 (t^2, t)에서 포물선의 접선의 기울기는 $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y} \Rightarrow \frac{1}{2t}$

∴ $m = \frac{1}{2t}$, $y-1 = m(x+3)$은 (t^2, t)를 지나므로

$t - 1 = \frac{1}{2t}(t^2+3)$

$2t^2 - 2t = t^2 + 3$

$t^2 - 2t - 3 = 0$

$(t-3)(t+1) = 0$

$\Rightarrow t = +3, t = -1$

∴ $m = \frac{1}{6}, -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \tan\alpha = \frac{1}{6}, \tan\beta = -\frac{1}{2}$ $(0 < \alpha < \frac{\pi}{2} < \beta < \pi)$

$\cos\alpha = \frac{6}{\sqrt{37}}$ $\cos\beta = -\frac{2}{\sqrt{5}}$

$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{37}}$ $\sin\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$\cos\theta = \cos(\alpha + (\pi - \beta))$

$= \cos\alpha \cdot \cos(\pi-\beta) - \sin\alpha \cdot \sin(\pi - \beta)$

$= \cos\alpha \cdot (-\cos\beta) - \sin\alpha \cdot \sin\beta$

$= -\frac{6}{\sqrt{37}}\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) - \frac{1}{\sqrt{37}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}$

$= \frac{12}{\sqrt{185}} - \frac{1}{\sqrt{185}}$

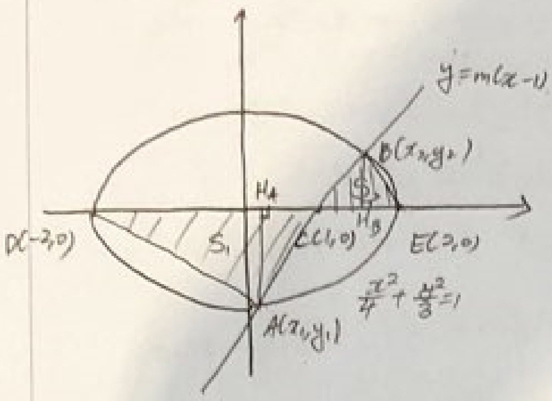
$= \frac{11}{\sqrt{185}}$

한양대학교

답안지 (자연계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지
		3/6

[문제 1-3]



A, B에서 x축에 내린 수선의 발을 H_A, H_B라 하자.

$\Rightarrow AH_A = |y_1|,\ BH_B = |y_2|$.

$\therefore S_1 = \frac{1}{2} CD \cdot AH_A = \frac{1}{2}\cdot 3 \cdot |y_1| = \frac{3}{2}|y_1|$

$S_2 = \frac{1}{2} CE \cdot BH_B = \frac{1}{2}\cdot 1 \cdot |y_2| = \frac{1}{2}|y_2|$

$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{3}{2}|y_1|}{\frac{1}{2}|y_2|} = \frac{3|y_1|}{|y_2|}$

이제 $|y_1|, |y_2|$를 구하자.

$\frac{x^2}{4} + \frac{\{m(x-1)\}^2}{3} = 1$

$3x^2 + 4m^2(x-1)^2 = 12$

$3x^2 + 4m^2(x^2-2x+1) = 12$

$(3+4m^2)x^2 - 8m^2x + 4m^2 - 12 = 0$

$x = \frac{4m^2 \pm \sqrt{(4m^2)^2 - (3+4m^2)(4m^2-12)}}{3+4m^2}$

$= \frac{4m^2 \pm \sqrt{16m^4 - (16m^4 - 36m^2 - 36)}}{3+4m^2}$

$= \frac{4m^2 \pm \sqrt{36m^2+36}}{3+4m^2}$

$\therefore x_1 = \frac{4m^2 - 6\sqrt{m^2+1}}{3+4m^2}$,

$x_2 = \frac{4m^2 + 6\sqrt{m^2+1}}{3+4m^2}$

그런데, $y_2 = m(x_2-1)$

$= m\frac{6\sqrt{m^2+1} - 3}{3+4m^2}$

$y_1 = m(x_1-1)$

$= m\cdot\frac{-6\sqrt{m^2+1} - 3}{3+4m^2}$

$\therefore \frac{S_1}{S_2} = 3\frac{|y_1|}{|y_2|} = 3\cdot\frac{\left|m\cdot\frac{-6\sqrt{m^2+1}-3}{3+4m^2}\right|}{\left|m\frac{+6\sqrt{m^2+1}-3}{3+4m^2}\right|}$

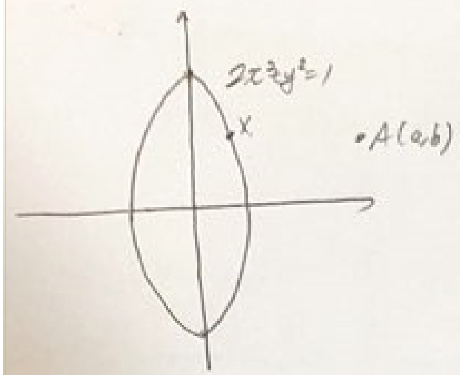
$= 3\,\frac{|-6\sqrt{m^2+1}-3|}{|+6\sqrt{m^2+1}-3|}$

$= 3\cdot\frac{6\sqrt{m^2+1}+3}{6\sqrt{m^2+1}-3}$

$\therefore \lim_{m\to 0}\frac{S_1}{S_2} = \lim_{m\to 0} 3\cdot\frac{6\sqrt{m^2+1}+3}{6\sqrt{m^2+1}-3}$

$= 3\cdot\frac{6+3}{6-3} = \boxed{9}$

[문제 2-1]



X를 타원 위의 점이라 하자.

우리는 "$X(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta, \sin\theta)$로 매개화할 수 있다.

$$\overrightarrow{AX} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta - a, \sin\theta - b\right)$$

$$|\overrightarrow{AX}|^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta - a\right)^2 + (\sin\theta - b)^2$$

$$= \frac{1}{2}\cos^2\theta - \sqrt{2}a\cos\theta + a^2 + \sin^2\theta - 2b\sin\theta + b^2$$

$$\frac{d(|\overrightarrow{AX}|^2)}{d\theta} = \cos\theta\cdot(-\sin\theta) + \sqrt{2}a\sin\theta + 2\sin\theta\cos\theta - 2b\cos\theta$$

이 식이 0이 되는 θ를 θ^*라 하자

$$-\sin\theta^*\cos\theta^* + \sqrt{2}a\sin\theta^* + 2\sin\theta^*\cos\theta^* - 2b\cos\theta^* = 0$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta^*\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta^* - a\right) + \cos\theta^*(\sin\theta^* - b) = 0 \quad \div 2$$

$$\underbrace{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta^*, \cos\theta^*\right)}_{\theta=\theta^*\text{에서의 접선의 방향벡터}}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta^* - a, \sin\theta^* - b\right) = 0$$

$\therefore$ 거리의 최소($|\overrightarrow{AX}|^2$의 최소)는 $\theta=\theta^*$, 즉 $\overrightarrow{AX}$와 X에서의 접선이 수직일 때의 $|\overrightarrow{AX}|$ 값이다.

최소가 되는 X를 X^*라 하면 $X^*(x_0, y_0)$. X^*에서의 접선의 기울기를 구하기 위해 음함수 미분을 쓰면

$$4x + 2y\cdot\frac{dy}{dx} = 0 \rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{y} \Rightarrow -\frac{2x_0}{y_0}$$

$\therefore X^*$에서의 접선의 기울기는 $-\frac{2x_0}{y_0}$ 이다.

$$\Rightarrow -\frac{2x_0}{y_0}\times\frac{b-y_0}{a-x_0} = -1$$

$$2x_0(b-y_0) = y_0(a-x_0).$$

$$-2x_0y_0 + 2bx_0 = -x_0y_0 + ay_0$$

$$(x_0+a)y_0 = 2bx_0$$

제곱

$$(x_0+a)^2y_0^2 = (2bx_0)^2$$

$$2x_0^2 + y_0^2 = 1 \Rightarrow y_0^2 = 1 - 2x_0^2$$

$$(x_0^2 + 2ax_0 + a^2)(1 - 2x_0^2) = 4b^2x_0^2$$

$$-2x_0^4 - 4ax_0^3 + (1-2a^2)x_0^2 + 2ax_0 + a^2 = 4b^2x_0^2$$

$$2x_0^4 + 4ax_0^3 + (4b^2 + 2a^2 - 1)x_0^2 - 2ax_0 - a^2 = 0$$

$\therefore$ (가) : $4b^2 + 2a^2 - 1$

[문제 2-2]

$f(x) = 2x^4 + 4ax^3 + (4b^2+2a^2-1)x^2 - 2ax - a^2$

$f'(x) = 8x^3 + 12ax^2 + 2(4b^2+2a^2-1)x - 2a$

$= 2(4x^3 + 6ax^2 + (4b^2+2a^2-1)x - a)$

$f''(x) = 24x^2 + 24ax + 2(4b^2+2a^2-1)$

$= 24(x^2+ax) + 2(4b^2+2a^2-1)$

$= 24(x+\frac{1}{2}a)^2 + 8b^2 - 2a^2 - 2$

$\geq 8b^2 - 2a^2 - 2$

$> 8b^2 - 2\cdot(\frac{3}{2}b)^2 - 2$

$= 8b^2 - \frac{9}{2}b^2 - 2$

$= \frac{7}{2}b^2 - 2 > 0 \quad (\because b > 1)$

$\therefore f''(x)$은 모든 실수 x에 대해 양수이다.

$\rightarrow f'(x)=0$은 오직 1개의 실근만을 가진다.

$\rightarrow f(x)=0$은 극점이 1개 뿐이며, 그 극점은 $y=f(x)$의 최솟값이다 $(\because \lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty)$

또, $y=f(x)$는 항상 아래로 볼록이다.

① $f'(\alpha)=0$ 이라 하자.

$f'(0) = -2a < 0$

$f'(1) = 8 + 12a + 8b^2 + 4a^2 - 2 - 2a$

$= 4a^2 + 10a + 8b^2 + 6 > 0$

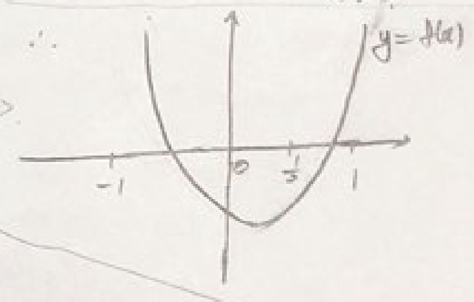
$f'(\frac{1}{2}) = 1 + 3a + 4b^2 + 2a^2 - 1 - 2a$

$= 2a^2 + a + 4b^2 > 0$

$f'(x)$는 실수 전체에서 연속이므로 중간값 정리에 의해 $0 < \alpha < \frac{1}{2}$

$\Rightarrow f(x)$은 $0 < x < \frac{1}{2}$에서 최솟값을 가진다.

$\therefore$



② $f(0) = -a^2$

$f(1) = 2 + 4a + 4b^2 + 2a^2 - 1 - 2a - a^2$

$= a^2 + 2a + 4b^2 + 1 > 0$

$f(-1) = 2 - 4a + 4b^2 + 2a^2 - 1 + 2a - a^2$

$= a^2 - 2a + 4b^2 + 1$

$= (a-1)^2 + 4b^2 > 0$

$\therefore f(x)=0$의 두 근은 $-1 < x < 0$, $\alpha < x < 1$에 있다.

$f(\frac{1}{2})$의 부호 판정

$f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{8} + \frac{1}{2}a + b^2 + \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{4} - a - a^2$

$= -\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}a - \frac{1}{8} + b^2$

$= b^2 - \frac{1}{2}(a^2 + a + \frac{1}{4}) = b^2 - \frac{1}{2}(a+\frac{1}{2})^2 > b^2 - \frac{1}{2}(\frac{3}{2}b + \frac{1}{2})^2$

$= -\frac{1}{8}b^2 - \frac{3}{4}b - \frac{1}{8}$

한양대학교

답안지 (자연계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지
		6/6

[문제 2-3]

$$2x_0^4+4ax_0^3+(4b^2+2a^2-1)x_0^2-2ax_0-a^2=0$$

$x_0=\frac{1}{2}$: $\frac{1}{8}+\frac{1}{2}a+(4b^2+2a^2-1)\frac{1}{4}-a-a^2=0$

$$\frac{1}{8}+\frac{1}{2}a-a-a^2+\left(b^2+\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{4}\right)=0$$

$$\frac{1}{8}-\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}a^2+b^2-\frac{1}{4}=0$$

$$b^2=\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}a+\frac{1}{8}$$

$$=\frac{1}{2}\left(a^2+a+\frac{1}{4}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{2}\right)^2$$

$\therefore$ $\underline{b=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(a+\frac{1}{2}\right)}$ ($\because a>1, b>1$)

한양대학교

답안지 (자연계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지
		1/6

[문제 1-1]

타원 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$의 양변을 x에 대해 미분하면 $\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}y\frac{dy}{dx}=0$,
$\frac{dy}{dx}=-\frac{3x}{4y}$이므로 $(-1,\frac{3}{2})$에서의 접선의 기울기는 $-\frac{3\times(-1)}{4\times\frac{3}{2}}=\frac{1}{2}$이다.

한양대학교

답안지 (자연계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지
		2/6

[문제 1-2]

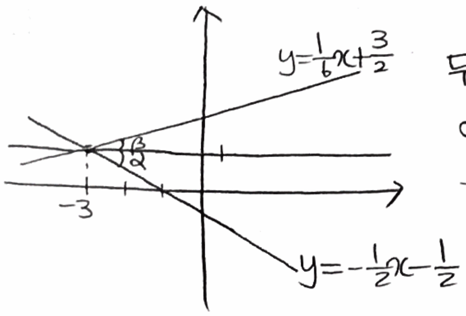
포물선 $x=y^2$ 위의 점 (t^2,t)에서의 접선을 구해보자.

$x=y^2$의 양변을 x에 대해 미분하면 $1=2y\frac{dy}{dx}$이고, $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2y}$ 이다.

따라서 (t^2,t)에서의 접선의 방정식은 $y=\frac{1}{2t}(x-t^2)+t=\frac{1}{2t}x+\frac{1}{2}t$이다.

이 접선이 점 $(-3,1)$을 지나므로 $1=\frac{-3}{2t}+\frac{t}{2}$, $t^2-2t-3=0$, $t=-1$ or 3이다.

따라서 두 접선의 기울기는 각각 $-\frac{1}{2}$과 $\frac{1}{6}$이다.



두 접선이 $y=1$이라는 직선과 이루는 예각의 크기를 각각 α,β라 하자. $(0<\alpha,\beta<\frac{\pi}{2})$

$\tan\alpha=\frac{1}{2}$이므로 $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$이고,

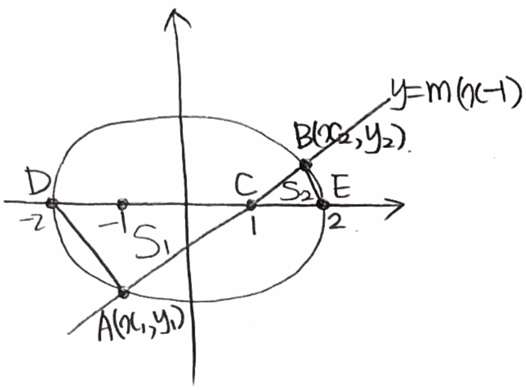
$\tan\beta=\frac{1}{6}$이므로 $\sin\beta=\frac{1}{\sqrt{37}}$, $\cos\beta=\frac{6}{\sqrt{37}}$이다.

$\alpha+\beta=\theta$이므로 삼각함수의 덧셈정리에 의해

$\cos\theta=\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\frac{11}{\sqrt{185}}$

$=\frac{11\sqrt{185}}{185}$ 이다.

[문제 1-3]



점 A와 B는 타원 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$과 직선 $y=m(x-1)$의 교점이다. $x=1+\frac{y}{m}$, $\frac{1}{4}\left(\frac{y^2}{m^2}+\frac{2y}{m}+1\right)+\frac{y^2}{3}=1$,

$\left(\frac{1}{4m^2}+\frac{1}{3}\right)y^2+\frac{1}{2m}y-\frac{3}{4}=0$, $(4m^2+3)y^2+6my-9m^2=0$

을 만족하는 y의 두 실근은 y_1, y_2이고, $x_1<x_2$이고 $m>0$이기 때문에 $y_1<y_2$이다.

$\therefore y_1=-3m-6m\sqrt{m^2+1}$, $y_2=-3m+6m\sqrt{m^2+1}$

$S_1=\frac{1}{2}\times3\times|y_1|=-\frac{3}{2}y_1$ ($\because x_1<1$이고 $m>0$이므로 $y_1<0$)

$S_2=\frac{1}{2}\times1\times|y_2|=\frac{1}{2}y_2$ ($\because x_2>1$이고 $m>0$이므로 $y_2>0$)

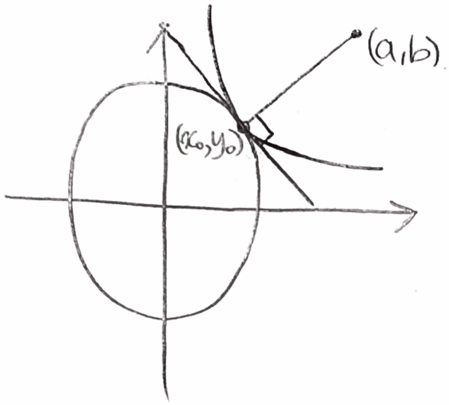
이므로 $\lim_{m\to0}\frac{S_1}{S_2}=\lim_{m\to0}\frac{3(3m+6m\sqrt{m^2+1})}{-3m+6m\sqrt{m^2+1}}=\lim_{m\to0}\frac{9+18\sqrt{m^2+1}}{-3+6\sqrt{m^2+1}}$

$=\frac{27}{3}=9$이다.

[문제 2-1]

타원 C 위의 점 중 점 A(a,b)까지 거리가 최소가 되는 점 (x_0, y_0)을 잡으면,
두 점을 연결한 직선과 점 (x_0, y_0)에서의 타원의 접선이 수직이 되어야 한다.

증명) 점 A에서 같은 거리에 있는 점들을 연결하면 동심원들이 생긴다. 이 동심원들 중 타원과 교점을 가지는 원 중 반지름의 길이가 최소인 원이 타원과 만나는 한 점을 (x_0, y_0)로 설정하면 A(a,b)과 (x_0, y_0) 사이의 거리가 최소가 된다. (x_0, y_0)에서 타원과 원은 공통접선을 가지고, 원의 성질에서 접선과 접점과 원의 중심을 연결한 직선은 수직이므로 (x_0, y_0)에서 타원의 접선과 점 A(a,b)와 (x_0, y_0)를 연결한 직선은 수직이 되어야 한다.



$2x^2+y^2=1$을 x에 대해 미분하면 $4x+2y\frac{dx}{dy}=0$, $\frac{dy}{dx}=-\frac{2x}{y}$이고,

$-\frac{2x_0}{y_0}\times\frac{y_0-b}{x_0-a}=-1$, $2x_0y_0-2bx_0=x_0y_0-ay_0$, $x_0y_0-2bx_0+ay_0=0$이다.

$a>1, b>1$이므로 (x_0, y_0)는 제 1사분면 위 점이고, $y_0=\sqrt{1-2x_0^2}$으로 표현할 수 있다. 이를 대입하면 $x_0\sqrt{1-2x_0^2}-2bx_0+a\sqrt{1-2x_0^2}=0$, $(x_0+a)\sqrt{1-2x_0^2}=2bx_0$

$(x_0^2+2ax_0+a^2)(1-2x_0^2)=4b^2x_0^2$, $2x_0^4+4ax_0^3+(2a^2+4b^2-1)x_0^2-2ax_0-a^2=0$

$\therefore$ (가) $2a^2+4b^2-1$ 이다.

한양대학교

답안지 (자연계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지
		5/6

[문제 2-2]

$f(x)=2x^4+4ax^3+(2a^2+4b^2-1)x^2-2ax-a^2$, $\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty$,

$f'(x)=8x^3+12ax^2+2(2a^2+4b^2-1)x-2a=0$, $4x^3+6ax^2+(2a^2+4b^2-1)x-a=0$

$g(x)=4x^3+6ax^2+(2a^2+4b^2-1)x=a$ 의 실근의 개수를 구해보자.

$g'(x)=12x^2+12ax+2a^2+4b^2-1=0$, $D/4=12a^2-48b^2+12<-21b^2+12<0$ ($\because b>1$)이므로

$g(x)$는 증가함수이고 $\lim_{x\to\infty} g(x)=\infty$, $\lim_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$ 이므로 $g(x)=a$는 1개의 실근을 갖는다.

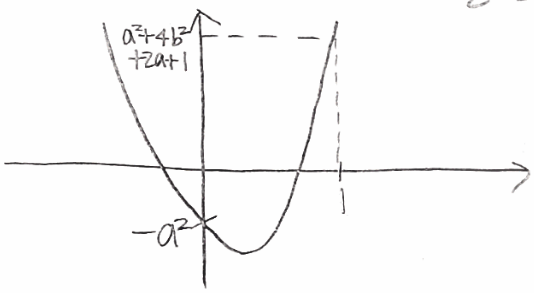
$\therefore f'(x)=0$은 1개의 실근을 갖고, 실근의 값을 α라고 하면 $x<\alpha$에서 $f'(x)<0$,

$x>\alpha$에서 $f'(x)>0$ 이므로 $x=\alpha$에서 $f(x)$는 극솟값을 갖는다.

$f'(0)=-2a<0$, $f'(1)=4a^2+8b^2+10a+6>0$ ($\because a>1, b>1$) 이므로 사잇값 정리에 의해 $0<\alpha<1$ 이다.

$f(0)=-a^2<0$, $f(1)=a^2+4b^2+2a+1>0$ 이다.

이를 종합해 $f(x)$의 그래프를 그려보면 다음과 같다.



[문제 2-3]

$f(\frac{1}{2})=0$이므로 $\frac{1}{8}+\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}a^2+b^2-\frac{1}{4}-a-a^2=-\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{2}a+b^2-\frac{1}{8}=0$,

$b^2=\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}a+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}(a+\frac{1}{2})^2$ 인데, $a>1$, $b>1$이므로 $b=\frac{1}{\sqrt{2}}(a+\frac{1}{2})$(단, $a>1$, $b>\frac{3\sqrt{2}}{4}$)

라고 할 수 있다.