

$$1. f'(x) = \frac{2x(x + \sqrt{a^2 - x^2}) - x^2(1 - \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}})}{(x + \sqrt{a^2 - x^2})^2} = \frac{x(x\sqrt{a^2 - x^2} + 2a^2 - x^2)}{(x + \sqrt{a^2 - x^2})^2 \sqrt{a^2 - x^2}}$$

이고, 모든 $0 \leq x \leq a$ 에 대하여 $x\sqrt{a^2 - x^2} + 2a^2 - x^2 > 0$ 이므로 $f'(0) = 0$ 이다.

따라서 임의의 $0 < x < a$ 에 대하여 $f'(x) > 0$ 이고 $f(x)$ 는 $[0, a]$ 에서 연속이므로, 함수 $f(x)$ 는 단조증가함수이고 일대일 함수이다.

$$2. I = \int_0^\pi xf(a \sin x)dx \text{라 하면 } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} xf(a \sin x)dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi xf(a \sin x)dx \text{이고}$$

$t = \pi - x$ 로 치환하여 적분하면

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi xf(a \sin x)dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (\pi - t)f(a \sin(\pi - t))(-dt) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\pi - t)f(a \sin t)dt$$

이므로 $I = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(a \sin x)dx$ 이다.

3. 2번의 결과로부터

$$I = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(a \sin x)dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^2 \sin^2 t}{a \sin t + a \cos t} dt = a\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 t}{\sin t + \cos t} dt$$

이고, 다시 $\theta = \frac{\pi}{2} - t$ 로 치환하여 적분하면

$$I = a\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 t}{\sin t + \cos t} dt = a\pi \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\sin^2(\frac{\pi}{2} - \theta)}{\sin(\frac{\pi}{2} - \theta) + \cos(\frac{\pi}{2} - \theta)} (-d\theta) = a\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 \theta}{\cos \theta + \sin \theta} d\theta$$

따라서 $2I = a\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin \theta + \cos \theta} d\theta = a\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin \theta + \cos \theta} d\theta$ 이고,

$$I = \frac{a\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sin \theta + \cos \theta} = \frac{a\pi}{2\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin(\theta + \frac{\pi}{4})} d\theta = \frac{a\pi}{2\sqrt{2}} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{1}{\sin \theta} d\theta = \frac{a\pi}{2\sqrt{2}} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\sin \theta}{1 - \cos^2 \theta} d\theta$$

이다. 다시 $\cos \theta = x$ 로 치환하여 적분하면,

$$I = \frac{a\pi}{2\sqrt{2}} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\sin \theta}{1 - \cos^2 \theta} d\theta = \frac{a\pi}{2\sqrt{2}} \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{-\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{(-dx)}{1 - x^2} = \frac{a\pi}{2\sqrt{2}} \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{dx}{1 - x^2} \text{ 이다.}$$

한편 $\frac{1}{1 - x^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} \right)$ 이므로,

$$I = \frac{a\pi}{4\sqrt{2}} \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} dx = \left[\frac{a\pi}{4\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| \right]_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{a\pi}{\sqrt{2}} \ln(1 + \sqrt{2}) \text{ 이다.}$$

1. $m = 20, n = 15$ 일 때, $p(x) = (1-x)^{20}(1+x)^{15} = (1-x^2)^{15}(1-x)^5 = p_1(x)p_2(x)$ 이다.

여기서 $p_1(x) = (1-x^2)^{15}, p_2(x) = (1-x)^5$ 이다.

다항식 $p(x)$ 에서 x^7 의 계수 a_7 는

$$\begin{aligned} a_7 &= {}_{15}C_1 \cdot {}_5C_5 \cdot (-1)^1(-1)^5 + {}_{15}C_2 \cdot {}_5C_3 \cdot (-1)^2(-1)^3 + {}_{15}C_3 \cdot {}_5C_1 \cdot (-1)^3(-1)^1 \\ &= 15 \cdot 1 + \frac{15 \times 14}{2} \cdot \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2} \cdot (-1) + \frac{15 \times 14 \times 13}{3 \times 2} \cdot 5 \\ &= 1240 \end{aligned}$$

2. $p(x) = (1-x)^m(1+x)^n = (1-x)[(1-x)^{m-1}(1+x)^n] = q(x) - xq(x)$ 에서

양변의 x^k 의 계수를 비교하면, $a_k = b_k - b_{k-1} \dots\dots$ ①

$p(x) = \sum_{k=0}^{m+n} a_k x^k = (1-x)^m(1+x)^n$ 의 양변을 미분하면,

$p'(x) = \sum_{k=1}^{m+n} k a_k x^{k-1} = -m(1-x)^{m-1}(1+x)^n + n(1-x)^m(1+x)^{n-1} = -mq(x) + nr(x)$ 이다.

그러므로 $\sum_{k=1}^{m+n} k a_k x^{k-1} = -m \sum_{k=0}^{m+n-1} b_k x^k + n \sum_{k=0}^{m+n-1} c_k x^k$ 이다.

위 등식에서 x^{k-1} 의 계수를 비교하면, $ka_k = -mb_{k-1} + nc_{k-1} \dots\dots$ ②

식 ②의 a_k 대신에 식 ①을 대입하면,

$$k(b_k - b_{k-1}) = -mb_{k-1} + nc_{k-1} \Rightarrow (m-k)b_{k-1} + kb_k - nc_{k-1} = 0$$

3. $p(x) = (1-x)^m(1+x)^n = [(1-x)^m(1+x)^{n-1}](1+x) = r(x) + xr(x)$ 에서

양변의 x^k 의 계수를 비교하면, $a_k = c_k + c_{k-1} \dots\dots$ ③

식 ②의 a_k 대신에 식 ③을 대입하면,

$$k(c_k + c_{k-1}) = -mb_{k-1} + nc_{k-1} \Rightarrow mb_{k-1} + kc_k - (n-k)c_{k-1} = 0$$

한양대학교 2019학년도 신입학전형 수시 모의논술고사

자연계

출제 의도 및 평가 지침

1 번

1. 출제 의도 및 문제 해설

고등학교 수학 교육을 정상화하기 위하여 철저하게 교과서를 중심으로 출제하였으며, 정상적인 수학교과를 이수한 수험생이면 충분히 풀 수 있는 문제를 출제하였다. 1번에서는 함수의 미분과 그래프의 개형을 통해 함수가 일대일 함수임을 파악할 수 있는지를 묻고 있으며, 2,3번에서는 삼각함수의 대칭성, 덧셈정리, 합성, 그리고 유리함수의 분해 등 다양한 수학적 성질을 활용하여 치환적분을 할 수 있는지를 묻고 있다. 2번 문제가 3번을 해결하는 방향키 역할을 하는데, 정적분의 기본성질과 삼각함수의 대칭성을 파악해서 추론할 수 있는지가 중요한 포인트가 된다.

2. 종합 평가 기준

문항	배점	세부 평가 기준	세부 배점
1	30	미분을 이용하여 함수 $f(x)$ 가 일대일 함수임을 잘 보였는가?	30
2	30	$t = \pi - x$ 로 치환하여 올바른 결과를 얻었는가?	30
3	20	$\theta = \frac{\pi}{2} - t$ 로 치환하여 적분하여 $\int_0^{\pi} x f(a \sin x) dx = \frac{a\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin \theta + \cos \theta} d\theta$ 임을 보였는가?	20
	20	삼각함수의 합성 및 부분 분수화를 통해 적분을 잘 구했는가?	20

3. 출제 근거

함수의 그래프 - 고등학교미적분 II (교학사, 2016년), p133~142

삼각함수의 합성 - 고등학교미적분 II (교학사, 2016년), p88

부정적분의 치환적분법 - 고등학교미적분 II (교학사, 2016년), p164~168

한양대학교 2019학년도 신입학전형 수시 모의논술고사

자연계

출제 의도 및 평가 지침

2 번

1. 출제 의도 및 문제 해설

고등학교 교육과정을 정상적으로 이수한 학생은 누구나 해결할 수 있는 문제를 고등학교 교과과정의 범위에서 출제하였다. 특히, 수학의 개념, 원리, 법칙을 정확히 이해하고 수학적 사고력을 바탕으로 논리적으로 문제를 해결할 수 있는 능력을 측정하는데 주안점을 두고 출제를 하였다. 4차 산업혁명 시기에 절실히 요구되는 수학적 사고력, 추론 능력을 키우기 위한 수학의 기본 개념과 중요한 정리들의 의미를 이해하고 있는지 측정하고자 하였다.

자연계 2번 문제는 확률과 통계에서 핵심적인 내용인 이항정리를 올바르게 이해하고 있는지를 측정하는 문제이다. 문항 1은 주어진 다항식의 계수를 찾기 위하여 다른 형태의 두 개의 다항식의 곱으로 표현하고 이항정리를 이용하여 주어진 다항식의 계수를 구하는 문제이다. 문항 2와 3은 제시문에서 주어진 다항식들의 관계를 이용하여 주어진 값을 구할 수 있는 능력을 측정하는 문제이다.

문항 1은 이항정리를 통하여 다항식의 계수를 찾는 문제인 반면에, 문항 2와 3은 다항식의 미분과 이를 통해 얻어진 다항식의 계수들을 비교하여 문항의 답을 찾는 복합적인 문제인데, 이러한 문제는 학생들이 고등학교 수학교과과정의 기본적인 내용인 미분과 이항정리를 올바르게 이해했는지를 평가할 수 있는 문제이다.

2. 종합 평가 기준

문항	배점	세부 평가 기준	세부 배점
1	20	다항식 $p(x)$ 를 $p_1(x)p_2(x)$ 의 곱으로 나누었는가?	5
		a_7 의 값을 이항정리를 이용하여 구했는가?	15
2	40	다항식 $p(x)$ 와 $q(x)$ 의 관계를 이용하여 $a_k = b_k - b_{k-1}$ 를 구했는가?	20
		다항식 $p(x)$ 의 미분을 통해 $ka_k = -mb_{k-1} + nc_{k-1}$ 을 구하고, 문제의 값을 구했는가?	20
3	40	다항식 $p(x)$ 와 $r(x)$ 의 관계를 이용하여 $a_k = c_k + c_{k-1}$ 를 구했는가?	20
		다항식 $p(x)$ 의 미분을 통해 $ka_k = -mb_{k-1} + nc_{k-1}$ 을 구하고, 문제의 값을 구했는가?	20

3. 출제 근거

교과서 확률과 통계 (천재교육, 이준열외 9인)

- 이항정리 p. 68 - 78



수험번호

성명

페이지

[문제 1-1]

$$f'(x) = \frac{2x(x + \sqrt{a^2 - x^2}) - x^2 \left(1 + 2 \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right)}{(x + \sqrt{a^2 - x^2})^2}$$

$$= \frac{2\sqrt{a^2 - x^2} x^2 + 4(a^2 - x^2)x + x}{2\sqrt{a^2 - x^2} (x + \sqrt{a^2 - x^2})^2}$$

$$= \frac{2\sqrt{a^2 - x^2} x^2 + 4(a^2 - x^2)x + x}{2\sqrt{a^2 - x^2} (x + \sqrt{a^2 - x^2})^2} \text{ 이다.}$$

$f(0) = 0$, $f(a) = a$ 이고 $0 \leq x < a$ 에서 $f'(x) \geq 0$ 이므로
함수 $f(x)$ 는 구간 $[0, a)$ 에서 증가하는 함수이다.

∴ 함수 $f(x)$ 는 구간 $[0, a)$ 에서 일대일 함수



수험번호	성명	페이지

[문제 1-2]

정적분의 정의에 의해서

$$\int_0^{\pi} x f(asinx) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x f(asinx) dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x f(asinx) dx \text{ 이다.}$$

이때, $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x f(asinx) dx$ 에서 $x = \pi - t$ 로 치환하면

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x f(asinx) dx &= - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (\pi - t) f(asint) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\pi - t) f(asint) dt \\ &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(asint) dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} t f(asint) dt \text{ 이다.} \end{aligned}$$

$$\text{그러므로 } \int_0^{\frac{\pi}{2}} x f(asinx) dx + \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(asinx) dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x f(asinx) dx$$

$$= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(asinx) dx \text{ 이다,}$$



수험번호	성명	페이지

[문제 1-3]

2의 결과에 의해

$$\int_0^{\pi} x f(\cos x) dx$$

$$= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx$$

$$= \pi a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$$

$$= \frac{\pi a}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{\sin(x + \frac{\pi}{4})} dx$$

$$= \frac{\pi a}{\sqrt{2}} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\sin^2(t - \frac{\pi}{4})}{\sin t} dt$$

$$= \frac{\pi a}{2\sqrt{2}} \left\{ \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{1}{\sin t} dt - 2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos t dt \right\}$$

$$= \frac{\pi a}{2\sqrt{2}} \left\{ \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\sin t}{1 - \cos t} dt - 2 [\sin t]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \right\}$$

$$= \frac{\pi a}{2\sqrt{2}} \left\{ \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{p^2 - 1} dp \right\}$$

$$= \frac{\pi a}{2\sqrt{2}} \left([\ln|p+1| - \ln|p-1|]_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \right)$$

$$= \frac{\pi a}{2\sqrt{2}} \left(\ln\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \ln\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \right)$$

$$= \frac{\pi a}{2\sqrt{2}} \ln(3 + 2\sqrt{2})$$



수험번호

성명

페이지

[문제 1-1]

극치사실을 적용하라.

Max/min

$r_1 \neq r_2$ 일때 $f(r_1) = f(r_2)$ 를 만족하는 r_1 과 r_2 가 다른 가짐.

$r_1 = a \sin \alpha$ ($0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$), $r_2 = a \sin \beta$ ($0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$) 이면 $g(\theta) = a \sin \theta$ 일때 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ 에서 $g(\theta)$ 는 절대적 함수임을 $r_1 \neq r_2$ 에서 $\alpha \neq \beta$ 이다.

$$f(r_1) = \frac{a^2 \sin^2 \alpha}{a \sin \alpha + a \cos \beta}, \quad f(r_2) = \frac{a^2 \sin^2 \beta}{a \sin \beta + a \cos \alpha} \quad \text{이고 } a > 0 \text{ 이므로}$$

$$h(\theta) = \frac{a \sin^2 \theta}{\sin \theta + \cos \theta} \quad \text{일때 } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \text{ 에서 } h(\alpha) = h(\beta) \text{ 이므로}$$

절대적 함수임을 $(0, \frac{\pi}{2})$ 에서 $h'(\theta) = 0$ 인 θ 가 존재.

$$h'(\theta) = \frac{2 \sin \theta \cos \theta (\sin \theta + \cos \theta) - a \sin^2 \theta (\cos \theta - \sin \theta)}{(\sin \theta + \cos \theta)^2} \quad \text{극치사실 (가)의 예를 적용하면}$$

$$h'(\theta) = \frac{a \sin \theta (\sin \theta \cos \theta + 2 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta)}{2 \sin^2 (\theta + \frac{\pi}{2})}$$

인데 $a > 0$ 이고 $(0, \frac{\pi}{2})$ 에서

$$\sin \theta > 0, \quad \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2} \sin 2\theta > 0,$$

$$2 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 + \cos^2 \theta > 0 \quad \text{이므로}$$

$h'(\theta) = 0$ 인 θ 가 존재하기 충분하다.

따라서 문제가 생겼으므로 $f(r_1)$ 는 절대적 함수



수험번호	성명	페이지

[문제 1-2]

외적분류의 기본정리인 $\int_a^x f(x) dx = F(x) + C$ (상수)

$$\int_a^x f(x) dx = F(x) - F(a), \quad \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x f(x) dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x f(x) dx = F(\frac{\pi}{2}) - F(a) + F(\pi) - F(\frac{\pi}{2}) = F(\pi) - F(a)$$

따라서 $\int_a^x x f(x) dx = \int_a^{\frac{\pi}{2}} x f(x) dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^x x f(x) dx$ 성립

$\int_{\frac{\pi}{2}}^x x f(x) dx$ 에서 $x = \pi - t$ 로 치환

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{2}}^x x f(x) dx &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (\pi - t) f(\pi - t) (-dt) \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\pi - t) f(\pi - t) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{따라서} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} x f(x) dx &+ \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x f(x) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x f(x) dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\pi - x) f(x) dx \\ &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx \quad \text{성립} \end{aligned}$$



수험번호

성명

페이지

[문제 1-3]

문제 1-3의 값을 $\int_0^\pi x f(\sin x) dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx$ 가 성립한다.

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx$ 에서 $x = \frac{\pi}{2} - t$ 를 치환하면

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 f(\sin(\frac{\pi}{2} - t)) (-dt) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t) dt$$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx = \frac{1}{2} \times \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) + f(\cos x) dx \right)$$

$$= \frac{1}{2} \times \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^2 \sin^2 x}{a \sin x + \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 x}} + \frac{a^2 \cos^2 x}{a \cos x + \sqrt{a^2 - a^2 \cos^2 x}} dx \right)$$

$$= \frac{1}{2} \times \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^2}{a \sin x + a \cos x} dx \right) \text{ 이다.}$$

$a > 0$ 일 때 치환 $t = \frac{1}{\sin(x + \frac{\pi}{4})} = \sin(x + \frac{\pi}{4}) + \frac{1}{\sin(x + \frac{\pi}{4})}$ 라고 하면

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx = \frac{a}{2\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin(x + \frac{\pi}{4})} dx \text{ 이다.}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin(x + \frac{\pi}{4})} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x + \frac{\pi}{4})}{1 - \cos^2(x + \frac{\pi}{4})} dx \quad \text{이} \quad \cos(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{로 치환하면}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin(x + \frac{\pi}{4})} dx &= \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \frac{1}{1 - k^2} dk = \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \frac{1}{(1-k) + (1+k)} dk \\ &= \frac{1}{2} \left[\ln(1-k) + \ln(1+k) \right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \\ &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{3+2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}} \right) \text{ 이다.} \end{aligned}$$

$$\text{따라서} \quad \int_0^\pi x f(\sin x) dx = \pi \times \frac{a}{2\sqrt{2}} \times \frac{1}{2} \ln \left(\frac{3+2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}} \right)$$

$$= \frac{a\pi}{4\sqrt{2}} \times \ln \left(\frac{3+2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}} \right) \text{ 이다.}$$



수험번호

성명

페이지

[문제 1-1]

$f(a \sin x_1) = f(a \sin x_2)$ 라 하자.

$$\frac{a^2 \sin^2 x_1}{a \sin x_1 + \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 x_1}} = \frac{a^2 \sin^2 x_1}{a(\sin x_1 + \cos x_1)} = \frac{a \sin^2 x_1}{\sin x_1 + \cos x_1}$$

$$= \frac{a^2 \sin^2 x_2}{a \sin x_2 + \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 x_2}} = \frac{a^2 \sin^2 x_2}{a(\sin x_2 + \cos x_2)} = \frac{a \sin^2 x_2}{\sin x_2 + \cos x_2}$$

$$\frac{a \sin^2 x_1}{\sin x_1 + \cos x_1} = \frac{a \sin^2 x_2}{\sin x_2 + \cos x_2} \dots \textcircled{1}$$

$f(a \cos x_1) = f(a \cos x_2)$ 라 하자

$$\frac{a^2 \cos^2 x_1}{\cos x_1 + \sin x_1} = \frac{a^2 \cos^2 x_2}{\cos x_2 + \sin x_2} \dots \textcircled{2}$$

①+②를 하자

$$\frac{1}{\cos x_1 + \sin x_1} = \frac{1}{\cos x_2 + \sin x_2}$$

$$\cos x_2 + \sin x_2 = \cos x_1 + \sin x_1$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos x_2 + \sin x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos x_1 + \sin x_1)$$

$$\sin(x_2 + \frac{\pi}{4}) = \sin(x_1 + \frac{\pi}{4})$$

$$x_2 + \frac{\pi}{4} + 2n\pi = x_1 + \frac{\pi}{4}$$

$$x_2 + 2n\pi = x_1$$

$$\sin x_1 = \sin(x_2 + 2n\pi) = \sin x_2 \text{ 이고}$$

$$\cos x_1 = \cos(x_2 + 2n\pi) = \cos x_2 \text{ 이므로}$$

따라서 $f(x)$ 는 2π 의 배수를 더해도 같은 값을 가진다.



수험번호	성명	페이지

문제 1-2]

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x f(a \sin x) dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) f(a \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) f(a \cos x) dx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x f(a \sin x) dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(x + \frac{\pi}{2}\right) f(a \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(x + \frac{\pi}{2}\right) f(a \cos x) dx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\int_0^{\frac{\pi}{2}} x f(a \sin x) dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x f(a \sin x) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) f(a \cos x) dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(x + \frac{\pi}{2}\right) f(a \cos x) dx \\ &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(a \cos x) dx \\ &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(a \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)) dx \\ &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(a \sin x) dx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \int_0^{\pi} x f(a \sin x) dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x f(a \sin x) dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x f(a \sin x) dx \\ &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(a \sin x) dx = \pi I\end{aligned}$$



수험번호	성명	페이지

[문제 1-3]

$$\int_0^{\pi} x f(a \sin x) dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(a \sin x) dx$$

$$= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^2 \sin^2 x}{a \sin x + \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 x}}$$

$$= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^2 \sin^2 x}{a \sin x + a \cos x}$$

$$= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a \sin^2 x}{\sin x + \cos x}$$

$$= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a \cos^2 x}{\sin x + \cos x} \quad (x \text{ 대신 } \frac{\pi}{2} - x \text{ 를 치환하면 같아진다.})$$

$$\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a}{\sin x + \cos x} = \frac{a}{\sqrt{2}} \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \csc(x + \frac{\pi}{4})$$

$$= \frac{\sqrt{2}a}{2} \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \csc(x + \frac{\pi}{4})$$

$$= \frac{\sqrt{2}a}{2} \pi \left[-\ln(\cot(x + \frac{\pi}{4}) + \csc(x + \frac{\pi}{4})) \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}a}{2} \pi \left\{ -\ln(\cot \frac{3\pi}{4} + \csc \frac{3\pi}{4}) + \ln(\cot \frac{\pi}{4} + \csc \frac{\pi}{4}) \right\}$$

$$= \frac{\sqrt{2}a}{2} \pi (-\ln(\sqrt{2}-1) + \ln(\sqrt{2}+1))$$

$$= \frac{\sqrt{2}a}{2} \pi (\ln(\sqrt{2}+1)^2)$$

$$= \sqrt{2}a\pi (\ln(\sqrt{2}+1))$$

$$\therefore \int_0^{\pi} x f(a \sin x) dx$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} a \pi \ln(\sqrt{2}+1)$$



수험번호	성명	페이지

[문제 2-1]

$m=20, n=15$ 일 때, $p(x) = (1-x)^{20}(1+x)^{15} = (1-x)^5 \cdot (1-x^2)^{15}$ 이다.

<타>제시문에 의해 $p(x) = \left(\sum_{i=0}^5 (1-x)^i \cdot {}_5C_i \right) \left(\sum_{j=0}^{15} (-x^2)^j \cdot {}_{15}C_j \right)$ 이다.

$p(x)$ 에서 x^7 은 $(1-x)^5$ 에서 x^i 항과 $(1-x^2)^{15}$ 에서 x^j 항이 곱해져서 만들어진다고 하면, $7=i+2j$ 여야 하는데, $0 \leq i \leq 5, 0 \leq j \leq 15$ 인 정수 i, j 는 만족하는 순서쌍 (i, j) 가 $(1, 3), (3, 2), (5, 1)$ 뿐이다.

$(1-x)^5$ 에서 x^1, x^3, x^5 의 계수는 각각 $-5, -10, -1$ 이고,

$(1-x^2)^{15}$ 에서 x^2, x^4, x^6 의 계수는 각각 $-455, 105, -15$ 이므로,

$p(x)$ 에서 x^7 의 계수는 $(-5) \times (-455) + (-10) \times (105) + (-1) \times (-15)$ 인 1240 이다.

따라서 $a_7 = 1240$ 이다.

답: 1240

4



수험번호	성명	페이지

[문제 2-2]

$$p(x) = (1-x)^m (1+x)^n = (1-x) \times (1-x)^{m-1} (1+x)^n = (1-x)g(x) = g(x) - xg(x) \text{ 이다. (A)}$$

$p(x)$ 의 x^k 의 계수는 a_k , $g(x)$ 의 x^k 의 계수는 b_k 이고,

$xg(x)$ 의 x^k 의 계수는 $g(x)$ 의 x^{k-1} 의 계수와 같고 이는 b_{k-1} 이다.

①에 의해 $p(x)$ 의 x^k 의 계수와 $(g(x) - xg(x))$ 의 x^k 의 계수는 같다.

따라서, $a_k = b_k - b_{k-1}$ 이고, $-b_{k-1} + b_k - a_k = 0$ 이다. (B)

$p'(x)$ 의 x^{k-1} 의 계수를 A_{k-1} 이라 하자.

$a_k x^k$ 를 x 에 대해 미분하면 $ka_k x^{k-1}$ 이므로, $A_{k-1} = ka_k$ 이다. (C)

$$\begin{aligned} \text{<나>제시문에 의해 } p'(x) &= m(1-x)^{m-1} \cdot (-1) \cdot (1+x)^n + (1-x)^m \cdot n(1+x)^{n-1} \\ &= -m g(x) + n p(x) \text{ 이므로,} \end{aligned}$$

$$A_{k-1} = -mb_{k-1} + nc_{k-1} \text{ 이다. (D)}$$

$$\text{B, C에 의해 } ka_k = A_{k-1} = -mb_{k-1} + nc_{k-1}, \quad \therefore -ka_k = mb_{k-1} - nc_{k-1} \text{ 이다. (E)}$$

$$\begin{aligned} \text{D, E에 의해 } (m-k)b_{k-1} + kb_k - nc_{k-1} &= -kb_{k-1} + kb_k + (mb_{k-1} - nc_{k-1}) \\ &= k(-b_{k-1} + b_k - a_k) = 0 \text{ 이다.} \end{aligned}$$

$$\text{따라서, } (m-k)b_{k-1} + kb_k - nc_{k-1} = 0 \text{ 이다.}$$

답: 0



수험번호	성명	페이지

[문제 2-3]

$$p(x) = (1-x)^m (1+x)^n = (1+x) \cdot (1-x)^m (1+x)^{n-1} = (1+x)r(x) = r(x) + xr(x) \text{ 이고,}$$

$p(x)$ 의 x^k 계수 a_k 와 $(r(x) + xr(x))$ 의 x^k 계수 $(c_k + c_{k-1})$ 이 같다.

따라서, $a_k = c_k + c_{k-1}$ 이다. (㉠)

$p'(x)$ 의 x^{k-1} 계수 A_{k-1} 은 문제 2-2 에서 보인 바와 같이

$A_{k-1} = k a_k$ 이 성립한다. (㉡)

$$\begin{aligned} \text{<㉡>제식문에 의해 } p'(x) &= m(1-x)^{m-1}(-1)(1+x)^n + (1-x)^m \cdot n(1+x)^{n-1} \\ &= -m g(x) + n r(x) \text{ 이고,} \end{aligned}$$

$$A_{k-1} = -m b_{k-1} + n c_{k-1} \text{ 이다. (㉢)}$$

$$\text{㉠, ㉡에 의해 } k a_k = A_{k-1} = -m b_{k-1} + n c_{k-1}, \quad \therefore -k a_k = m b_{k-1} - n c_{k-1} \text{ 이다. (㉣)}$$

$$\begin{aligned} \text{㉠, ㉢에 의해 } m b_{k-1} + k c_k - (n-k) c_{k-1} & \\ &= (m b_{k-1} - n c_{k-1}) + k (c_k + c_{k-1}) \\ &= (-k a_k) + k a_k = 0 \text{ 이다.} \end{aligned}$$

$$\text{따라서, } m b_{k-1} + k c_k - (n-k) c_{k-1} = 0 \text{ 이다.}$$

답: 0



수험번호	성명	페이지

[문제 2-1]

$$p(x) = (1-x)^{20} (1+x)^{15} = (1-x)^5 (1-x^2)^{15}$$

$$x^1 = (x^2)^3 \times x = (x^2)^2 \times x^3 = x^2 \times x^5 \quad (x^2)^0 \times x^1 \text{ 은 } (1-x)^5 \text{ 에서 } x^5 \text{ 가리키는 계수에서 } x^2 \text{ 가 곱해지므로}$$

$$\therefore a_1 = (-1)^3 \times {}_{15}C_3 \times (-1)^1 \times {}_5C_1 + (-1)^2 \times {}_{15}C_2 \times (-1)^3 \times {}_5C_3 + (-1) \times {}_{15}C_1 \times (-1)^5 \times {}_5C_5$$

$$= 2215 - 1050 + 15 = 1240$$



수험번호	성명	페이지

[문제 2-2]

$$p(x) = \sum_{k=0}^{m+n} a_k x^k = (1-x)^m (1+x)^n = (1-x) q(x) = (1+x) r(x)$$

$$= (1-x) \sum_{k=0}^{m+n-1} b_k x^k = (1+x) \sum_{k=0}^{m+n-1} c_k x^k$$

이 때 계속미교법을 통해 x^k 의 계수를 비교하면

$$a_k = b_k - b_{k-1} = c_k + c_{k-1} \dots \quad (1)$$

계수를 (4)에 의해

$$p'(x) = -m(1-x)^{m-1}(1+x)^n + n(1-x)^m(1+x)^{n-1} = -mq(x) + nr(x)$$

따라서 x^k 의 계수를 비교하면

$$ka_k = -mb_{k-1} + nc_{k-1} \dots \quad (2)$$

① $\times k$ - ② 하면

이 때

$$0 = mb_{k-1} - nc_{k-1} + kb_k - kb_{k-1}$$

$$= (m-k)b_{k-1} + kb_k - nc_{k-1}$$

$$\therefore 0$$



수험번호

성명

페이지

[문제 2-3]

2 - 2m서 $k a_k = -m b_{k-1} + n c_{k-1}$, $a_k = c_k + c_{k-1}$ 이었다.

$$\begin{aligned} k a_k - k a_{k-1} &= 0 = k(c_k + c_{k-1}) + m b_{k-1} - n c_{k-1} \\ &= m b_{k-1} + k c_k - (n-k) c_{k-1} \end{aligned}$$

$$\therefore 0$$



수험번호	성명	페이지

[문제 2-1] $m=20, n=15$ 일때

$$p(x) = (1-x)^{20} (1+x)^5 = (1-x)^{15} (1-x)^5$$

이때, $(1-x)^{15}$ 에서 포함되는 x^r 의 차수를 a , $(1-x)^5$ 에서 포함되는 x^r 의 차수를 b 라고 하면 (다)의 이항정리에 의해

i) $a=1, b=5$ 일때 x^r 의 계수

$$(-1)^1 \binom{15}{1} \times (-1)^5 \binom{5}{5} = 15 \times 1 = 15$$

ii) $a=2, b=3$ 일때 x^r 의 계수

$$15 \binom{15}{2} \times (-1)^3 \binom{5}{3} = 105 \times (-10) = -1050$$

iii) $a=3, b=1$ 일때 x^r 의 계수

$$(-1)^3 \binom{15}{3} \times (-1)^1 \binom{5}{1} = -455 \times (-5) = 2275$$

$$\begin{aligned} \text{즉, } a_n \text{의 값은 } i) + ii) + iii) &= 15 + (-1050) + 2275 \\ &= 1240 \text{ 이다.} \end{aligned}$$

$$\therefore 1240$$



수험번호	성명	페이지

[문제 2-2]

$$P(x) = (1-x) q(x) \text{ 에서 } a_k = b_k - b_{k-1} \dots \textcircled{1}$$

$$P(x) = (1+x) r(x) \text{ 에서 } a_k = c_k + c_{k-1} \dots \textcircled{2}$$

이때 $(1-x)^m$ 과 $(1+x)^n$ 은 미분가능하므로 제사문 <나>를 통해
 $P'(x) = -m(1-x)^{m-1}(1+x)^n + n(1-x)^m(1+x)^{n-1}$ 임을 알수있다.

$$P'(x) \text{ 의 } x^{k-1} \text{ 의 계수는 } ka_k$$

$$\text{따라서 } ka_k = -mb_{k+1} + nc_{k-1} \dots \textcircled{3}$$

$$\text{즉 } (m-k)b_{k-1} + kb_k - n(c_{k-1})$$

$$= mb_{k-1} - kb_{k-1} + kb_k - n(c_{k-1})$$

$$= k(b_k - b_{k-1}) - (n(c_{k-1}) - mb_{k-1})$$

$$= ka_k - ka_k = 0$$

$\therefore 0$



수험번호	성명	페이지

[문제 2-3]

[문제 2-2] 의 ①, ②, ③ 에 의해

$$\begin{aligned} mb_{k-1} + kc_k - n(c_{k-1} + kc_{k-1}) \\ = k(c_k + c_{k-1}) - (nc_{k-1} - mb_{k-1}) \\ = ka_k - ka_k = 0 \end{aligned}$$

$\therefore 0$

6