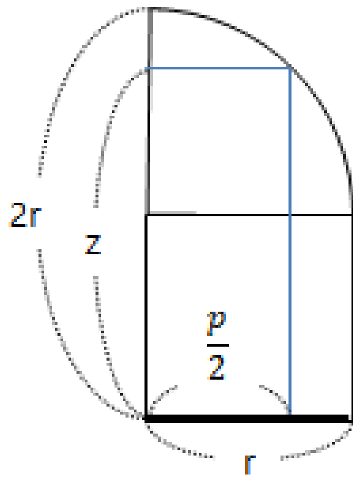
한양대학교 2019학년도 신입학전형 수시

자 연 계	**논 술 예 시 답 안**	오후(2) 의예-1번

1. 인공위성의 가로, 세로, 높이를 x, y, z 라고 하면 부피는 xyz 이다.



산술 기하 평균을 이용하면 $xyz \le \dfrac{x^2+y^2}{2}z$ 이고 $x=y$ 일 때 등호가 성립한다.

직육면체 밑면의 대각선의 길이를 p 라고 하면, $p^2 = x^2+y^2$ 이므로 $xyz \le \dfrac{p^2 z}{2}$ 가 된다.

부피가 최대가 되기 위해서는 화물칸에 내접해야 하고, 그 경우 오른쪽 그림과 같이 직육면체 윗면의 꼭짓점이 반구에 닿아야 하므로

$(z-r)^2 + (\frac{p}{2})^2 = r^2$

을 만족해야 한다. 즉, $p^2 = 4(r^2-(z-r)^2)$ 이 된다. 부피를 z 에 관한 함수 $f(z)$ 라고 하면

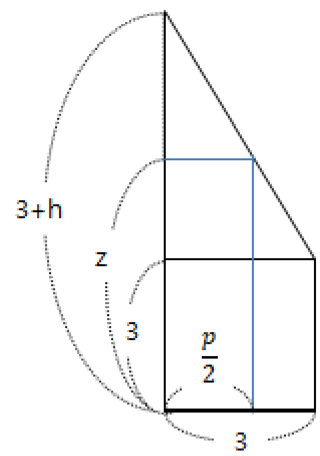
$f(z) = -2z^2(z-2r)$

이다. 또한, 최대 부피를 가지기 위한 z 의 범위는 $r \le z \le 2r$ 이 된다. 함수 $f(z)$ 의 극댓값을 구하기 위해 도함수를 구하면

$f'(z) = -6z^2 + 8rz = -2z(3z-4r)$

이고, $z = \dfrac{4r}{3}$ 일 때 극댓값을 갖는다. 따라서 최대 부피는 $f(\frac{4r}{3}) = \dfrac{64r^3}{27}$ 이 된다.

2. 어떤 부피를 싣기 위한 h 의 최솟값을 구하기 위해서는 우선 h 가 고정되었을 때 부피의 최댓값을 알아야 한다. 앞의 문제와 마찬가지로 인공위성의 가로, 세로, 높이를 x, y, z 라 하고 밑면의 대각선의 길이를 p 라고 하자. 부피가 최대가 되기 위해서는 오른쪽 그림과 같이 화물칸에 내접해야하므로, 삼각형의 닮음을 이용하여



$\dfrac{h}{3} = \dfrac{2(3+h-z)}{p}$

가 되어야 한다. 따라서 $p = \dfrac{6(3+h-z)}{h}$ 이다. 인공위성의 높이가 z 일 때 부피의 최댓값을 $g(z)$ 라고 하면

$g(z) = \dfrac{18z(z-(3+h))^2}{h^2}$

이 된다. 도함수를 구하면

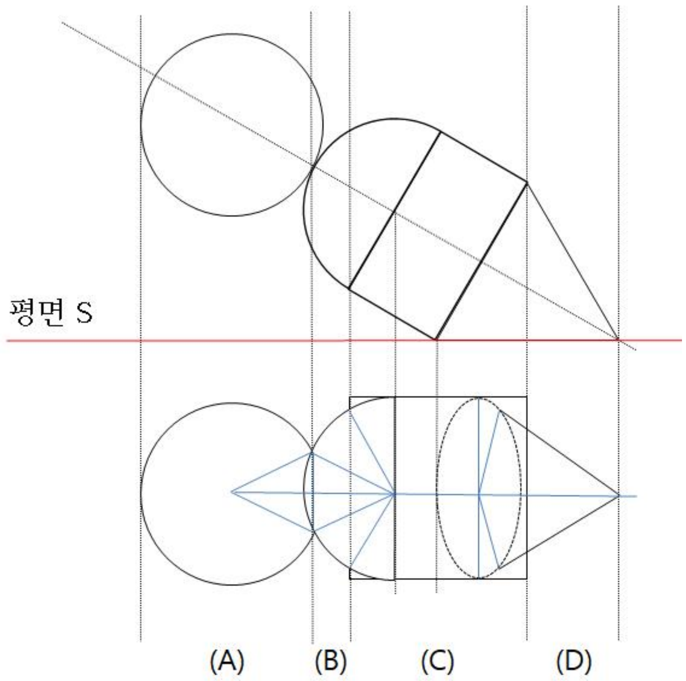
$g'(z) = \dfrac{18}{h^2}(3z^2 - 4(3+h)z + (3+h)^2) = \dfrac{18}{h^2}(3z-(3+h))(z-(3+h))$

이고 $z = \dfrac{3+h}{3}$ 에서 극댓값을 갖는다. 이 때, $h \le 6$ 이면 $z=3$ 에서 최댓값을 갖는데, 그 때 부피는 $g(3) = 54$ 이므로 $h \le 6$ 일 수 없다. $h > 6$ 인 경우 극댓값이 최댓값이 되는데, 그 때 부피는 $g(\frac{3+h}{3}) = \dfrac{18}{h^2}\dfrac{4(3+h)^3}{27} = \dfrac{72(3+h)^3}{27h^2}$ 이다. 즉, $\dfrac{72(3+h)^3}{27h^2} = 64$ 를 만족해야 한다. $h > 6$ 에서 방정식 $(h+3)^3 = 24h^2$ 을 풀면

$(h-3)(h^2-12h-9) = 0$

이다. 따라서 $h = 3(2+\sqrt{5})$ 일 때 부피가 64인 인공위성을 넣을 수 있다.

3. 그림에 주어진 도형을 평면 S로 정사영 시키면 다음 그림과 같은 형태의 평면도형이 나온다. 평면 S와 그림의 도형의 중심축이 이루는 각도는 $\frac{\pi}{6}$이다. 따라서 중심축과 평행한 길이 l인 선분은 정사영의 길이가 $l\cos\frac{\pi}{6}=\frac{l\sqrt{3}}{2}$ 이 된다.



정사영을 (A), (B), (C), (D)의 네 구역으로 나누어 계산할 수 있다.
구의 평면 S 위로의 정사영은 구가 된다. 따라서 (A)의 넓이는 중심각이 $\frac{5\pi}{3}$인 부채꼴과 한 변의 길이가 1인 정삼각형의 넓이이다.

$((\mathrm{A})\text{의 넓이})=\frac{5\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{4}$

(B)는 부채꼴과 삼각형의 넓이를 이용하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$((\mathrm{B})\text{의 넓이})=(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4})-(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4})=\frac{\pi}{6}$

(C)는 정사영에 의해 가로의 길이가 $1+\frac{\sqrt{3}}{2}$이고 세로의 길이가 2인 직사각형이므로 다음과 같다.

$((\mathrm{C})\text{의 넓이})=2(1+\frac{\sqrt{3}}{2})=2+\sqrt{3}$

원뿔의 밑면에 있는 점과 꼭짓점에 있는 점을 연결한 모든 선분은 정사영의 범위에 들어가야 한다. 따라서 (D)의 선분은 (C)안에 있는 타원에 접하게 된다. 따라서 (D)의 넓이를 구하기 위해서는 접선의 기울기를 구하여야 한다. 타원이 원점에 놓여있고, $(\frac{3}{2},0)$을 지나는 직선이 타원에 접한다고 하자.

타원의 방정식은 $4x^2+y^2=1$이고, 음함수 미분을 이용하여 접선의 기울기를 구할 수 있다.

$8x\,dx+2y\,dy=0$이므로 $\frac{dy}{dx}=-\frac{4x}{y}$를 얻고, 타원 위의 점 (a,b)에서의 접선은 $y=-\frac{4a}{b}(x-a)+b$가 된다. 이 접선이 점 $(\frac{3}{2},0)$를 지나므로 $-\frac{4a}{b}(\frac{3}{2}-a)+b=0$를 얻고, 타원의 점이므로 $4a^2+b^2=1$을 만족한다. 두 조건을 만족하는 점 (a,b)는 $(\frac{1}{6},\frac{4\sqrt{2}}{6})$, $(\frac{1}{6},-\frac{4\sqrt{2}}{6})$이고 접선의 기울기는 각각 $-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}$이 된다. 이를 이용하여 (D)의 삼각형의 넓이를 구하면

$((\mathrm{D})\text{의 넓이})=\frac{1}{\sqrt{2}}$

이다. 이를 모두 더하면 정사영의 넓이를 구할 수 있다.

$(\text{정사영의 넓이})=\pi+2+\frac{5\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}$

자 연 계	한양대학교 2019학년도 신입학전형 수시 **논 술 예 시 답 안**	오후(2) 의예-2번

1. ① $x \geq 1$인 경우; $t \in [1, x]$에 대하여 $\dfrac{x}{t} \geq 1$ 이다.

따라서 $x \ln x = \displaystyle\int_1^x \frac{x}{t} dt \geq \int_1^x 1 dt = x - 1$이다.

② $0 < x < 1$인 경우; $t \in [x, 1]$에 대하여 $-\dfrac{x}{t} \geq -1$이다.

따라서 $x \ln x = \displaystyle\int_1^x \frac{x}{t} dt \geq \int_x^1 (-\frac{x}{t}) dt \geq \int_x^1 (-1) dt = \int_1^x 1 dt = x - 1$이다.

그러므로 양의 실수 x에 대하여 $x \ln x \geq x - 1$이 성립한다.

$x \ln x \geq x - 1$으로부터 자연수 $1 \leq n \leq k$에 대하여 $\dfrac{a_n}{b_n} \ln \dfrac{a_n}{b_n} \geq \dfrac{a_n}{b_n} - 1$임을 알 수 있다.

위 부등식의 양변에 b_n을 곱하면, $a_n \ln \dfrac{a_n}{b_n} \geq a_n - b_n$ -------------- (*) 이다.

부등식 (*)에서 양변을 $n = 1$에서 $n = k$까지 합을 구하면, 다음 부등식을 얻는다.

$\displaystyle\sum_{n=1}^{k} a_n \log \frac{a_n}{b_n} \geq \sum_{n=1}^{k} (a_n - b_n) = \sum_{n=1}^{k} a_n - \sum_{n=1}^{k} b_n = 0$이므로,

$\displaystyle\sum_{n=1}^{k} a_n \log a_n \geq \sum_{n=1}^{k} a_n \log b_n$을 얻는다.

2. $\{f(x)\}^2 - \{g(x)\}^4 = 4$ 를 미분하면

$$\Rightarrow 2f(x)f'(x) - 4\{g(x)\}^3 g'(x) = 0 \quad \Rightarrow \frac{g'(x)}{f(x)} = \frac{f'(x)}{2\{g(x)\}^3} \qquad \cdots\cdots ①$$

$$\int_0^\pi \frac{3f(x)g'(x) - f'(x)g(x)}{\{f(x)\}^2 g(x)} dx = \int_0^\pi \left[\frac{3f(x)g'(x)}{\{f(x)\}^2 g(x)} - \frac{f'(x)g(x)}{\{f(x)\}^2 g(x)} \right] dx$$
$$= \int_0^\pi \left[\frac{3f(x)g'(x)}{\{f(x)\}^2 g(x)} - \frac{f'(x)}{\{f(x)\}^2} \right] dx = \int_0^\pi \frac{3f(x)g'(x)}{\{f(x)\}^2 g(x)} dx - \int_0^\pi \frac{f'(x)}{\{f(x)\}^2} dx$$

(1) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{f'(x)}{\{f(x)\}^2} dx = \left[-\frac{1}{f(x)} \right]_0^\pi = -\left(\frac{1}{f(\pi)} - \frac{1}{f(0)} \right) = -\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3} \right) = \frac{2}{15}$

(2) ①의 관계식에 의해 다음 식을 얻는다.

$$\int_0^\pi \frac{3f(x)g'(x)}{\{f(x)\}^2 g(x)} dx = \int_0^\pi \frac{\{g(x)\}^3}{f(x)} \frac{(3g'(x))}{\{g(x)\}^4} dx = \frac{3}{2} \int_0^\pi \frac{2\{g(x)\}^3}{f(x)} \frac{g'(x)}{\{g(x)\}^4} dx$$

따라서 적분값을 구하면,

$$\frac{3}{2}\int_0^{\pi}\frac{2\{g(x)\}^3}{f(x)}\,\frac{g'(x)}{\{g(x)\}^4}\,dx = \frac{3}{2}\int_0^{\pi}\frac{f(x)f'(x)}{f(x)\left(\{f(x)\}^2-4\right)}\,dx \ = \frac{3}{2}\int_0^{\pi}\frac{f'(x)}{\{f(x)\}^2-4}\,dx$$

$$= \frac{3}{8}\int_0^{\pi}\left(\frac{f'(x)}{f(x)-2} - \frac{f'(x)}{f(x)+2}\right)dx$$

$$= \frac{3}{8}\left[\,\ln|\,f(x)-2\,| - \ln|\,f(x)+2\,|\,\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{3}{8}\{\ln 3 - \ln 7 + \ln 5\} = \frac{3}{8}\ln\frac{15}{7}$$

(1)과 (2)로부터 구하는 적분값은 $-\frac{2}{15}+\frac{3}{8}\ln\frac{15}{7}$ 이다.

3. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)^n = 27$ 이므로, $\lim\limits_{n\to\infty} n\ln a_n = \ln 27$ 이다. 마찬가지로, $\lim\limits_{n\to\infty} n\ln b_n = \ln 64$ 이다.

자연수 n 에 대하여 $c_n = \frac{b_n}{a_n}$ 이라 하면, $\lim\limits_{n\to\infty}(c_n)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(b_n)^n}{(a_n)^n} = \frac{64}{27} \neq 0$ 이다.

그러므로 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 1$ 임을 알 수 있다.

구하는 극한을 변형하면, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}a_n+\frac{2}{3}b_n\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}(a_n)^n\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\frac{b_n}{a_n}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}(a_n)^n\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}c_n\right)^n$ 이다.

로그함수 $\ln x$ 의 $x=1$ 에서의 미분계수는 1이므로, $\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln\ x-\ln 1}{x-1} = \lim\limits_{x\to1}\frac{\ln x}{x-1} = 1$ 이다.

그리고 $\ln\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}x\right)$의 $x=1$ 에서의 미분계수를 관찰하면, $\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}x\right)}{x-1} = \frac{2}{3}$ 임을 알 수 있다.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln c_n}{\ln\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}c_n\right)} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\ln c_n}{\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}c_n\right)} = \frac{3}{2}$ 이다.

(2) $$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln c_n}{\ln\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}c_n\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{n\ln c_n}{n\ln\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}c_n\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln\,(c_n)^n}{\ln\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}c_n\right)^n}$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\ln\,(c_n)^n}{\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}c_n\right)^n} = \frac{\ln\frac{64}{27}}{\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}c_n\right)^n}$$

(1)과 (2)로부터 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}c_n\right)^n = \frac{2}{3}\cdot\ln\left(\frac{64}{27}\right) = \ln\left(\frac{16}{9}\right)$ 이다.

그러므로 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)^n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}c_n\right)^n = 27\cdot\frac{16}{9} = 48$ 이다.

한양대학교 2019학년도 신입학전형 수시 논술고사		
자 연 계	**출제 의도 및 평가 지침**	오후(2) 의예-1번

1. 출제 의도 및 문제 해설

(1) 출제의도

오후 2 의예과 [문제1]은 고등학교 교과과정에서 다루어지는 공간도형, 이차곡선, 정사영, 도함수, 극댓값을 주요 내용으로 하여 교육과정을 충실히 학습한 학생들은 해결할 수 있도록 출제하였다. 공간도형과 도함수, 극댓값, 정사영, 접선의 방정식 등의 수학적 개념을 정확히 이해하고 활용할 수 있는지를 평가하기 위한 문제이다. 전문 분야를 공부하게 될 미래사회의 구성원에게 요구되는 복합적인 문제해결 능력, 합리성, 수학적 사고력 등을 키우기 위한 수학적인 기본 개념을 이해하는지 측정하는데 주안점을 두었다.

(2) 문제해설

자연계 오후 2-의예과의 문제1은 공간도형과 미분에서 핵심적인 내용을 이해하고 있는지 측정하는 문제이다.
[문제1-1]은 원의 방정식을 숙지하고 활용하여 직사각형의 한 변의 길이에 관한 다항함수를 유도하고, 이 다항함수의 미분을 통해 극댓값을 구할 수 있는지 측정하는 문제이다.
[문제1-2]는 다항함수를 이용하여 미분을 이용하여 극댓값을 구하고 이를 이용하여 간단한 삼차 방정식을 풀 수 있는지 측정하는 문제이다.
[문제1-3]은 정사영의 개념을 이해하여 주어진 입체의 정사영을 구하고 다양한 평면도형의 넓이를 구할 수 있는지 측정하는 문제이다.
이 문제들은 고등학교 교과과정에서 중요하게 다루어지는 도형들의 개념을 잘 이해하고 방정식과 다항함수의 미분을 활용하면 해결할 수 있다.

2. 종합 평가 기준

문항	배점	세부 평가 기준	세부 배점
1	40	부피가 최대인 직육면체의 밑면이 정사각형임을 보였는가?	10
		원의 방정식을 이용하여 직육면체의 부피를 한 모서리의 길이에 관한 함수로 나타내었나?	10
		다항함수의 도함수를 이용하여 극댓값을 구했는가?	20
2	30	삼각형의 닮음을 이용하여 직육면체의 부피를 한 모서리의 길이에 관한 함수로 나타내었나?	10
		주어진 h에 대하여 다항함수의 도함수를 이용하여 부피의 극댓값을 구했는가?	10
		$h>6$인 범위에서 삼차방정식의 해를 구했는가?	10
3	30	주어진 입체도형의 정사영의 형태를 알고 있는가?	10
		타원의 방정식과 접선을 이용하여 원뿔의 정사영으로 만들어지는 삼각형의 넓이를 정확히 구했는가?	10
		정사영의 나머지 부분의 넓이를 정확히 구했는가?	10

3. 출제근거

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	수학 Ⅰ	황선욱 외	좋은책 신사고	2014	p146~p148, p80~p83
	미적분 Ⅰ	우정호 외	동아출판	2014	p142~p150
	기하와 벡터	정상권 외	금성출판사	2014	p18~p23, p136~p141
기타					

자 연 계	한양대학교 2019학년도 신입학전형 수시 논술고사 **출제 의도 및 평가 지침**	오후(2) 의예-2번

1. 출제 의도 및 문제 해설

고등학교 교육과정을 정상적으로 이수한 학생은 누구나 해결할 수 있는 문제를 고등학교 교과과정의 범위에서 출제하였다. 특히, 수학의 개념과 원리를 정확히 이해하고 수학적 사고력을 바탕으로 논리적으로 문제를 해결할 수 있는 능력을 측정하는데 주안점을 두고 출제를 하였다. 그리고 4차 산업혁명 시기에 절실히 요구되는 수학적 사고력, 추론 능력을 키우기 위한 수학의 기본 개념과 중요한 정리들의 의미를 이해하고 있는지 측정하고자 하였다.

자연계 오후2-의예과 2번 문제는 미분, 적분 및 극한값에서 핵심적인 내용을 이해하고 있는지를 측정하는 문제이다. 문항 1은 미분과 적분을 이해하여 부등식을 보이고, 수열의 합에 관한 부등식 증명에 적용할 수 있는지 측정하는 문제이다. 문항 2는 미분과 적분의 성질을 숙지하고, 주어진 조건을 이용하여 주어진 적분값을 구할 수 있는 능력을 측정하는 문제이다. 문항 3은 수열의 극한을 이해하고, 극한의 성질을 이용하여 새로운 극한값을 구할 수 있는 능력을 측정하는 문제로써 수열의 극한에서 전형적인 문제이다.

의예과 문제 2는 고등학교 수학교과에서 중요하게 다루어지는 수열의 극한, 미분과 적분에 관련된 종합적인 문제이고, 이를 통해 학생들이 학교교육을 성실히 이수했는지를 평가하고자 출제하였다. 이 문제를 통하여 수열의 극한, 정적분을 구하기 위한 부분적분과 부분 분수로 바꾸어 적분할 수 있는 문제 해결능력과 수학적적 이해력을 측정할 수 있다.

2. 종합 평가 기준

문항	배점	세부 평가 기준	세부 배점
1	30	$x\ln x \ge x-1$을 잘 보였는가?	15
		부등식 $x\ln x \ge x-1$을 이용하여 $\sum_{n=1}^{k} a_n \ln a_n \ge \sum_{n=1}^{k} a_n \ln b_n$을 잘 보였는가?	15
2	40	주어진 조건 (iv)를 변형하여 $f(x)f'(x) = 2\{g(x)\}^3 g'(x)$을 구했는가?	10
		주어진 적분을 변형하여 $\int_0^{\pi} \frac{3f(x)g'(x)}{\{f(x)\}^2 g(x)}dx - \frac{2}{15}$를 구했는가?	15
		적분값 $\int_0^{\pi} \frac{3f(x)g'(x)}{\{f(x)\}^2 g(x)}dx$와 구하고자 하는 답을 잘 구했는가?	15
3	30	$c_n = \frac{b_n}{a_n}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty} c_n = 1$임을 관찰하였는가?	10
		로그함수 $\ln x$의 $x=1$에서의 미분계수를 이용하여 $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln c_n}{\ln\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}c_n\right)} = \frac{3}{2}$을 구했는가?	10
		극한값 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}a_n + \frac{2}{3}b_n\right)^n$을 잘 구했는가?	10

3. 출제 근거

이 문제는 고등학교에서 고교과정의 수학을 정상적으로 이수한 학생들은 충분히 해결할 수 있는 문제들로 구성되었으며, 교과서 미적분I과 미적분II의 주요 내용을 다루고 있다. 3개의 소문항은 교과서의 내용과 다음과 같이 연계되며, 모든 교과서에서 공통으로 다루는 내용만으로 구성되어 있다.

교과서 미적분I (교학사 김창동 외 14인)−수열의 극한−극한값의 계산 p.18−26
교과서 미적분I (비상교육 김원경 외 11인)−수열의 극한−수열의 극한값의 계산 p.15−23
교과서 미적분II (천재교육 이준열 외 9인)−미분법−여러 가지 미분법 p.118−124
교과서 미적분II (천재교육 이준열 외 9인)−적분법 p.153−188

한양대학교

답안지 (자연계)

답안지 바코드

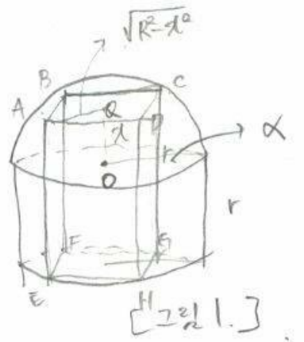
지원학과	
성 명	
수험번호	
생년월일 (예:000301)	

수험생 유의사항

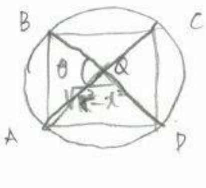
1. 답안지는 검정색 펜(볼펜, 연필, 샤프)으로 작성하십시오. (빨강색이나 파랑색 사용금지)
2. 답안지를 수정할 경우 지우개(연필, 샤프 사용 시)를 사용하거나 두 줄을 긋고(볼펜 사용 시) 그 위에 재 작성하십시오.
3. 답안과 관련 없는 표현이나 표시를 한 답안지는 "0"점 처리 됩니다.
4. 본 고사는 답안지 1장 이내에 답안을 작성하여야 합니다. 답안지 교체는 가능하지만 기존 답안지 제출은 불가합니다.

문제 1번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

1.



[그림 1.]



[그림 2]

직육면체의 꼭짓점이 모두 로켓이 닿지 않으면 더 큰 부피를 잡을 수 있으므로, 모두 로켓기 닿아야 한다.

O 에서 □ABCD 에 내린 수선의 발 Q.

화물칸의 평면 α와 인공위성의 윗면 사이의 거리를 x 라 하자. $(0 \le x \le r)$

$\overline{OA} = r$ 이고, $\triangle OQA$는 직각삼각형이므로, $\overline{AQ} = \sqrt{r^2-x^2}$

$\angle AQB = \theta$ 라 하면, $\square ABCD = 2(r^2-x^2)\sin\theta$ 가 된다. $(0<\theta<\pi)$

$0<\theta<\pi$ 에서 $\sin\theta$ 의 최댓값은 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 일때 1이므로, ⋯①

□ABCD 의 최댓값은 $2(r^2-x^2)$ 이다.

위 그림에서 인공위성 높이는 $r+x$ 이므로, 부피를 $f(x)$ 라 할때

$f(x) = 2(r^2-x^2)(r+x)$ 라 하자. $(0\le x\le r)$ 이를 미분하면,

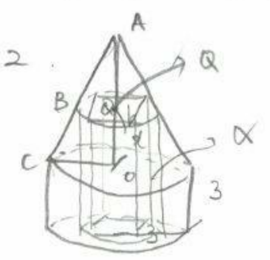
$f'(x) = -2(3x-r)(x+r)$ 이므로,

$x = \frac{r}{3}$ 에서 극댓값을 갖는다.

$f(0) = 2r^3$, $f(r) = 0$ 이고, $f\left(\frac{r}{3}\right) = \frac{64}{27}r^3$ 이므로.

정의역 $[0, r]$ 에서 $f(x)$의 최댓값은 $\frac{64}{27}r^3$ 이다.

2.



우선, 높이 h 인 로켓에 내접할 수 있는 인공위성 부피의 최댓값을 생각하자.

1 과 같이 화물칸의 평면 α와 인공위성 윗면 사이 거리를 x라 하자.

그림 3.

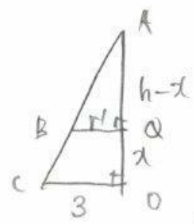


그림 4

$\triangle ABQ \sim \triangle ACO$ 이므로, 닮음에 의해

$\overline{BQ} = r' = 3 - \frac{3}{h}x$ ⋯②

1-① 과 같은 방법으로, 인공위성의 윗면 넓이는

$2\left(3-\frac{3}{h}x\right)^2$ 이다. 같은 방법으로 $f(x)$를 정의하면,

$f(x) = 2\left(3-\frac{3}{h}x\right)^2(3+x)$ 이다. $(0\le x\le h)$ ⋯③

$f'(x) = 2\{3x-(h-6)\}(x-h)\cdot h^2$ 이므로,

$x = \frac{h-6}{3}$ 에서 극댓값을 갖는다.

$\boxed{h<6}$: $x\in[0, h]$에서 $f'(x) < 0$ 이므로, $x = 0$ 일 때 최대이다.

그림 5.

이 때의 최댓값은 인공위성이 로켓에 내접하는 상황이므로,

밑면이 반지름 3인 원, 높이 3 인 원기둥에 내접할 때이다. (그림5)

1-① 과 같이 계산하면,

그때의 부피는 $2\cdot 3^3 = 54$ 이므로, 64 보다 작다

$\boxed{6<h}$: $x = \frac{h-6}{3}$ 이므로, $x \in [0, h]$ 이다.

이를 $f(x) = 64$ 에 대입하여 h 를 구하면,

$h = 6+3\sqrt{5}$ 이다.

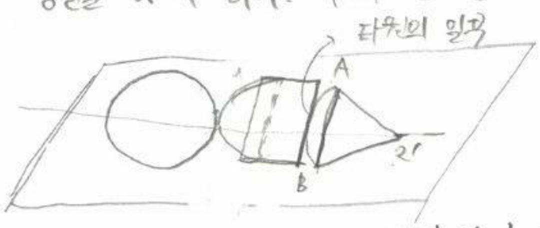
$h>6$ 에서는 최대부피가 $\underbrace{\left(\frac{6}{h}+2\right)^2\left(1+\frac{h}{3}\right)}_{=V(h)}$ 로 나타난다.

$h\in[6, 6+3\sqrt{5}]$ 에서 $V(h)$ 는 증가하므로,

$6+3\sqrt{5}$

3. □ABCD 의 대각선이 교차하는 점을 P 라 하자.

반구의 중심을 Q, 구의 중심을 R 이라 하자. 그리고, △ABE 포함하는 평면을 α 라 하자. $\overline{PQR}$ 을 먼저 α에 정사영하자.



그리고 각각의 대응점은 P', Q', R' 이라하자.

위와 같이 정사영 된다.

$\overline{AD}$, $\overline{BC}$ 의 중점을 M, N이라 하고, △AMN, △ABE의 이면각 θ 라하자. $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\triangle EMN \times \frac{\sqrt{3}}{2}$ ⋯①

□ABCD 내접원을 C_1 이라 하면,

$C_1 \times \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}C_1$ ⋯②

한양대학교

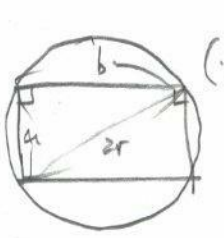
답안지 (자연계)

답안지 바코드

지원학과	
성 명	
수험번호	
생년월일 (예:000301)	

문제 1번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

1. 원에 내접하는 직사각형의 넓이가 최대 $2r^2$ 이다. (반지름 r)



$(\because a^2+b^2=4r^2 \geq 2ab$ (산술기하 부등식) $\Rightarrow a=b=\sqrt{2}r$ 일 때 $ab=2r^2)$

이때, 원우밑면에서 h $(0\leq h\leq r)$ 만큼 떨어진 평면에 단면원의 면이 오게 하면 반지름이 $\sqrt{r^2-h^2}$ 이므로 부피의 최댓값은

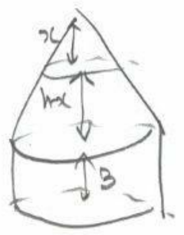
$$V(h)=2(\sqrt{r^2-h^2})^2\times(r+h)$$
$$=2(-h^3-rh^2+r^2h+r^3)$$
$$\therefore V'(h)=2(-3h^2-2rh+r^2)$$
$$=2(-3h+r)(h+r)=0$$

인 h는 $\frac{r}{3}$일 때 최대이다

$$\therefore V\left(\frac{r}{3}\right)=2\left(r^2-\frac{r^2}{9}\right)\left(\frac{4}{3}r\right)=\frac{64}{27}r^3$$

(이때, $h>r$이면 자명히 $h=r$일 때 더 크다.

2. 위와 같은 방법으로 삼각뿔을 꼭짓점에서 x $(0\leq x\leq h)$ 만큼 떨어진 평면에 단면원이 오기 위해선 반지름이 $\frac{3x}{h}$ 이므로 부피의 최댓값은



$$V(x)=2\left(\frac{3x}{h}\right)^2(h+3-x)$$
$$=\frac{18}{h^2}x^2(h+3-x)$$
$$\Rightarrow V'(x)=\frac{18}{h^2}(-3x^2+2(h+3)x)=0$$

인 x는 $x=\frac{2(h+3)}{3}$ 일 때 가능하다.

① $h<6$인 경우 $\frac{2(h+3)}{3}>h$ 이므로 $x\in[0,h]$ 에서 $V(x)$는 증가한다.
그러므로 가능한 부피 최댓값은 $V(h)=18\cdot3=54$ 이므로 불가능

② $h>6$인 경우 $x=\frac{2(h+3)}{3}$ 일 때 최대 이므로

$$V\left(\frac{2(h+3)}{3}\right)=\frac{18}{h^2}\left(\frac{2(h+3)}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}(h+3)\right)=\frac{8(h+3)^3}{3h^2}$$

이 함수를 $f(h)$라 할 때

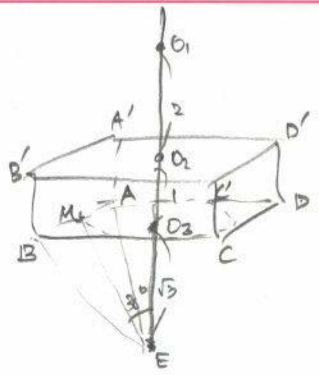
$$f'(h)=\frac{8}{3}\frac{h^2\cdot3(h+3)^2-2h(h+3)^3}{(h^2)^2}=\frac{8}{3}\cdot\frac{(h+3)^2(h-6)}{h^3}$$

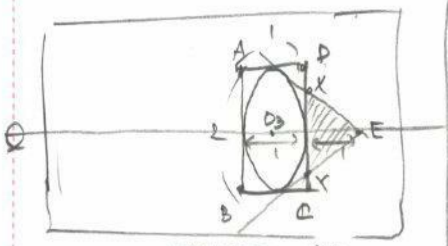
이므로 $h>6$에서 $f(h)$는 증가함수이다.
그러므로 $f(h)=64$일 때 h가 최소의 h 값이다.

$$\frac{8(h+3)^3}{3h^2}=64 \Leftrightarrow (h+3)^3=24h^2$$
$$\Leftrightarrow h^3-15h^2+27h+27=0$$
$$\Leftrightarrow (h-3)(h^2-12h-9)=0$$

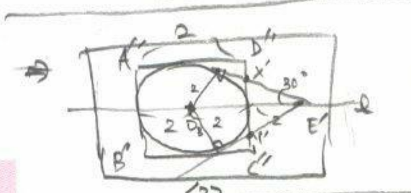
$h>6$ 에서의 근는 $h=6+3\sqrt{5}$ 뿐이다. $\therefore h_{min}=6+3\sqrt{5}$

3. 구의 중심 O_1, 단구 중심 O_2, AC와 BD 교점 O_3라 하자.
ABCD에 대응되는 직육면체 윗면을 A'B'C'D' 라 하자.

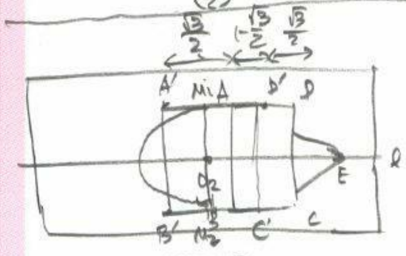




평면 ABE <1>

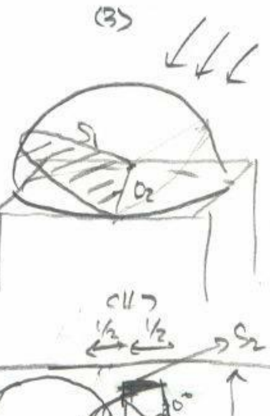


<2>

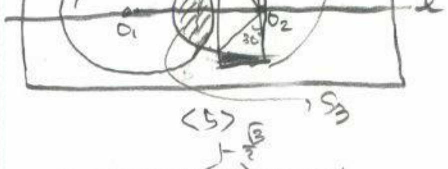


평면 S

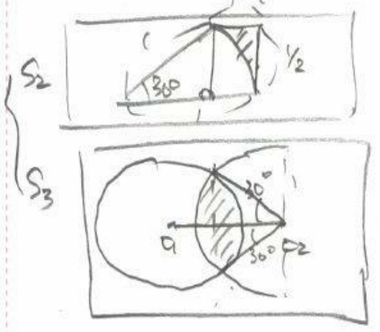
(3)



<4>



<5>



이때, $O_1O_2O_3E$로 지나는 직선 l과 $\triangle ABE$는 30°를 이룬다.

□ABCD와 선분 O_3-E만 S위에 사영시키면 <1>과 같다. 이때, 원 O_3는 □ABCD에 접하는 타원이므로 l 방향으로 2배 확장시 원으로 만들어 <2>와 같다.

이때, $\triangle X'Y'E'=2\times2\tan30^\circ=\frac{4}{\sqrt{3}}$

이므로 $\triangle XYE=\frac{1}{2}\triangle X'Y'E'=\frac{2}{\sqrt{3}}$이다.

(단,)

□A'B'C'D' 에서 S에 사영시 <3>과 같다.

이때, $AA'=1\times\cos60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$A'D'=2\times\cos30^\circ=1$

임을 알 수 있다.

O_2는 □A'B'C'D'의 중심이다.

이때, 단구 O_2는 직사영 밑부분에 수직한 반원 S_1만 고려하면 된다.

S_1과 구 O_1을 정사영시킨 그림은 <5>와 같다.

색칠한 넓이를 S_2라 할 때,

$$S_2=2\times\left(\frac{1}{4}\left(2-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\pi\cdot1^2\cdot\frac{1}{12}\right)$$
$$=\left(1-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)-\frac{\pi}{6}$$

또한, $O_1O_2=2\times\cos30^\circ=\sqrt{3}$ 이므로

원 O_1과 원 S_1는 겹치는 부분이

$$S_3=2\times\left\{\pi\cdot1^2\cdot\frac{1}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right\}$$
$$=\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\therefore$ 총넓이는

$$\triangle XYE+□M_1M_2CD+S_2+\frac{1}{2}\pi\cdot1^2$$
$$+\pi\cdot1^2-S_3$$
$$=\frac{2}{3}\sqrt{3}+2\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$+\left(1-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)-\frac{\pi}{6}+\frac{3}{2}\pi+\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$=2+\frac{11}{12}\sqrt{3}+\frac{10}{6}\pi$$

$\frac{1}{4}$ $\frac{3+8}{12}$

문제 2번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

1.

$f(x) = x\ln x \ (x>0)$이라 하면 $f(x)$는 미분 가능하며 도함수는 다음과 같다.

$$f'(x) = 1\cdot\ln x + x\cdot\frac{1}{x} = \ln x + 1.$$

$f'(x)$ 또한 미분가능하므로 $f''(x)$가 존재하며 다음과 같다.

$$f''(x) = \frac{1}{x}$$

$\frac{1}{x} > 0$ 이므로 $f(x)$는 아래로 볼록이다.

한편 $f(x)$는 $(1, 0)$을 지나고, $f'(1) = 1$이므로 $f(x)$의 $x=1$에서 접선은 $y = x-1$이다. 아래로 볼록인 함수는 항상 접선보다 작지 않으므로 $x\ln x \ge x-1$이 성립한다.

$\sum_{n=1}^{k} a_n = \sum_{n=1}^{k} b_n$이므로 $\sum_{n=1}^{k}(a_n - b_n) = 0$, 즉 $\sum_{n=1}^{k} b_n\left(\frac{a_n}{b_n} - 1\right) = 0$이다.

$x\ln x \ge x-1$에서 $x = \frac{a_n}{b_n}$일 때 $\frac{a_n}{b_n}\ln\frac{a_n}{b_n} \ge \frac{a_n}{b_n} - 1$이 성립한다. 따라서 다음 부등식이 성립한다.

$$\sum_{k=1}^{n} b_n\left(\frac{a_n}{b_n} - 1\right) \le \sum_{k=1}^{n} b_n \frac{a_n}{b_n}\ln\frac{a_n}{b_n}$$

$$0 \le \sum_{k=1}^{n} a_n(\ln a_n - \ln b_n)$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_n \ln b_n \le \sum_{k=1}^{n} a_n \ln a_n$$

따라서 주어진 부등식이 성립한다.

2.

$F(x) = \{f(x)\}^2 - \{g(x)\}^4$라 하면 $F(x) = 4$이므로 도함수는 0이다. $f(x)$, $g(x)$ 모두 미분가능하므로 다음이 성립한다.

$$2f(x)f'(x) - 4\{g(x)\}^3 g'(x) = 0.$$

$$\{g(x)\}^3 g'(x) = \frac{1}{2} f(x) f'(x) \quad \cdots ①$$

이 때, 다음이 성립한다.

$$\frac{3f(x)g'(x) - f'(x)g(x)}{\{f(x)\}^2 g(x)} = \frac{3f(x)\{g(x)\}^3 g'(x) - f'(x)\{g(x)\}^4}{\{f(x)\}^2\{g(x)\}^4}$$

①과 $\{g(x)\}^4 = \{f(x)\}^2 - 4$에 의해 위 식은 다음과 같다.

$$\frac{3f(x)\cdot\frac{1}{2}f(x)f'(x) - f'(x)\left(\{f(x)\}^2 - 4\right)}{\{f(x)\}^2\left(\{f(x)\}^2 - 4\right)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\{f(x)\}^2 + 4}{\{f(x)\}^2\left(\{f(x)\}^2 - 4\right)} f'(x)$$

$f(x) = u$라 하면 $f'(x) = \frac{du}{dx}$이고 $x=0$, $x=\pi$일 때 $u=3$, $u=5$이므로 구하는 적분은 다음과 같다.

$$\int_3^5 \frac{\frac{1}{2}u^2 + 4}{u^2(u^2-4)}\,du$$

$$= \int_3^5 \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{u^2-4} + \frac{4}{u^2(u^2-4)}\right)du$$

$$= \int_3^5 \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{u^2-4} + \left(\frac{1}{u^2-4} - \frac{1}{u^2}\right)\right)du$$

$$= \int_3^5 \left(\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{u^2-4} - \frac{1}{u^2}\right)du$$

$$= \int_3^5 \left(\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{4}\left(\frac{1}{u-2} - \frac{1}{u+2}\right) - \frac{1}{u^2}\right)du$$

$$= \left[\frac{3}{8}\ln\left(\frac{u-2}{u+2}\right) + \frac{1}{u}\right]_3^5$$

$$= \frac{3}{8}\left(\ln\left(\frac{3}{7}\right) - \ln\left(\frac{1}{5}\right)\right) + \frac{1}{5} - \frac{1}{3} = \frac{3}{8}\ln\left(\frac{15}{7}\right) - \frac{2}{15}$$

3.

$a_n = 1 + x_n$, $b_n = 1 + y_n$이라 한다. $\ln x$는 연속함수이므로 다음이 성립한다.

$$\lim_{n\to\infty} n\ln(1+x_n) = \ln 27$$

따라서 다음이 성립한다.

$$\lim_{n\to\infty} n\ln(1+x_n)\cdot\frac{1}{n} = \ln(27)\times 0 = 0$$

즉, $\lim_{n\to\infty}\ln(1+x_n) = 0$이며 $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$이다. 이때 다음이 성립한다.

$$\lim_{n\to\infty} n x_n = \lim_{n\to\infty} n\ln(1+x_n)\cdot\frac{x_n}{\ln(1+x_n)} = \ln(27)\times 1 = \ln(27)$$

같은 방법으로 $\lim_{n\to\infty} n y_n = \ln(64)$이다.

구하는 극한은 다음과 같다.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}a_n + \frac{2}{3}b_n\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{3}x_n + \frac{2}{3}y_n\right)^n = \lim_{n\to\infty} e^{\left(\frac{1}{3}x_n n + \frac{2}{3}y_n n\right)\frac{\ln\left(1+\frac{1}{3}x_n+\frac{2}{3}y_n\right)}{\frac{1}{3}x_n+\frac{2}{3}y_n}}$$

$$= e^{\left(\frac{1}{3}\ln 27 + \frac{2}{3}\ln 64\right)\times 1} = e^{\ln 48} = 48$$

문제 2번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

1. $x\ln x \geq x-1$, $x>0$ 이므로,

$\ln x > 1-\frac{1}{x}$ 을 보여도 충분하다.

i) $1 \leq x$

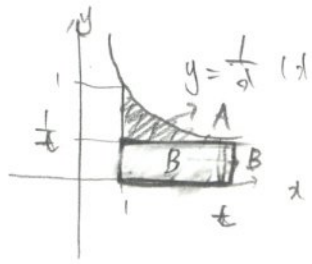


그림 1.

$A = \ln t = \int_1^t \frac{1}{x}dx$ …①

$B = 1-\frac{1}{t} = \frac{1}{t}(t-1)$ …②

위 그래프에서 굵게 칠해진 영역이 B 이고, $x=1$. $x=t$. $y=\frac{1}{x}$ 로 둘러싸인 영역이 B일 때 A가 B 를 포함한다. 따라서, $1-\frac{1}{x} < \ln x$ 이므로,

ii) $x<1$

$x\ln x \geq x-1$ 이다

$f(x) = x\ln x - x + 1$ 이라 하자. $(0<x<1)$

$f'(x) = \ln x$ 인데, $x<1$ 이므로, $f'(x)<0$ … ③

(i) 에서 $f(1) \geq 0$ 임을 증명하였다 … ④

③. ④ 에 의해, $0<x<1$에서 $f(x)>0$ 임을 알수 있다.

$\therefore x\ln x \geq x-1$

$\sum \frac{a_n}{b_n}\ln\left(\frac{a_n}{b_n}\right)\cdot b_n$ 을 생각하자. …⑤

$a_n, b_n \in \mathbb{N}$ 이므로, $\frac{a_n}{b_n}>0$ 인 양수실수이다.

$x\ln x \geq x-1$ 이므로, $\frac{a_n}{b_n}\ln\left(\frac{a_n}{b_n}\right) \geq \frac{a_n}{b_n}-1$ 임을 알수 있다.

이를 ⑤에 대입하면, $\sum_{n=1}^{k}\frac{a_n}{b_n}\ln\left(\frac{a_n}{b_n}\right)\cdot b_n \geq \sum_{n=1}^{k}(b_n-a_n) = 0$ 이므로,

$\sum_{k=1}^{n} a_n\ln b_n \leq \sum_{k=1}^{n} a_n\ln a_n$ 임을 알수 있다.

2. $\int_0^\pi \frac{3f(x)g'(x)}{f(x)^2 g(x)} = A$, $\int_0^\pi -\frac{f'(x)g(x)}{f(x)^2 g(x)} = B$ 라 하며,

A+B를 계산하자.

iv) 에 의해, $2f(x)f'(x) = 4g^3(x)g'(x)$ 이므로, $g'(x) = \frac{f(x)f'(x)}{2g^3(x)}$ …⑥

⑥ 을 A에 대입하면, $A = \int_0^\pi \frac{3}{2}f'(x)\frac{1}{g^4(x)}dx = \int_0^\pi \frac{3}{2}\frac{f'(x)}{f(x)^2-4}dx$ 이다. …⑦

by⑦

$A = \frac{3}{8}\int_0^\pi \frac{f'(x)}{f(x)-2} - \frac{f'(x)}{f(x)+2}dx$. 이다.

$[0,\pi]$ 에서 $g(x) \neq 0$ 이므로, $f(x) \neq \pm 2$ 이다.

따라서, $[0,\pi]$ 에서 $\frac{1}{f(x)-2}$, $\frac{1}{f(x)+2}$ 모두 연속이므로,

정적분 가능하다.

$A = \frac{3}{8}\left[\ln\left|\frac{f(x)-2}{f(x)+2}\right|\right]_0^\pi$ 이므로, $A = \frac{3}{8}\ln\frac{15}{7}$ …①

$B = \int_0^\pi \frac{f'(x)}{-f(x)^2}dx = \left[\frac{1}{f(x)}\right]_0^\pi$ 이므로, $B = -\frac{2}{15}$ …②

$\therefore \frac{3}{8}\ln\frac{5}{7} - \frac{2}{15}$

3.

$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ 임을 이용하자. …⑦

$\lim_{n\to\infty}\left(1+(a_n-1)\right)^{\frac{1}{a_n-1}n(a_n-1)} = 27$

이므로, $\lim_{n\to\infty}e^{n(a_n-1)} = 27$ 임을 알수 있다. …(*)

$\therefore \lim_{n\to\infty}n(a_n-1) = \ln 27 = 3\ln 3$ … ①

같은 방법으로, b_n 에 대해 (*) 를 반복하면,

$\lim_{n\to\infty}n(b_n-1) = \ln 64 = 3\ln 4$ … ②

$T = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3}a_n+\frac{2}{3}b_n-1\right)^{\frac{1}{\frac{1}{3}a_n+\frac{2}{3}b_n-1}n\left(\frac{1}{3}a_n-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}b_n-\frac{2}{3}\right)}$ 를 생각하자.

⑦ 에 의해, $T = e^{\frac{1}{3}n(a_n-1)+\frac{2}{3}n(b_n-1)}$ 이고, ①.② 를 대입하면,

$T = e^{\ln 3+2\ln 4} = 3\cdot 4^2 = 48$