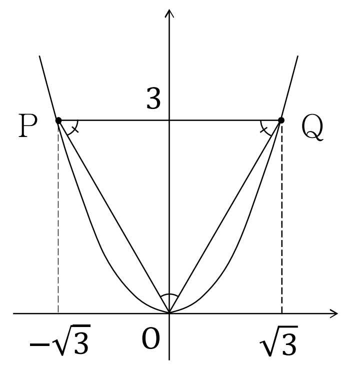
한양대학교 2019학년도 신입학전형 수시

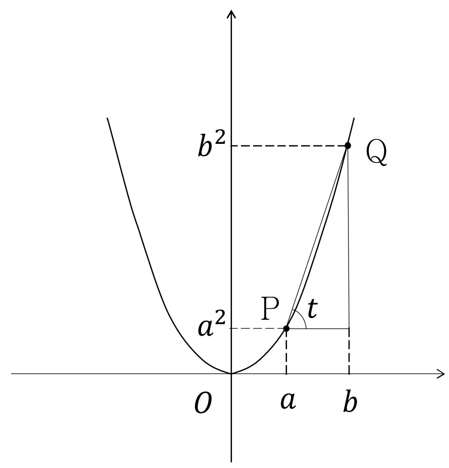
자 연 계 | **논 술 예 시 답 안** | 오후(2)-1번

[문제 1]



1. 원점 $O(0,0)$를 지나고 기울기가 $\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$인 직선과 포물선 $y=x^2$이 만나는점 을 각각 P, Q라 하면, $P(\sqrt{3},3)$, $Q(-\sqrt{3},3)$이고 $\angle QOP=\dfrac{\pi}{3}$ 이므로 삼각형 QOP는 정삼각형이다.

   한 변 OP의 길이는 $2\sqrt{3}$이므로 이 정삼각형의 넓이는 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot(2\sqrt{3})^2=3\sqrt{3}$ 이다.



2. 오른쪽 그림에서 $\tan t=\dfrac{b^2-a^2}{b-a}=b+a\ \left(-\dfrac{\pi}{2}<t<\dfrac{\pi}{2}\right)$이다.

   따라서 $\overline{PQ}=\sqrt{(b-a)^2+(b^2-a^2)^2}=|b-a|\cdot\sqrt{1+(b+a)^2}$

   $=|\tan t-2a|\cdot\sqrt{1+\tan^2 t}=|(\tan t-2a)\cdot\sec t|$

   이다.

3. 문제 2번에 의해 점 $P(\sqrt{2},2)$를 지나고 기울기가 $\tan t\ \left(-\dfrac{\pi}{2}<t<\dfrac{\pi}{2}\right)$인 직선이 $y=x^2$과 만나는 점을 Q라 하면 $\overline{PQ}=|(\tan t-2\sqrt{2})\cdot\sec t|$ 이다.

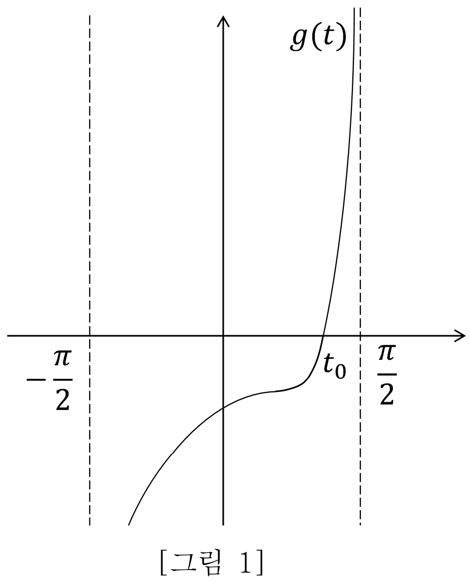
   $g(t)=(\tan t-2\sqrt{2})\cdot\sec t$ 라 하면, $-\dfrac{\pi}{2}<t<\dfrac{\pi}{2}$ 에서 $g(t)$는 연속함수이다.

   $g'(t)=\sec t\cdot(2\tan^2 t-2\sqrt{2}\tan t+1)=\sec t(\sqrt{2}\tan t-1)^2\ge 0$ 로부터

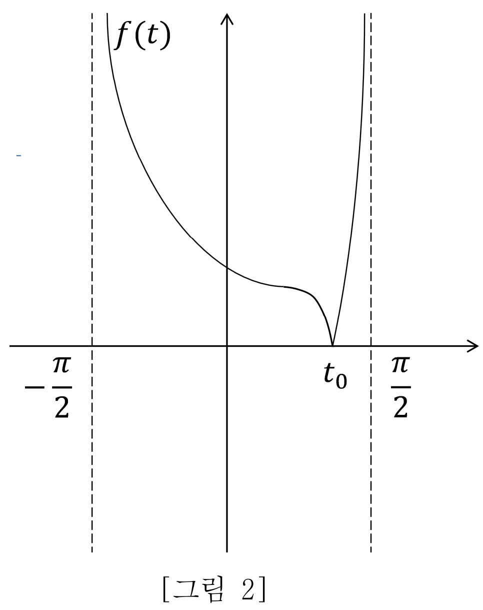
   $g(t)$는 증가함수 임을 알 수 있고, $\displaystyle\lim_{t\to\frac{\pi}{2}-}g(t)=\infty$, $\displaystyle\lim_{t\to-\frac{\pi}{2}+}g(t)=-\infty$ 로부터

   $g(t)$의 그래프는 [그림 1]과 같다.

   $f(t)=|g(t)|\ (=\overline{PQ})$ 라 하면, $f(t)$ 역시 연속함수이고, 그래프는 [그림 2]와 같다.



[그림 1]



[그림 2]

$y=x^2$ 위의 임의의 점 Q에 대해 선분 PQ의 기울기가 $\tan t$이면 $\overline{\mathrm{PQ}}=f(t)$ 이다.

따라서 점 P를 꼭짓점으로 하고 다른 두 꼭짓점 R, S도 $y=x^2$ 위에 있는 정삼각형 PRS가 있기 위해서는,

즉, $\overline{\mathrm{PS}}=\overline{\mathrm{PR}}$이고, $\angle \mathrm{RPS}=\frac{\pi}{3}$인 점 R, S가 $y=x^2$ 위에 있기 위해서는,

$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$안에 어떤 두 점 r, s가 있어 $f(r)=f(s)$ 이고, 다음 조건 중 하나를 만족해야 한다.

(1) $t_0<s<r$ 이고 $|r-s|=\frac{\pi}{3}$, 또는

(2) $s<t_0<r$ 이고 $|r-s|=\frac{2\pi}{3}$, 또는

(3) $s<r<t_0$ 이고 $|r-s|=\frac{\pi}{3}$.

여기서 t_0는 $f(t_0)=0$을 만족하는 점 (즉, $\tan t_0=2\sqrt{2}$ = 점 P에서의 접선의 기울기)이다.

$f(r)=f(s)$이고 위 세 조건중 하나를 만족하는 r, s가 있다면

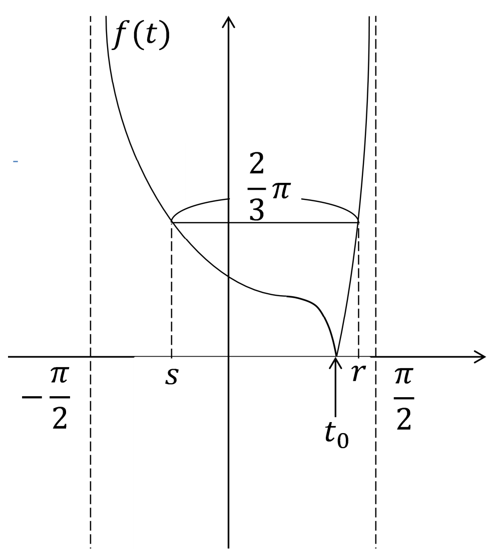
점 P를 지나고 기울기가 각각 $\tan r$, $\tan s$인 선분이 $y=x^2$와 만나는 점 R, S에 대해

삼각형 PRS가 구하는 정삼각형이 된다.

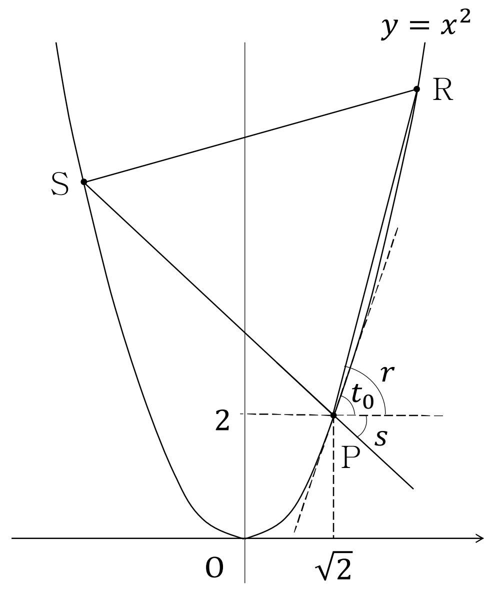
함수 $f(t)$의 그래프로부터 이러한 두 점 r, s는 유일하게 존재함을 알 수 있다.

([그림 3]에서 조건 (1), (3)의 경우는 없고, 조건 (2)의 경우만 해당함을 알 수 있다.)

따라서 점 P를 한 꼭짓점으로 하고 다른 두 꼭짓점도 $y=x^2$에 있는 정삼각형은 1개 존재한다. ([그림 4] 참조).



[그림 3]



[그림 4]

한양대학교 2019학년도 신입학전형 수시		
자 연 계	**논 술 예 시 답 안**	오후(2)-2번

[문제 2]

1. $b=e^2a$로 두면, 선분 AP의 방정식과 선분 PB의 방정식은 각각

$$y=\frac{\frac{1}{t}-\frac{1}{a}}{t-a}(x-a)+\frac{1}{a}=-\frac{1}{at}(x-a)+\frac{1}{a}\ \ (a\le x\le t),\ y=-\frac{1}{bt}(x-t)+\frac{1}{t}\ \ (t\le x\le b)$$

이다. 따라서

$$S_1=\int_a^t\left\{-\frac{1}{at}(x-a)+\frac{1}{a}-\frac{1}{x}\right\}dx=\left[-\frac{1}{2at}(x-a)^2+\frac{x}{a}-\ln x\right]_a^t$$
$$=-\frac{1}{2at}(t-a)^2+\frac{t}{a}-\ln t-1+\ln a=\frac{1}{2}\left\{\frac{t}{a}-\frac{a}{t}+2\ln\frac{a}{t}\right\}.$$

비슷하게

$$S_2=\frac{1}{2}\left\{\frac{b}{t}-\frac{t}{b}+2\ln\frac{t}{b}\right\}$$

이 성립하고, 이로부터

$$S_1+S_2=\frac{1}{2}\left\{(\frac{1}{a}-\frac{1}{b})t+\frac{b-a}{t}+2\ln\frac{a}{b}\right\}=\frac{1}{2}\left\{(b-a)(\frac{t}{ab}+\frac{1}{t})+2\ln\frac{a}{b}\right\}$$

을 얻는다. 산술평균과 기하평균의 관계에 의해

$$S_1+S_2\ge(b-a)\frac{1}{\sqrt{ab}}+\ln\frac{a}{b}=\frac{(e^2-1)a}{ea}+\ln\frac{a}{e^2a}=\frac{e^2-1}{e}-2$$

이 성립하고 등호는 $t=\sqrt{ab}=ea$일 때 성립한다. 따라서 S_1+S_2의 최솟값은 $\frac{e^2-1}{e}-2$이다.

2. $\lim_{n\to\infty}(a_n)^n=2019$이므로, $\lim_{n\to\infty}n\ln a_n=\ln 2019$이고 $\lim_{n\to\infty}a_n=1$ 이다.

그런데, $2019=\lim_{n\to\infty}(a_n)^n=\lim_{n\to\infty}[1+(a_n-1)]^n=\lim_{n\to\infty}[1+(a_n-1)]^{\frac{1}{a_n-1}n(a_n-1)}$ 이다.

양변에 로그를 취하면,

$$\ln 2019=\lim_{n\to\infty}\ln[1+(a_n-1)]^{\frac{1}{a_n-1}\cdot n(a_n-1)}=\lim_{n\to\infty}n(a_n-1)\ln[1+(a_n-1)]^{\frac{1}{a_n-1}}$$

을 얻는다.

$\lim_{n\to\infty}(1+(a_n-1))^{\frac{1}{a_n-1}}=e$이므로, $\lim_{n\to\infty}\ln[1+(a_n-1)]^{\frac{1}{a_n-1}}=1$이다.

따라서 구하는 극한값은 $\lim_{n\to\infty}n(a_n-1)=\ln 2019$ 이다.

3. $\{f(x)\}^2-\{g(x)\}^4=4$ 를 미분하면

$$\Rightarrow\ 2f(x)\,f'(x)-4\{g(x)\}^3g'(x)=0 \quad \Rightarrow\ \frac{g'(x)}{f(x)}=\frac{f'(x)}{2\{g(x)\}^3} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

$$\int_0^{\pi}\frac{3f(x)g'(x)-f'(x)g(x)}{\{f(x)\}^2g(x)}dx=\int_0^{\pi}\left[\frac{3f(x)g'(x)}{\{f(x)\}^2g(x)}-\frac{f'(x)g(x)}{\{f(x)\}^2g(x)}\right]dx$$

$$=\int_0^{\pi}\left[\frac{3f(x)g'(x)}{\{f(x)\}^2g(x)}-\frac{f'(x)}{\{f(x)\}^2}\right]dx=\int_0^{\pi}\frac{3f(x)g'(x)}{\{f(x)\}^2g(x)}dx-\int_0^{\pi}\frac{f'(x)}{\{f(x)\}^2}dx$$

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{f'(x)}{\{f(x)\}^2}dx=\left[-\frac{1}{f(x)}\right]_0^{\pi}=-\left(\frac{1}{f(\pi)}-\frac{1}{f(0)}\right)=-\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{15}$

(2) ①의 관계식에 의해 다음 식을 얻는다.

$$\int_0^{\pi}\frac{3f(x)\,g'(x)}{\{f(x)\}^2\,g(x)}dx=\int_0^{\pi}\frac{\{g(x)\}^3}{f(x)}\,\frac{(3g'(x))}{\{g(x)\}^4}dx=\frac{3}{2}\int_0^{\pi}\frac{2\{g(x)\}^3}{f(x)}\,\frac{g'(x)}{\{g(x)\}^4}dx$$

따라서 적분값을 구하면,

$$\frac{3}{2}\int_0^{\pi}\frac{2\{g(x)\}^3}{f(x)}\,\frac{g'(x)}{\{g(x)\}^4}dx=\frac{3}{2}\int_0^{\pi}\frac{f(x)f'(x)}{f(x)\left(\{f(x)\}^2-4\right)}dx=\frac{3}{2}\int_0^{\pi}\frac{f'(x)}{\{f(x)\}^2-4}dx$$

$$=\frac{3}{8}\int_0^{\pi}\left(\frac{f'(x)}{f(x)-2}-\frac{f'(x)}{f(x)+2}\right)dx$$

$$=\frac{3}{8}\left[\ln|f(x)-2|-\ln|f(x)+2|\right]_0^{\pi}$$

$$=\frac{3}{8}\{\ln 3-\ln 7+\ln 5\}=\frac{3}{8}\ln\frac{15}{7}$$

(1)과 (2)로부터 구하는 적분값은 $-\dfrac{2}{15}+\dfrac{3}{8}\ln\dfrac{15}{7}$ 이다.

한양대학교 2019학년도 신입학전형 수시 논술고사		
자 연 계	**출제 의도 및 평가 지침**	오후(2)-1번

1. 출제 의도 및 문제 해설

자연계열 오후(2)-1번 문제는 고교수학과정 중 “기하와 벡터-평면곡선-이차곡선” 단원의 포물선의 방정식과, “미적분II-미분법-도함수의 활용” 단원의 함수의 그래프를 주요 내용으로 하고 있다. 미분법 등의 도구들을 적절히 활용해서 포물선 등의 도형들이 갖고 있는 성질들을 분석하고, 정확한 논증을 통해 원하는 결과를 도출할 수 있는지를 묻고 있다. 다음 3개의 소문항으로 구성되어 있다.

문항 1. 한 포물선 위에 있는 점들을 꼭짓점으로 하는 정삼각형 구하기.
문항 2. 포물선 위의 한 점 P을 지나는 직선이 이 포물선과 점 Q에서 만날 때, 선분 PQ의 길이를 이 직선의 기울기에 대한 식으로 표현하기.
문항 3. 포물선 위의 주어진 점을 꼭짓점으로 하고 다른 두 꼭짓점도 이 포물선 위에 있는 정삼각형의 개수 구하기.

2. 종합 평가 기준

문항	배점	세부 평가 기준	세부 배점
1	30	세 꼭짓점이 포물선 $y=x^2$에 있는 정삼각형을 찾았는가?	20
		이 정삼각형의 넓이를 구했는가?	10
2	30	포물선 위의 두 점 P,Q를 지나는 직선의 기울기를 P,Q의 좌표에 관한 식으로 잘 표현했는가?	20
		포물선 위의 두 점 P,Q를 잇는 선분의 길이를 이 선분의 기울기에 대한 식으로 잘 표현했는가?	10
2	40	함수 $g(t)=(\tan t-2\sqrt{2})\cdot\sec t$ 의 그래프를 잘 구했는가?	20
		함수 $f(t)=\lvert g(t)\rvert$의 그래프를 잘 구했는가?	10
		점 P를 한 꼭짓점으로 하고 다른 두 꼭짓점도 포물선 $y=x^2$ 위에 있는 정삼각형은 1개 밖에 없음을 잘 설명했는가?	10

3. 출제 근거

이 문제는 고등학교에서 고교과정의 수학을 정상적으로 이수한 학생들은 충분히 해결할 수 있는 문제들로 구성되었으며, 교과서 기하와 벡터와 미적분II의 주요내용을 다루고 있다. 3개의 소문항은 교과서의 내용과 다음과 같이 연계되며, 모든 교과서에서 공통으로 다루는 내용만으로 구성되어 있다.

교과서 기하와 벡터 (금성교과서 정상권 외 7인) - 평면곡선 - 이차곡선 - 포물선 p. 12-17
교과서 미적분II (금성교과서 정상권 외 7인) - 미분법 - 도함수의 활용 p. 128-149

한양대학교 2019학년도 신입학전형 수시 논술고사

자 연 계	출제 의도 및 평가 지침	오후(2)-2번

1. 출제 의도 및 문제 해설

고등학교 교육과정을 정상적으로 이수한 학생은 누구나 해결할 수 있는 문제를 고등학교 교과과정의 범위에서 출제하였다. 특히, 수학의 개념과 원리를 정확히 이해하고 수학적 사고력을 바탕으로 논리적으로 문제를 해결할 수 있는 능력을 측정하는데 주안점을 두고 출제를 하였다. 그리고 4차 산업혁명 시기에 절실히 요구되는 수학적 사고력, 추론 능력을 키우기 위한 수학의 기본 개념과 중요한 정리들의 의미를 이해하고 있는지 측정하고자 하였다.

자연계 오후(2)의 2번 문제는 미분, 적분 및 기하와 벡터에서 핵심적인 내용을 이해하고 있는지를 측정하는 문제이다. 문항 1은 주어진 도형의 넓이를 적분을 이용하여 계산하고, 미분법, 또는 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 넓이의 최솟값을 구할 수 있는지 묻는 문제이다. 문항 2는 수열의 극한을 이해하고, 극한의 성질을 이용하여 새로운 극한값을 구할 수 있는 능력을 측정하는 문제로써 수열의 극한과 관련된 전형적인 문제이다. 문항 3은 미분과 적분의 성질을 숙지하고, 주어진 조건을 이용하여 주어진 적분값을 구할 수 있는 능력을 측정하는 문제이다.

2번 문제는 고등학교 수학교과에서 중요하게 다루어지는 수열의 극한, 미분과 적분에 관련된 종합적인 문제이다. 이를 통해 학생들이 학교교육을 성실히 이수했는지를 평가할 수 있다. 특히, 문항 1, 2로부터 넓이와 정적분의 관계, 절대부등식 및 미분법, 수열의 극한에 대한 수학적 이해력을 측정할 수 있고, 문항 3으로부터 적분값을 구하기 위해 부분적분을 계산하고, 부분 분수법을 이용해 적분하는 등의 문제 해결능력을 평가할 수 있다.

2. 종합 평가 기준

문항	배점	세부 평가 기준	세부 배점
1	40	주어진 곡선의 넓이 S_1, S_2를 제대로 계산하였는가?	20
		산술평균과 기하평균의 관계, 또는 미분법을 이용하여 S_1+S_2의 최솟값을 구하였는가?	20
2	30	$\lim\limits_{n\to\infty} n\ln a_n = \ln 2019$과 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$을 관찰하였는가?	10
		$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)^n$을 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+(a_n-1)\right]^{\frac{1}{a_n-1}n(a_n-1)}$으로 잘 변형하였는가?	10
		극한값 $\lim\limits_{n\to\infty} n(a_n-1)$을 잘 구했는가?	10
3	30	주어진 조건 (iv)를 변형하여 $f(x)f'(x) = 2\{g(x)\}^3 g'(x)$을 구했는가?	10
		주어진 적분을 변형하여 $\int_0^\pi \frac{3f(x)g'(x)}{\{f(x)\}^2 g(x)}dx - \frac{2}{15}$를 구했는가?	10
		적분값 $\int_0^\pi \frac{3f(x)g'(x)}{\{f(x)\}^2 g(x)}dx$와 구하고자 하는 답을 잘 구했는가?	10

3. 출제 근거

이 문제는 고등학교에서 고교과정의 수학을 정상적으로 이수한 학생들은 충분히 해결할 수 있는 문제들로 구성되었으며, 교과서 미적분I과 미적분II의 주요내용을 다루고 있다. 3개의 소문항은 교과서의 내용과 다음과 같이 연계되며, 모든 교과서에서 공통으로 다루는 내용만으로 구성되어 있다.

교과서 수학II (천재교육 이준열 외 9인)–절대부등식과 명제의 증명 p.47
교과서 미적분I (교학사 김창동 외 14인)–수열의 극한–극한값의 계산 p.18–26
교과서 미적분I (비상교육 김원경 외 11인)–수열의 극한–수열의 극한값의 계산 p.15–23
교과서 미적분II ((주)금성출판사 정상권 외 7인)–함수의 몫의 미분법 p.113
교과서 미적분II ((주)금성출판사 정상권 외 7인)–정적분의 활용 p.191–193
교과서 미적분II (천재교육 이준열 외 9인)–미분법–여러 가지 미분법 p.118–124
교과서 미적분II (천재교육 이준열 외 9인)–적분법 p.153–175

한양대학교

답안지 (자연계)

답안지 바코드

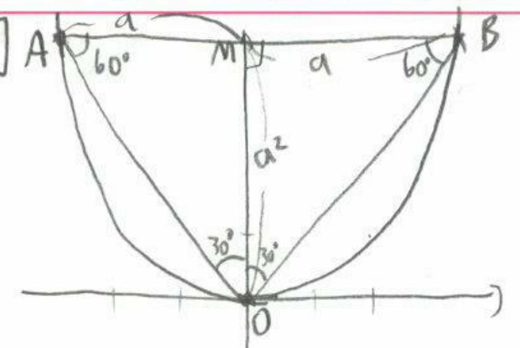
지원학과	
성 명	
수험번호	
생년월일 (예:000301)	

수험생 유의사항

1. 답안지는 검정색 펜(볼펜, 연필, 샤프)으로 작성하십시오. (빨강색이나 파랑색 사용금지)
2. 답안지를 수정할 경우 지우개(연필, 샤프 사용 시)를 사용하거나 두 줄을 긋고(볼펜 사용 시) 그 위에 재 작성하십시오.
3. 답안과 관련 없는 표현이나 표시를 한 답안지는 "0"점 처리 됩니다.
4. 본 고사는 답안지 1장 이내에 답안을 작성하여야 합니다. 답안지 교체는 가능하지만 기존 답안지 제출은 불가합니다.

문제 1번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

[1-1]



△ABO 와 같은 정삼각형이 하나 있을 것이다.
$A(-a, a^2)$
$B(a, a^2)$ 이라 하자.
이때 정삼각형의 한 변의 길이는 $2a$ 이고 높이는 a^2 임을 알 수 있다. A, B의 중점 $(0,a^2)$을 M 이라고 하면 △BMO 에서 $\tan(\angle MBO) = \tan 60° = \frac{\overline{MO}}{\overline{MB}} = \frac{a^2}{a} = \sqrt{3}$

$\therefore a = \sqrt{3}$ 이고 △OAB는 한변의 길이가 $2\sqrt{3}$ 인 정삼각형이다. 따라서 그 넓이는 $3\sqrt{3}$ 이다.

[1-2] (a,a^2)을 지나고 기울기가 $\tan t$ 인 직선을 l 이라 하자.
$l: y = \tan t(x-a)+a^2$ 이라 할 수 있다.

음함수의 미분법에 의해 $y=x^2$을 미분하면 $\frac{dy}{dx} = 2x$ 이다. (a,a^2)에서 포물선의 접선의 기울기는 $2a$ 이다. i) $|2a|<|\tan t|$ 일 경우 a는 존재하지 않는다.
ii) $|\tan t|<|2a|$ 일 경우

$y = \tan t(x-a)+a^2$ 를 $y=x^2$에 대입하면 $x^2 = \tan t(x-a)+a^2$
정리하면 $x^2 - \tan t\, x + a\tan t - a^2 = 0$
$(x-a)(x-\tan t+a) = 0$, $\therefore Q(\tan t - a, (\tan t - a)^2)$
$P(a,a^2)$ 이므로 $\overline{PQ} = \sqrt{(\tan t-a-a)^2 + \{(\tan t-a)^2-a^2\}^2}$
$= |\tan t - 2a|\sqrt{1+\tan^2 t}$
$= |\tan t - 2a|\cdot \sec t \quad (\because -\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2})$

$\therefore \overline{PQ} = \begin{cases} (a>0), & (2a-\tan t)\cdot \sec t \\ (a<0), & (\tan t - 2a)\cdot \sec t \end{cases}$

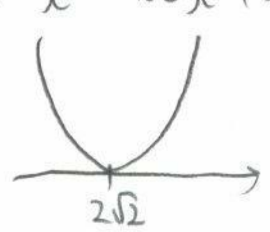
[1-3] $P(\sqrt{2}, 2)$ 라면 [1-2] 에서의 $a=\sqrt{2}$ 일때를 말하는 것이다.
[1-2]에서의 $\overline{PQ} = (2\sqrt{2} - \tan t)\sec t$.
P를 지나고 기울기가 $\tan\alpha$ 인 직선이 포물선과 만나는 P가 아닌 점을 R이라 하자. (단, $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $\tan\alpha<2\sqrt{2}$)
P를 지나고 기울기가 $\tan\beta$ 인 직선이 포물선과 만나는 P가 아닌 점을 S 라 하자. (단, $-\frac{\pi}{2}<\beta<\frac{\pi}{2}$, $\tan\beta<2\sqrt{2}$), $\beta>\alpha$ 라 해도 일반성을 잃지 않는다
△PRS 가 정삼각형 일려면 $\overline{PR} = \overline{PS}$, $\beta-\alpha = 60°$ 이어야 한다.

$\overline{PR} = \overline{PS} \Leftrightarrow (2\sqrt{2} - \tan\alpha)\sec\alpha = (2\sqrt{2} - \tan\beta)\sec\beta \cdots ㉠$
$\beta - \alpha = 60 \Leftrightarrow \tan(\beta-\alpha) = \sqrt{3}$

$\frac{\tan\beta - \tan\alpha}{1+\tan\alpha\tan\beta} = \sqrt{3} \cdots ㉡$

$\tan\alpha = A$, $\tan\beta = B$ 로 치환하면
$\sec\alpha = \sqrt{1+A^2}$, $\sec\beta = \sqrt{1+B^2}$
식을 정리하면
㉠ $A^4 - 4\sqrt{2}A^3 + 9A^2 - 4\sqrt{2}A + 8 = B^4 - 4\sqrt{2}B^3 + 9B^2 - 4\sqrt{2}B + 8$
식을 정리하면
㉡ $A - B - \sqrt{3}AB + \sqrt{3} = 0$

㉠에서 $x^4 - 4\sqrt{2}x^3 + 9x^2 - 4\sqrt{2}x + 8 = 0$ 그래프는



이 다항식은 $2\sqrt{2}$에 대칭인 형태이므로 A와 B는 $2\sqrt{2}$에 대칭이다. $A+B = 4\sqrt{2}$
$A = 4\sqrt{2} - B \cdots ㉢$

㉢을 ㉡에 대입하면

$4\sqrt{2} - 2B - 4\sqrt{6}B + \sqrt{3}B^2 + \sqrt{3} = 0$
$\sqrt{3}B^2 - 2(1+2\sqrt{6})B + \sqrt{3} + 4\sqrt{2} = 0$
$\frac{D}{4} = 1 + 4\sqrt{6} + 24 - 3 - 4\sqrt{6} = 22 > 0$

이므로 B는 두 실근을 갖는데 $\beta>\alpha$ 라 가정하였으므로 정삼각형은 한개 존재함을 알 수 있다.
$\therefore$ 1개

이 줄 아래 답안 작성 시 무효 처리됨

한양대학교

답안지 (자연계)

답안지 바코드

지원학과	
성 명	
수험번호	
생년월일 (예:000301)	

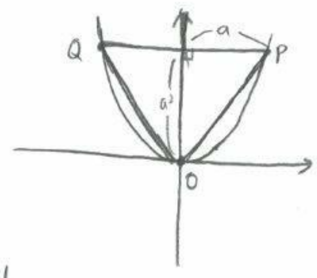
수험생 유의사항

1. 답안지는 검정색 펜(볼펜, 연필, 샤프)으로 작성하십시오. (빨강색이나 파랑색 사용금지)
2. 답안지를 수정할 경우 지우개(연필, 샤프 사용 시)를 사용하거나 두 줄을 긋고(볼펜 사용 시) 그 위에 재 작성하십시오.
3. 답안과 관련 없는 표현이나 표시를 한 답안지는 "0"점 처리 됩니다.
4. 본 고사는 답안지 1장 이내에 답안을 작성하여야 합니다. 답안지 교체는 가능하지만 기존 답안지 제출은 불가합니다.

문제 1번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

1. 정삼각형이 y축에 대해 대칭인 경우를 생각하자.

이 경우 정삼각형의 세 꼭짓점을 O (원점), P, Q 라고 하자.



$P(a, a^2)$ 에서 $\sqrt{3}a = a^2$ 이므로

$a = \sqrt{3}$ 이다.

이 때 정삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 3 = 3\sqrt{3}$ 이다.

2. 점 P를 지나고 기울기가 $\tan t$ 인 직선의 방정식은

$y = \tan t(x-a) + a^2$ 이다.

$y = x^2$ 와 이 직선의 교점은 :

$x^2 = \tan t(x-a) + a^2$.

$(x-a)(x - \tan t + a) = 0$.

$\therefore\ x = a$ or $x = -a + \tan t$.

$Q : (-a+\tan t,\ (-a+\tan t)^2)$.

$\overline{PQ} = \sqrt{(a+a-\tan t)^2 + (a^2 - a^2 + 2a\tan t - \tan^2 t)^2}$

$= \sqrt{(2a - \tan t)^2(1+\tan^2 t)}$

$= \sqrt{(2a-\tan t)^2 \sec^2 t}$

$= |(2a - \tan t)\sec t|$.

3. 점 P를 지나면서 기울기가 $\tan t$ $\left(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}\right)$ 인 직선과 $y = x^2$의 교점을 P, Q라고 하자.

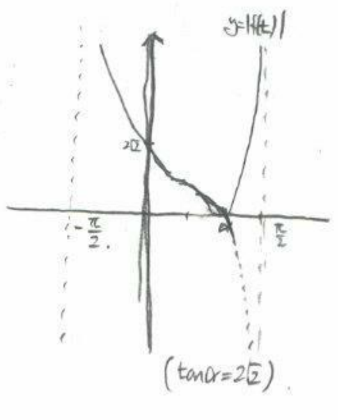
이 때 $\overline{PQ} = |(2\sqrt{2} - \tan t)\sec t|$ 이다.

$f(t) = (2\sqrt{2} - \tan t)\sec t$ 라고 하자.

$f'(t) = (-\sec^2 t)\sec t + (2\sqrt{2} - \tan t)\sec t \tan t$.

$= \sec t(-2\tan^2 t + 2\sqrt{2}\tan t - 1)$.

$= -\sec t(\sqrt{2}\tan t - 1)^2 \leq 0$ 이므로 $y = f(t)$는 감소함수다.



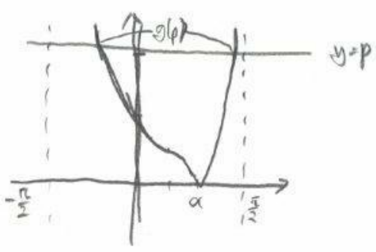
$y = |f(t)|$의 그래프는 왼쪽과 같다.

($|f(t)| = \overline{PQ}$의 길이).

점 P를 지나면서 기울기가 $\tan\left(t + \frac{\pi}{3}\right)$ $\left(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{6}\right)$ 인 직선과 $y = x^2$의 교점을 P, R 이라고 하자.

$\triangle PQR$이 정삼각형이 되려면 $\overline{PQ} = \overline{PR}$ 이어야 한다.

$y = p$ 와 $y = |f(t)|$ 의 교점을 잇는 선분의 길이를 $g(p)$라고 하자.



$\angle QPR = \frac{\pi}{3}$ 이므로 $g(p) = \frac{\pi}{3}$이 될 때 정삼각형이 성립된다.

$g(p)$는 증가함수이고 $0 \leq g(p) < \pi$ 이므로

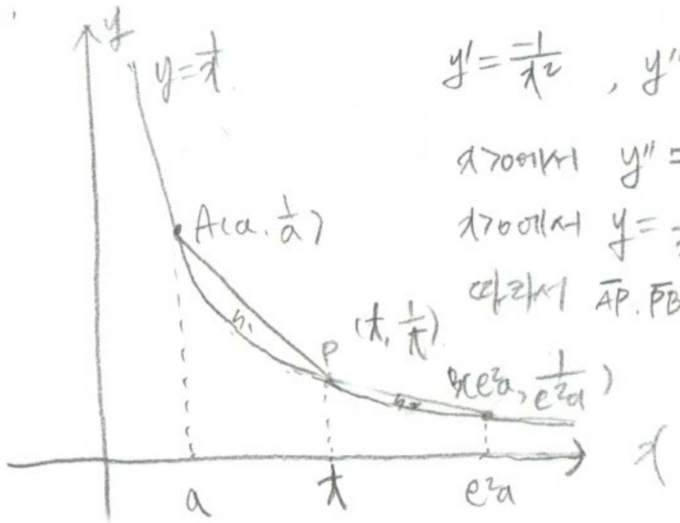
$g(p) = \frac{\pi}{3}$ 을 만족하는 p는 1개 뿐이다

따라서 문제의 조건에 부합하는 정삼각형은 1개 이다.

이 줄 아래 답안 작성 시 무효 처리됨

문제 2번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

1.



$y' = \frac{-1}{x^2}$, $y'' = \frac{2}{x^3}$

$x>0$에서 $y'' = \frac{2}{x^3} > 0$ 이므로

$x>0$에서 $y = \frac{1}{x}$은 아래로 볼록이다.

따라서 $\overline{AP}$, $\overline{PB}$가 $\frac{1}{x}$보다 크다. … ①

P를 $(t, \frac{1}{t})$ (단 $a < t < e^2a$) 라고 할 때 ①에 의해

$S_1 = \int_a^t \left\{ \frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{t}}{a-t}(x-a) + \frac{1}{a} - \frac{1}{x} \right\} dx$

$= \left[\frac{-1}{at}\frac{1}{2}x^2 + \left(\frac{1}{t}+\frac{1}{a}\right)x - \ln x \right]_a^t$

$= \frac{t}{2a} - \frac{a}{2t} - \ln t + \ln a$

$S_2 = \int_t^{e^2a} \left\{ \frac{\frac{1}{t} - \frac{1}{e^2a}}{t - e^2a}(x - e^2a) + \frac{1}{e^2a} - \frac{1}{x} \right\} dx$

$= \left[\frac{-1}{te^2a}\frac{1}{2}x^2 + \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{e^2a}\right)x - \ln x \right]_t^{e^2a}$

$= \frac{e^2a}{2t} - \frac{t}{2e^2a} - 2 - \ln a + \ln t$

$\therefore S_1 + S_2 = \frac{e^2-1}{2e^2a}t + a(e^2-1)\frac{1}{2t} - 2$

$S_1 + S_2 = f(t)$라고 할 때

$f'(t) = \frac{e^2-1}{2e^2a} + \frac{a(e^2-1)}{2}\frac{-1}{t^2}$

$= \frac{e^2-1}{2} \times \frac{t^2 - e^2a^2}{e^2at^2}$

t	a	…	ea	…	e^2a
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$		감소	극소	증가	

$\therefore f(t)$는 $t = ea$에서 극소이자 최소를 가진다.

$f(ea) = e - \frac{1}{e} - 2$

$\therefore (S_1 + S_2$의 최솟값$) = e - \frac{1}{e} - 2$

2. $\lim_{n\to\infty} \ln(a_n)^n = \lim_{n\to\infty}(n\ln a_n) = \ln 2019$

$n\to\infty$ 일 때 $n\ln a_n$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}(\ln a_n) = 0$임을

알 수 있다. $\therefore n\to\infty$ 일 때 $a_n \to 1$이다. … ①

$\lim_{n\to\infty}(n\ln a_n) = \lim_{n\to\infty} n(a_n-1)\frac{\ln a_n}{a_n-1}$

$= \lim_{n\to\infty} n(a_n-1) \times \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+(a_n-1))}{a_n-1}$

$a_n - 1 = t$로 치환.

$= \lim_{n\to\infty} n(a_n-1) \times \lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}$ ($\because$ ①에 의해 $n\to\infty$, $t\to 0$)

$= \lim_{n\to\infty} n(a_n-1)$

$= \ln 2019$

$\therefore \lim_{n\to\infty} n(a_n-1) = \ln 2019$

3. (iv)에 의해 $0 \le x \le \pi$에서 $2f(x)f'(x) - 4\{g(x)\}^3 g'(x) = 0$이다.

따라서, $0 \le x \le \pi$에서 $\frac{3g'(x)}{f(x)g(x)} = \frac{3f'(x)}{2\{g(x)\}^4} = \frac{3}{2}\frac{f'(x)}{\{f(x)\}^2-4}$

$\int_0^\pi \frac{3f(x)g'(x) - f'(x)g(x)}{\{f(x)\}^2 g(x)} dx = \int_0^\pi \frac{3g'(x)}{f(x)g(x)} dx - \int_0^\pi \frac{f'(x)}{\{f(x)\}^2} dx$

$= \frac{3}{2}\int_0^\pi \frac{f'(x)}{\{f(x)\}^2-4} dx - \int_0^\pi \frac{f'(x)}{\{f(x)\}^2} dx$

$f(x) = t$ $f'(x) = \frac{dt}{dx}$ 라고 할 때 (가)에 의해

$\frac{3}{2}\int_0^\pi \frac{f'(x)}{\{f(x)\}^2-4} dx - \int_0^\pi \frac{f'(x)}{\{f(x)\}^2} dx$

$= \frac{3}{2}\int_3^5 \frac{1}{t^2-4} dt - \int_3^5 \frac{1}{t^2} dt$

$= \frac{3}{2}\int_3^5 \frac{1}{4}\left(\frac{1}{t-2} - \frac{1}{t+2}\right) dt + \int_3^5 \frac{-1}{t^2} dt$

$= \frac{3}{2} \times \frac{1}{4}\left[\ln|t-2| - \ln|t+2|\right]_3^5 + \left[\frac{1}{t}\right]_3^5$

$= \frac{3}{8}\ln\frac{15}{7} - \frac{2}{15}$

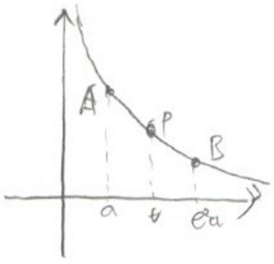
$\therefore \int_0^\pi \frac{3f(x)g'(x) - f'(x)g(x)}{\{f(x)\}^2 g(x)} dx = \frac{3}{8}\ln\frac{15}{7} - \frac{2}{15}$

문제 2번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

1.

$P(t, \frac{1}{t})$이라 하자. $(a < t < e^2a)$

$A(a, \frac{1}{a})$ $B(e^2a, \frac{1}{e^2a})$



직선 AP의 방정식

$: y = -\frac{1}{at}(x-a)+\frac{1}{a}$

$= -\frac{1}{at}x + \frac{1}{t}+\frac{1}{a}$

직선 PB의 방정식

$: y = -\frac{1}{e^2at}(x-t) + \frac{1}{t}$

$= -\frac{1}{e^2at}x + \frac{1}{e^2a}+\frac{1}{t}$

$S_1 = \int_a^t (-\frac{1}{at}x+\frac{1}{t}+\frac{1}{a} - \frac{1}{x})\,dx$

$= \left[-\frac{1}{2at}x^2 + (\frac{1}{t}+\frac{1}{a})x - \ln x\right]_a^t$

$= \frac{t}{2a} - \frac{a}{2t} + \ln a - \ln t$

$S_2 = \int_t^{e^2a} (-\frac{1}{e^2at}x+\frac{1}{e^2a}+\frac{1}{t} - \frac{1}{x})\,dx$

$= \left[-\frac{1}{2e^2at}x^2 + (\frac{1}{e^2a}+\frac{1}{t})x - \ln x\right]_t^{e^2a}$

$= \frac{e^2a}{2t} - \frac{t}{2e^2a} + \ln t - \ln e^2a$

$S_1+S_2 = \frac{t}{2a} - \frac{a}{2t} + \frac{e^2a}{2t} - \frac{t}{2e^2a} - 2$

$= \frac{e^2t}{2e^2a} - \frac{t}{2e^2a} + \frac{e^2a}{2t} - \frac{a}{2t} - 2.$

$= (e^2-1)\cdot(\frac{t}{2e^2a} + \frac{a}{2t}) - 2$

$\frac{t}{2e^2a} + \frac{a}{2t} \geq 2\sqrt{\frac{t}{2e^2a}\times\frac{a}{2t}} = 2\sqrt{\frac{1}{4e^2}} = \frac{1}{e}$ ($\because$ $a>0$, 산술기하 평균 정리)

$\therefore S_1+S_2 = (e^2-1)\cdot(\frac{t}{2e^2a} + \frac{a}{2t}) - 2 \geq (e^2-1)\cdot\frac{1}{e} - 2$

S_1+S_2의 최솟값은 "$e-\frac{1}{e}-2$"이다

2.

$a_n > 0$, $\lim_{n\to\infty}(a_n)^n = 2019$

$\lim_{n\to\infty}\ln(a_n)^n = \ln\lim_{n\to\infty}(a_n)^n$ ($\because$ $\ln x$는 연속함수)

$= \ln 2019,$

$\lim_{n\to\infty}\ln a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n\ln a_n}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(a_n)^n}{n} = 0$ ($\because$ $\frac{수렴}{\infty}$ 하는 꼴이므로)

$\lim_{n\to\infty}\ln a_n = \ln(\lim_{n\to\infty}a_n)$ ($\because$ $\ln x$는 연속이므로)

$\therefore \ln(\lim_{n\to\infty}a_n) = 0$ 이므로 $\lim_{n\to\infty}a_n = 1$ ($\because$ $\ln x$는 증가함수 → 일대일함수)

$\lim_{n\to\infty}n(a_n-1) = \lim_{n\to\infty}n\frac{a_n-1}{\ln(1+a_n-1)}\times\ln a_n$

$= \lim_{n\to\infty}n\ln a_n\times\frac{a_n-1}{\ln(1+a_n-1)} = \boxed{\ln 2019}$이다 $\left(\because \lim_{n\to\infty}\frac{a_n-1}{\ln(1+a_n-1)} = \lim_{x\to0}\frac{x}{\ln(1+x)} = 1\right)$

3.

$f(0)=3$, $f(\pi)=5$ $0\leq x\leq\pi$ $\{f(x)\}^2 - \{g(x)\}^4 = 4$

$0\leq x\leq\pi$, $g(x)\neq0$

$\int_0^\pi \frac{3f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{(f(x))^2 g(x)}\,dx$

$= \int_0^\pi \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{(f(x))^2}\times\frac{1}{g(x)}\,dx + 2\int_0^\pi\frac{g'(x)}{f(x)\cdot g(x)}\,dx$

$\int_0^\pi \frac{f'(x)g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{(f(x))^2}\cdot\frac{1}{g(x)}\,dx$

$= \left[\frac{g(x)}{f(x)}\,\frac{1}{g(x)}\right]_0^\pi - \int_0^\pi\frac{g(x)}{f(x)}\cdot\frac{-g'(x)}{(g(x))^2}\,dx$ $\left(\because \left(\frac{g(x)}{f(x)}\right)' = \frac{g'(x)f(x)-g(x)f'(x)}{(f(x))^2}\right)$

치환 적분

$= -\frac{2}{15} + \int_0^\pi\frac{g'(x)}{f(x)\cdot g(x)}\,dx$

$\therefore \int_0^\pi\frac{3f'(x)g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{(f(x))^2 g(x)}\,dx$

$= -\frac{2}{15} + 3\int_0^\pi\frac{g'(x)}{f(x)\cdot g(x)}\,dx$, $\{f(x)\}^2 = 4+\{g(x)\}^4$

$\Rightarrow f(x)>0$ ($\because$ $(g(x))^4>0$)

$\{f(x)\}^2 - \{g(x)\}^4 = 4$

$2\cdot f(x)\cdot f'(x) - 4(g(x))^3\cdot g'(x) = 0 \rightarrow f(x)\cdot f'(x) = 2\cdot(g(x))^3\cdot g'(x).$

$\therefore \frac{1}{2}\cdot\frac{f'(x)}{(g(x))^4} = \frac{g'(x)}{f(x)g(x)}$ ($\because$ $f(x)(g(x))^4\neq0$)

$\int_0^\pi\frac{g'(x)}{f(x)\cdot g(x)}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi\frac{f'(x)}{(g(x))^4}\,dx$

$f(x)=t$로 치환

$= \frac{1}{2}\int_0^\pi\frac{f'(x)}{(f(x))^2-4}\,dx = \frac{1}{2}\int_3^5\frac{1}{t^2-4}\,dt$

$\int_3^5\frac{1}{t^2-4}\,dt = \int_3^5\frac{1}{4}\left(\frac{1}{t-2}-\frac{1}{t+2}\right)dt$

$= \frac{1}{4}\left[\ln|t-2| - \ln|t+2|\right]_3^5$

$= \frac{1}{4}(\ln3 - \ln7 + \ln5) = \frac{1}{4}\ln\frac{15}{7}$

$\therefore \int_0^\pi\frac{3f'(x)g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{(f(x))^2\cdot g(x)}\,dx$

$= -\frac{2}{15} + 3\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\ln\frac{15}{7}$

$= -\frac{2}{15} + \frac{3}{8}\cdot\ln\frac{15}{7}$