

[문제 1] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오. (50점)

<가> $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$

$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$

예를 들어, $\sin(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin x + \cos x)$ 이고 $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ 이다.

<나> $f(x) = \frac{x^2}{x + \sqrt{a^2 - x^2}} \quad (0 \leq x \leq a) \quad (\text{단, } a > 0)$

1. 함수 $f(x)$ 가 일대일 함수임을 보이시오.

2. $\int_0^\pi xf(a \sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} xf(a \sin x)dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi xf(a \sin x)dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(a \sin x)dx$ 임을 보이시오.

3. 정적분 $\int_0^\pi xf(a \sin x)dx$ 의 값을 구하시오.

[문제 2] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오. (50점)

<가> m, n 이 1보다 큰 자연수일 때, 다항식

$$p(x) = (1-x)^m(1+x)^n \text{의 } x^k \text{의 계수를 } a_k \text{ (} 0 \leq k \leq m+n \text{),}$$

$$q(x) = (1-x)^{m-1}(1+x)^n \text{의 } x^k \text{의 계수를 } b_k \text{ (} 0 \leq k \leq m+n-1 \text{),}$$

$$r(x) = (1-x)^m(1+x)^{n-1} \text{의 } x^k \text{의 계수를 } c_k \text{ (} 0 \leq k \leq m+n-1 \text{)}$$

라고 하자.

<나> 함수의 곱의 미분법은 다음과 같다.

미분가능한 두 함수 $f(x), g(x)$ 에 대하여

$$y = f(x)g(x) \text{이면 } y' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \text{이다.}$$

<다> 이항정리

자연수 n 에 대하여

$$(a+b)^n = {}_n C_0 a^n + {}_n C_1 a^{n-1}b + \cdots + {}_n C_r a^{n-r}b^r + \cdots + {}_n C_n b^n$$

1. 제시문 <가>에서 $m = 20, n = 15$ 일 때, a_7 의 값을 구하시오.
2. 제시문 <나>를 이용하여, 제시문 <가>에 주어진 b_k 와 c_k ($1 \leq k \leq m+n-1$)에 대하여 $(m-k)b_{k-1} + kb_k - nc_{k-1}$ 의 값을 구하시오.
3. 제시문 <나>를 이용하여, 제시문 <가>에 주어진 b_k 와 c_k ($1 \leq k \leq m+n-1$)에 대하여 $mb_{k-1} + kc_k - (n-k)c_{k-1}$ 의 값을 구하시오.