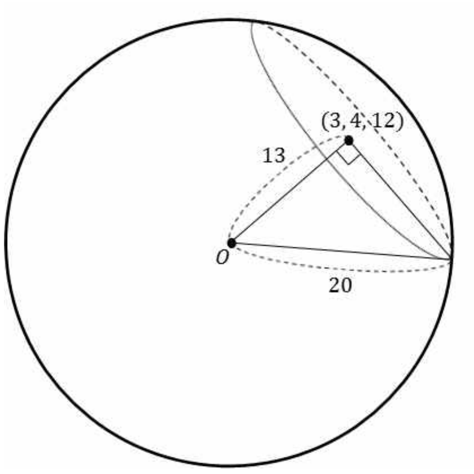
자 연 계	한양대학교 2018학년도 신입학전형 수시 **논 술 예 시 답 안**	오후(1)-1번

1.



원 C의 중심 $(3,4,12)$와 원점과의 거리 $=\sqrt{3^2+4^2+12^2}=13$ 이다.

따라서 C의 반지름 $=\sqrt{20^2-13^2}=\sqrt{231}$ 이고, C의 넓이는 231π 이다.

평면 $4x+5y-20z=1$의 법선벡터를 $(4,5,-20)$, 원 C를 포함하는 평면의 법선벡터를 $(3,4,12)$로 택하자. 두 평면이 이루는 각을 $\theta\left(0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$라 하면,

$$\cos\theta=\frac{|(3,4,12)\bullet(4,5,-20)|}{\sqrt{3^2+4^2+12^2}\sqrt{4^2+5^2+(-20)^2}}=\frac{16}{21}$$ 이다.

따라서 구하는 정사영의 넓이는 $231\pi\cdot\frac{16}{21}=176\pi$ 이다.

2. 평면 α의 방정식은 $z=my$ 또는 $y=0$ ($xz-$평면)라 할 수 있다. 따라서 α의 법선벡터는 $(0,m,-1)$ 또는 $(0,1,0)$로 택할 수 있다. 원 C를 포함하는 평면이 이루는 각을 $\theta\left(0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$라 하면

$$\cos\theta=\frac{|(0,m,-1)\bullet(3,4,12)|}{\sqrt{0^2+m^2+(-1)^2}\sqrt{3^2+4^2+12^2}} \text{ 또는 } \frac{|(0,1,0)\bullet(3,4,12)|}{\sqrt{0^2+1^2+0^2}\sqrt{3^2+4^2+12^2}}=\frac{|4m-12|}{13\sqrt{m^2+1}} \text{ 또는 } \frac{4}{13}$$ 이다.

$\frac{|4m-12|}{13\sqrt{m^2+1}}$는 $m=-\frac{1}{3}$일 때 최댓값 $\frac{4}{13}\sqrt{10}$을 갖는다. 따라서 $\frac{A_\alpha}{A}=\cos\theta$의 최댓값은 $\frac{4}{13}\sqrt{10}$ 이다.

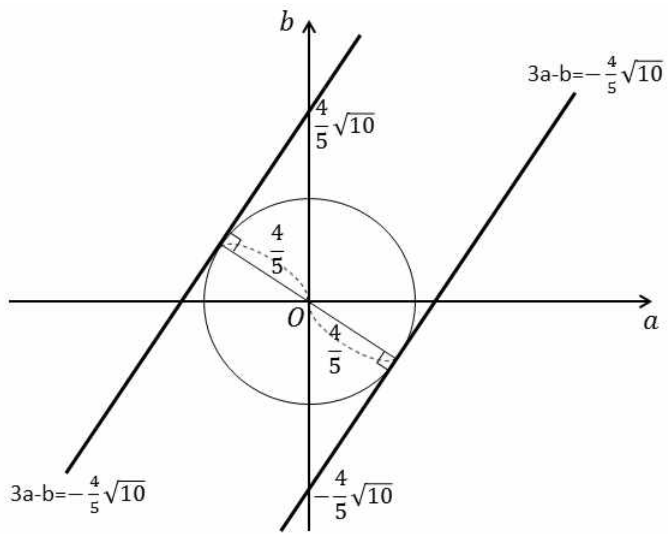
(다른 풀이) 평면 α의 방정식은 $(\cos t)y+(\sin t)z=0$이라 할 수 있고, 따라서 $(0,\cos t,\sin t)$를 α의 법선벡터로 택하자. 평면 α와 원 C를 포함하는 평면이 이루는 각을 $\theta\left(0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$라 하면,

$$\frac{A_\alpha}{A}=\cos\theta=\frac{|(0,\cos t,\sin t)\bullet(3,4,12)|}{\sqrt{0^2+\cos^2 t+\sin^2 t}\sqrt{3^2+4^2+12^2}}=\frac{|4\cos t+12\sin t|}{13}=\frac{4\sqrt{10}}{13}\left|\frac{1}{\sqrt{10}}\cos t+\frac{3}{\sqrt{10}}\sin t\right|$$

$$=\frac{4\sqrt{10}}{13}|\sin\beta\cos t+\cos\beta\sin t|=\frac{4\sqrt{10}}{13}|\sin(\beta+t)|\le\frac{4}{13}\sqrt{10}$$

(단, β는 $\sin\beta=\frac{1}{\sqrt{10}}$, $\cos\beta=\frac{3}{\sqrt{10}}$을 만족한다.) 따라서 $\frac{A_\alpha}{A}$의 최댓값은 $\frac{4}{13}\sqrt{10}$ 이다.

3. 원이 놓여 있는 평면의 단위 법선벡터를 (a,b,c)라 하자. ($a^2+b^2+c^2=1$이다.) 원의 $xy-$평면 위로의 정사영의 넓이 $=6\pi=\frac{|(0,0,1)\bullet(a,b,c)|}{\sqrt{0^2+0^2+1^2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\cdot\sqrt{10}^2\pi=|c|\cdot10\pi$ 이다. 따라서 $|c|=\frac{3}{5}$이고, $a^2+b^2=1-c^2=\frac{16}{25}$이다.



원의 평면 $3x-y=1$위로의 정사영의 넓이

$$=\frac{|(3,-1,0)\bullet(a,b,c)|}{\sqrt{3^2+(-1)^2+0^2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\cdot\pi(\sqrt{10})^2=\sqrt{10}\pi|3a-b|$$

이다.

$|3a-b|=k$라 하면, a, b는 $a^2+b^2=\frac{16}{25}=\left(\frac{4}{5}\right)^2$을 만족하므로, k의 최댓값은 $\frac{4}{5}\sqrt{10}$ 이다.

따라서 구하는 정사영의 넓이의 최댓값은 $\sqrt{10}\pi\cdot\frac{4}{5}\sqrt{10}=8\pi$ 이다.

한양대학교 2018학년도 신입학전형 수시

자 연 계	**논 술 예 시 답 안**	오후(1)-2번

1. 원점 $(0,0)$과 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(x, f(x))$ 사이의 거리의 제곱을 $g(x)$ $(0 \le x \le 1)$라 하자.

함수 $g(x)$의 정의에 의해 $g(x)=x^2+(1-x^n)^{\frac{2}{n}}$이다.

$g(0)=1$, $g(1)=1$이고, $g'(x)=2x-2(1-x^n)^{\frac{2}{n}-1}x^{n-1}$이다. $0<x<1$일 때

$g'(x)>0 \Leftrightarrow x-(1-x^n)^{\frac{2}{n}-1}x^{n-1}>0 \Leftrightarrow x^{2-n}-(1-x^n)^{\frac{2-n}{n}}>0 \Leftrightarrow x^{2-n}>(1-x^n)^{\frac{2-n}{n}} \Leftrightarrow x<(1-x^n)^{\frac{1}{n}}$ $(n \ge 3$이므로$)$

$\Leftrightarrow x^n<1-x^n \Leftrightarrow x^n<\frac{1}{2} \Leftrightarrow x<\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$

비슷한 방법으로 $g'(x)=0 \Leftrightarrow x=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$, 그리고 $g'(x)<0 \Leftrightarrow x>\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$임을 확인할 수 있다.

따라서 $x=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$에서 $g(x)$가 최대가 된다.

$f\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$이므로 원하는 점 A의 좌표는 $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}, \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}\right)$이다.

2. $0<x<1$일 때 $f'(x)=-(1-x^n)^{\frac{1-n}{n}}x^{n-1}<0$이다.

곡선 $y=f(x)$의 한 점 $(x_0, f(x_0))$의 접선의 방정식은 $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

점 P의 좌표를 $(p,0)$, 점 Q의 좌표를 $(0,q)$이라 하면 $0=f'(x_0)(p-x_0)+f(x_0)$, $q=f'(x_0)(0-x_0)+f(x_0)$

따라서 $p=\dfrac{f(x_0)-x_0f'(x_0)}{-f'(x_0)}$, $q=f(x_0)-x_0f'(x_0)$

즉, 점 P의 좌표는 $\left(\dfrac{f(x_0)-x_0f'(x_0)}{-f'(x_0)}, 0\right)$, 점 Q의 좌표는 $(0, f(x_0)-x_0f'(x_0))$이다.

이로부터 선분 PQ의 길이의 제곱을 $h(x_0)$라 하면

$h(x_0)=\dfrac{|f(x_0)-x_0f'(x_0)|^2}{|f'(x_0)|^2}\left(1+(f'(x_0))^2\right)$ $(0<x_0<1)$을 얻는다.

한편 $|f(x_0)-x_0f'(x_0)|=\left|(1-x_0^n)^{\frac{1}{n}}+x_0^n(1-x_0^n)^{\frac{1-n}{n}}\right|=(1-x_0^n)^{\frac{1-n}{n}}$, $|f'(x_0)|=(1-x_0^n)^{\frac{1-n}{n}}x_0^{n-1}$이므로 정리하면

$h(x_0)=\left(\dfrac{1}{x_0}\right)^{2(n-1)}+(1-x_0^n)^{\frac{2(1-n)}{n}}$

선분 PQ의 길이의 최솟값을 찾기 위해서는 구간 $(0,1)$에서의 $h(x)$의 최솟값을 찾으면 충분하다.

x가 0또는 1로 수렴함에 따라 $h(x)$는 양의 무한대로 발산한다.

또한 $h'(x)=2(1-n)(x^{1-2n}-(1-x^n)^{\frac{2-3n}{n}}x^{n-1})$이므로, $0<x<1$일 때

$h'(x)>0 \Leftrightarrow x^{1-2n}-(1-x^n)^{\frac{2-3n}{n}}x^{n-1}<0$ $(n \ge 3$이므로$)$ $\Leftrightarrow x^{2-3n}-(1-x^n)^{\frac{2-3n}{n}}<0 \Leftrightarrow x^{2-3n}<(1-x^n)^{\frac{2-3n}{n}}$

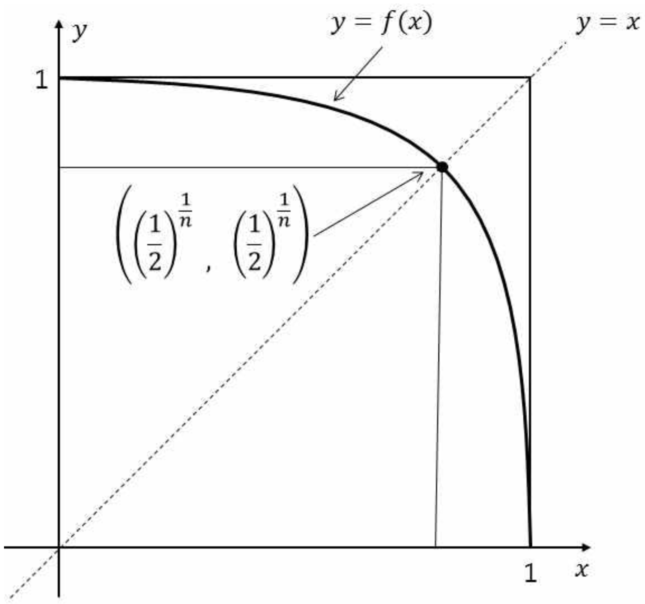
$\Leftrightarrow x>(1-x^n)^{\frac{1}{n}}$ $(n \ge 3$이므로$)$ $\Leftrightarrow x^n>1-x^n \Leftrightarrow x^n>\frac{1}{2} \Leftrightarrow x>\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$

비슷한 방법으로 $h'(x)=0 \Leftrightarrow x=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$, 그리고 $h'(x)<0 \Leftrightarrow x<\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$임을 확인할 수 있다.

따라서 $x=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$에서 $h(x)$가 최소가 되고 $h\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}\right)=2\cdot 4^{\frac{n-1}{n}}$이다.

선분 PQ의 길이의 최솟값은 $h\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}\right)$의 양의 제곱근인 $\sqrt{2}\cdot 2^{\frac{n-1}{n}}$이다.

3.



$0<x<1$일 때 $f(x)>0$, $f'(x)<0$이고, $f\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$

따라서 $0<x<\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$이면 $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}<f(x)<1$이다. 이로부터

(한 변의 길이가 $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$인 정사각형의 넓이) $=\int_0^{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}dx$

$\leq \int_0^{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}} f(x)dx \leq \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (1-x^n)^{\frac{1}{n}}dx \leq \int_0^1 1dx$

= (한 변의 길이가 1인 정사각형의 넓이)

를 얻는다. 정리하면 $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{n}} \leq d_n \leq 1$

이 때 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{n}}=1$이므로 제시문 <다>에 의해 $\lim_{n\to\infty}d_n=1$

한양대학교 2018학년도 신입학전형 수시 논술고사

자 연 계

출제 의도 및 평가 지침

오후(1)-1번

1. 출제 의도 및 문제 해설

자연계열 오후(1)-1번 문제는 고교수학과정 중 “기하와 벡터-공간곡선과 공간벡터-공간도형” 단원의 정사영, “기하와 벡터-공간곡선과 공간벡터-공간도형” 단원의 공간벡터의 성분과 내적 및 평면과 구의 방정식, 그리고 “미적분II-미분법-여러 가지 함수의 미분법” 단원의 합성함수의 미분법을 주요 내용으로 하고 있다. 정사영의 의미를 정확히 이해하고, 공간벡터의 내적과 합성함수의 미분법 등의 중요한 도구들을 적절히 활용해서 좌표공간에 있는 구와 평면 등의 도형들이 갖고 있는 성질들을 이해하고, 정확한 논증을 통해 원하는 결과를 도출할 수 있는지를 묻고 있다. 다음 3개의 소문항으로 구성되어 있다.

문항 1. 주어진 조건을 만족하는 도형의 정사영의 넓이를 구하기.
문항 2. 정사영 되는 평면이 변할 때, 정사영의 넓이의 최댓값을 구하기.
문항 3. 정사영 하려는 도형이 변할 때, 정사영의 넓이의 최댓값을 구하기.

2. 종합 평가 기준

문항	배점	세부 평가 기준	세부 배점
1	30	원 C를 포함하는 평면과 평면 $4x+5y-20z=1$이 이루는 각 θ에 대해, $\cos\theta$의 값을 구했는가?	10
		원하는 정사영의 넓이를 구했는가?	20
2	40	평면 α와 원 C를 포함하는 평면이 이루는 각 θ에 대해 $\cos\theta$에 대한 식을 세웠는가?	20
		$\dfrac{A_\alpha}{A}$ 의 최댓값을 구했는가?	20
3	30	주어진 원의 평면 $3x-y=1$ 위로의 정사영의 넓이에 대한 적절한 식을 세웠는가?	10
		정사영의 넓이의 최댓값을 구했는가?	20

한양대학교 2018학년도 신입학전형 수시 논술고사		
자 연 계	**출제 의도 및 평가 지침**	오후(1)-2번

1. 출제 의도 및 문제 해설

자연계 오후(1)−2번 문제는 고등학교 수학과 교육과정에서 다루어지는 여러 개념 및 원리를 이용하여 $y=1-x^n$와 $y=x^{\frac{1}{n}}$(n은 자연수)의 합성으로 정의된 함수 $f(x)$의 그래프의 개형을 파악할 수 있는지를 평가하는 문제이다. 첫 번째 문항은 두 점 사이의 거리 공식과 미분법을 이용하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점에서 원점까지의 거리가 최대인 점을 찾을 수 있는지를 묻는다. 두 번째 문항은 곡선 $y=f(x)$의 접선의 방정식을 구하여 이 접선이 x축 및 y축과 만나는 점 P, Q의 좌표를 찾고, 두 점 사이의 거리 공식 및 미분법을 재차 활용하여 선분 PQ의 길이의 최솟값을 구할 수 있는지를 묻는다. 마지막 문항은 정적분의 의미를 이해하여 함수 $f(x)$의 정적분 값을 n에 대하여 나타내고, 수열의 극한값의 대소 비교를 통하여 이 값의 극한값을 찾는 문제이다.

이 문제를 통하여 전문화, 고도화되어가는 미래 사회의 구성원에게 필요한 합리성, 창의성, 복합적 문제 해결 능력, 추론 능력을 측정한다.

2. 종합 평가 기준

문항	배점	세부 평가 기준	세부 배점
1	30	원점과 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(x,f(x))$ 사이의 거리를 제대로 계산하였는가?	10
		곡선 $y=f(x)$ 위의 점에서 원점까지의 거리가 최대인 점을 올바르게 찾았는가?	20
2	40	곡선 $y=f(x)$의 접선의 방정식을 구하여 이 접선이 x축 및 y축과 만나는 점 P, Q의 좌표를 찾았는가?	10
		선분 PQ의 길이를 잘 구했는가?	10
		선분 PQ의 길이의 최솟값을 올바르게 찾았는가?	20
3	30	구간 $[0,1]$에서의 함수 $f(x)$의 정적분 값을 적절히 예상하였는가?	10
		제시문 (다)를 사용하여 d_n의 극한값을 올바르게 구했는가?	20