



답안지 (자연계)

답안지 바코드

지원 학과

성 명

수험번호

생년월일
(예:980301)

수험생 유의사항

1. 답안지는 검정색 펜(볼펜, 연필, 샤프)으로 작성하십시오.
(빨강색이나 파랑색 사용금지)
2. 답안지를 수정할 경우 지우개(연필, 샤프 사용 시)를 사용하거나
두 줄을 긋고(볼펜 사용 시) 그 위에 재 작성하십시오.
3. 답안과 관련 없는 표현이나 표시를 한 답안지는 "0"점 처리 됩니다.
4. 본 고사는 답안지 1장 이내에 답안을 작성하여야 합니다.
답안지 교체는 가능하지만 기존 답안지 제출은 불가합니다.

문제 1번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -a \sin t \\ \frac{dy}{dt} = b \cos t \end{cases}$$

$$B' \frac{dy}{dx} = \frac{b \cos t}{-a \sin t} \quad \therefore y = \frac{b \cos t}{-a \sin t} (x - a \cos t) + b \sin t$$

$B(0, \frac{b}{\sin t})$ $A(\frac{a}{\cos t}, 0)$
 $B'(-a, \frac{b(H \cos t)}{\sin t})$ $A'(\frac{a(H \sin t)}{\cos t}, 0)$

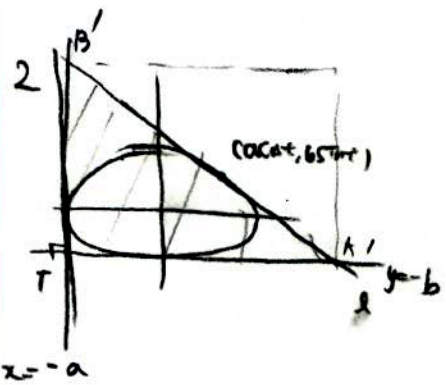
$\overline{A'B'} : \overline{AB} = \overline{B'T} : \overline{HM}$ 이라는 공식은

$$\overline{B'T} = b + \frac{b(H \cos t)}{\sin t} = \frac{b(H \sin t + \cos t)}{\sin t}$$

$$\overline{HM} = \frac{b}{\sin t}$$

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B'T}}{\overline{HM}} = \frac{\frac{b(H \sin t + \cos t)}{\sin t}}{\frac{b}{\sin t}}$$

$$\therefore \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = 1 + \sin t \cos t$$



$$S = \frac{1}{2} \times \overline{B'T} \times \overline{AT} \quad (0 < t < \frac{\pi}{2})$$

1번 문제를 참고하면

$$S = \frac{1}{2} \times \frac{b(H \sin t + \cos t)}{\sin t} \times \frac{a(H \sin t + \cos t)}{\cos t}$$

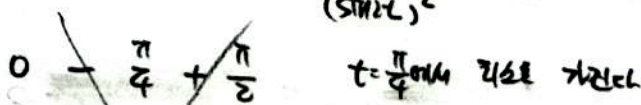
$$S = \frac{ab(H \sin t + \cos t)^2}{2 \sin t \cos t} = \frac{ab(H \sin t + \cos t)^2}{\sin 2t}$$

$$-\frac{1}{ab} S' = \frac{-2 \cos 2t (H \sin t + \cos t)^2 - 2(H \sin t + \cos t)(\cos t - \sin t) \sin 2t}{(\sin 2t)^2}$$

$$= \frac{-2(H \sin t + \cos t)(\cos t - \sin t)(\cos t + \sin t)(H \sin t + \cos t) - 2 \sin 2t \cos t}{(\sin 2t)^2}$$

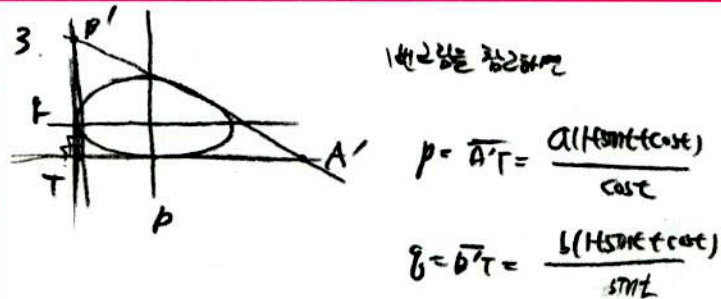
$$= \frac{-2(H \sin t + \cos t)(\cos t - \sin t)(\cos t + \sin t + 1)}{(\sin 2t)^2}$$

$$= \frac{-2(H \sin t + \cos t)^2 (\cos t - \sin t)}{(\sin 2t)^2} = \frac{2(H \sin t + \cos t)^2 (\sin t - \cos t)}{(\sin 2t)^2}$$



$$S = \frac{ab(1 + \sqrt{2})^2}{1}$$

$$\therefore S = ab(1 + \sqrt{2})^2$$



$$S = \frac{1}{2} p q = \frac{ab(H \sin t + \cos t)^2}{\sin 2t}$$

$$a(H \sin t + \cos t) = p \cos t \quad b(H \sin t + \cos t) = q \sin t$$

$$ab = \frac{pq \sin t \cos t}{(H \sin t + \cos t)^2} = f(t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{pq \sin 2t}{(H \sin t + \cos t)^2}$$

$$2f(t) = \frac{2pq \cos 2t (H \sin t + \cos t)^2 - pq \sin 2t \times 2(H \sin t + \cos t) \times (\cos t - \sin t)}{(H \sin t + \cos t)^4}$$

$$= \frac{2pq(H \sin t + \cos t) \{ \cos 2t (H \sin t + \cos t) - \sin 2t (\cos t - \sin t) \}}{(H \sin t + \cos t)^4}$$

$$= \frac{2pq(H \sin t + \cos t)(\cos t - \sin t)(1 + \sin t \cos t)}{(H \sin t + \cos t)^4}$$

$$0 + \frac{\pi}{4} - 2\pi \quad t = \frac{\pi}{4} \text{일 때 최대를 가진다.}$$

$$ab = f(t) \quad f(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2} \times \frac{pq}{(1 + \sqrt{2})^2} = \frac{pq}{2(1 + \sqrt{2})^2}$$

정답: 1번은 20, 단답: 1번은 20.102

구분: 1번은 20, 단답: 1번은 20.102

$$4 \times \frac{pq}{2(1 + \sqrt{2})^2}$$

$$\therefore 2pq(\sqrt{2} - 1)^2$$



답안지 (자연계)

답안지 바코드

지원 학과

성명

수험번호

생년월일
(예:980301)

수험생 유의 사항

1. 답안지는 검정색 펜(볼펜, 연필, 샤프)으로 작성하십시오.
(빨강색이나 파랑색 사용금지)
2. 답안지를 수정할 경우 지우개(연필, 샤프 사용 시)를 사용하거나
두 줄을 긋고(볼펜 사용 시) 그 위에 재 작성하십시오.
3. 답안과 관련 없는 표현이나 표시를 한 답안지는 "0"점 처리 됩니다.
4. 본 고사는 답안지 1장 이내에 답안을 작성하여야 합니다.
답안지 교체는 가능하지만 기존 답안지 제출은 불가합니다.

문제 1번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

1. 타원 $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}$ 는 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 이 나타낼 수 있다 ($\because (\cos^2 t + \sin^2 t = 1)$)

$(a \cos t, b \sin t)$ 에서의 접선의 방정식은 $\frac{a \cos t \cdot x}{a^2} + \frac{b \sin t \cdot y}{b^2} = 1$.

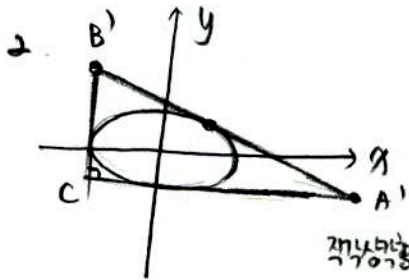
A의 좌표 = $(\frac{a}{\cos t}, 0)$ B의 좌표 = $(0, \frac{b}{\sin t})$

A'의 좌표 = $(\frac{a(1+\sin t)}{\cos t}, -b)$ B'의 좌표 = $(-a, \frac{b(1+\cos t)}{\sin t})$

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{\sqrt{\left(\frac{a(1+\sin t)}{\cos t}\right)^2 + \left(b + \frac{b(1+\cos t)}{\sin t}\right)^2}}{\sqrt{\left(\frac{a}{\cos t}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sin t}\right)^2}} = \sqrt{(1+\sin t + \cos t)^2}$$

$0 < t < \frac{\pi}{2}$ 이므로 $\sin t > 0$ 이고 $\cos t > 0$ 이므로

$$\sqrt{(1+\sin t + \cos t)^2} = 1 + \sin t + \cos t \quad \therefore \frac{A'B'}{AB} = 1 + \sin t + \cos t$$



타원 C의 방정식은 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 이다.

즉 [문제 1]-1
같은 도형이고

각각의 방정식이 타원과 접하는 점은 $(a \cos t, b \sin t)$
이 나타낼 수 있다.

접선이 $y = -b$ 와 만나는 점이 A'

$x = -a$ 와 만나는 점이 B' 이므로

직각삼각형에서 $\angle A'CB' = \frac{\pi}{2}$ 인 점을 C라고 할 때

A'의 좌표 = $(\frac{a(1+\sin t)}{\cos t}, -b)$ B'의 좌표 = $(-a, \frac{b(1+\cos t)}{\sin t})$

이로 A'C 는 x축과 평행 B'C 는 y축과 평행

$\therefore$ C의 좌표 = $(-a, -b)$

$$\text{직각삼각형의 넓이} = \left\{ \frac{a(1+\sin t + \cos t)}{\cos t} \right\} \times \left\{ \frac{b(1+\sin t + \cos t)}{\sin t} \right\} \times \frac{1}{2}$$

= f(t) 라고 하자

$$f(t) = \frac{ab(1+\sin t + \cos t)^2}{2 \sin t \cos t} \quad f(t) = \frac{ab \{ 2(1+\sin t + \cos t)(\cos t - \sin t) \sin t \cos t - (1+\sin t + \cos t)(\cos^2 t - \sin^2 t) \}}{2 \sin t \cos t}$$

$$f(t) = \frac{-(1+\sin t + \cos t)^2 (\cos t - \sin t)}{2 (\sin t \cos t)^2}$$

$0 < t < \frac{\pi}{2}$ 이므로

f'(t) = 0 이 되는 $t = \frac{\pi}{4}$ 이고

$\frac{\pi}{4} < t < \frac{\pi}{2}$ 일때 f'(t) > 0 (증가)

$0 < t < \frac{\pi}{4}$ 일때 f'(t) < 0 (감소)

$$\therefore f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \text{극대값 이자 최댓값} \quad f\left(\frac{\pi}{4}\right) = ab(1+\sqrt{2})^2$$

$$\therefore \text{직각삼각형의 넓이의 최댓값} = ab(1+\sqrt{2})^2$$

3. [문제 1]-1 과 [문제 1]-2 에서 사용한 식을
그러고 사용하자

A'C = p, B'C = q 라고 할 때

$$p = \frac{a(1+\sin t + \cos t)}{\cos t} \quad q = \frac{b(1+\sin t + \cos t)}{\sin t}$$

$$\text{타원의 장축의 길이 } 2a = \frac{2p \cos t}{1+\sin t + \cos t}, \quad 2b = \frac{2q \sin t}{1+\sin t + \cos t}$$

장축과 단축의 길이의 곱을 g(t)라 하자

$$g(t) = \frac{4pq \sin t \cos t}{(1+\sin t + \cos t)^2}$$

$$g'(t) = 4pq \frac{\{(\cos^2 t - \sin^2 t)(1+\sin t + \cos t)^2 - 2 \sin t \cos t (1+\sin t + \cos t)\}}{(1+\sin t + \cos t)^4} \times (\cos t - \sin t)$$

$$= \frac{(1+\sin t + \cos t)^2 (\cos t - \sin t)}{(1+\sin t + \cos t)^4}$$

$0 < t < \frac{\pi}{2}$ 이므로

g'(t) = 0 이 되는 $t = \frac{\pi}{4}$ 이고

$0 < t < \frac{\pi}{4}$ 일때 f'(t) > 0 (증가)

$\frac{\pi}{4} < t < \frac{\pi}{2}$ 일때 f'(t) < 0 (감소)

$\therefore f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \text{극대값 이자 최댓값}$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2pq}{(1+\sqrt{2})^2}$$

$$\therefore \text{장축과 단축의 길이의 곱의 최댓값} = \frac{2pq}{(1+\sqrt{2})^2}$$



답안지 (자연계)

답안지 바코드

지원 학과

성명

수험번호

생년월일
(예:980301)

수험생 유의사항

1. 답안지는 검정색 펜(볼펜, 연필, 샤프)으로 작성하십시오.
(빨강색이나 파랑색 사용금지)
2. 답안지를 수정할 경우 지우개(연필, 샤프 사용 시)를 사용하거나 두 줄을 긋고(볼펜 사용 시) 그 위에 재 작성하십시오.
3. 답안과 관련 없는 표현이나 표시를 한 답안지는 "0"점 처리 됩니다.
4. 본 고사는 답안지 1장 이내에 답안을 작성하여야 합니다.
답안지 교체는 가능하지만 기존 답안지 제출은 불가합니다.

문제 1번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

[1-1] 매개변수로 표현된 타원의 방정식은 다음과 같이 주어진

$$x^2 = a^2 \cos^2 t, y^2 = b^2 \sin^2 t \rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

타원 위의 점에 접선 구하기 위해 미분법을 사용한다.

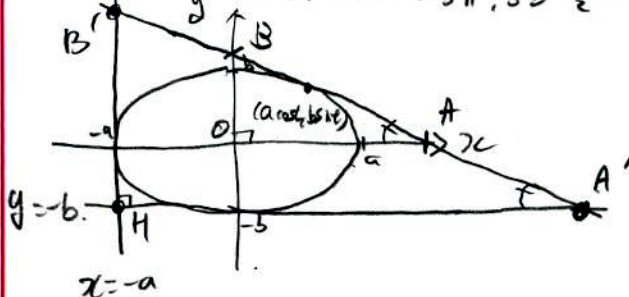
$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2y}{b^2} \frac{dy}{dx} = 0 \text{ 이므로 } \frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y} \text{ 이므로 점 } (a \cos t, b \sin t)$$

에서의 접선의 기울기는 $-\frac{b \cos t}{a \sin t}$ 이다.

따라서 접선의 방정식은 $y = -\frac{b \cos t}{a \sin t} (x - a \cos t) + b \sin t$ 이다.

이때 A 의 좌표는 $(a \cos t + \frac{a \sin^2 t}{\cos t}, 0)$ 이고 B 의 좌표는 $(0, \frac{b \cos^2 t}{\sin t} + b \sin t)$

이다. 이때 타원, 직선 AB , 점 A' , 점 B' 을 좌표평면에 표현해 보자.



$\angle BAO \cong \angle AA'H$ 이므로

원점 O를 하고 $y = -b, x = -a$ 의 교점을 H라 하면 $\triangle AOB$ 와 $\triangle AA'H$ 는

RHA 닮음이다. 따라서 $\frac{AO'}{AB}$ 의 비는 $\frac{AH}{AO}$ 의 비와 같다.

$$AO = a \cos t + \frac{a \sin^2 t}{\cos t} \text{ 이므로 } \triangle AA' \text{의 직선은 } y = -\frac{b \cos t}{a \sin t} (x - a \cos t) + b \sin t$$

와 $y = -b$ 를 연결해서 구한다. $A' = (a \cos t + \frac{a \sin^2 t}{\cos t} + \frac{a \sin t}{\cos t}, 0)$ 이므로

$$AH = a \cos t + \frac{a \sin^2 t}{\cos t} + \frac{a \sin t}{\cos t} + a \text{ 이다.}$$

$$\frac{AO'}{AO} = \frac{a \left(\frac{1 + \sin t + \cos t}{\cos t} \right)}{a \left(\frac{1}{\cos t} \right)} = 1 + \sin t + \cos t \text{ 이다.}$$

따라서 $\frac{AO'}{AB}$ 은 $1 + \cos t + \sin t$ 이다.

[1-2] 창높이가 a 만큼이고 b 인 타원 C를 포함하는 직각삼각형 중

세변이 각각 한 변에서 접하고 두 변이 각각 창높이 단락에 포함되는 직각삼각형을

문제 1의 $\triangle AA'H$ 라 하자. (변: t)

이때 변수가 t 이면서 t 에 의해 넓이가 변하는 직각삼각형의 넓이 $g(t)$ 는

$$\left(\frac{1}{2} \times AH \times BH \right) \text{ 이다. } AH \text{는 문제 1에서 구했으므로 } BH \text{를 구해 보자.}$$

점 B'의 좌표는 $x = -a$, 접선을 연결하면 $(-a, b \frac{1 + \cos t}{\sin t})$ 이다.

$$\text{따라서 } BH = b \frac{1 + \cos t}{\sin t} + b = b \frac{1 + \cos t + \sin t}{\sin t} \text{ 이다.}$$

$$\text{그러면 } g(t) = \frac{1}{2} \cdot a \left(\frac{1 + \cos t + \sin t}{\cos t} \right) \times b \left(\frac{1 + \cos t + \sin t}{\sin t} \right) \text{ 이다.}$$

타원의 각 변에 접하는 대각이므로 $(0 < t < \frac{\pi}{2})$ 인 상하 양쪽 모두 동일한 값이 나온다.

이때 $g(t)$ 의 최댓값을 구하기 위해 $g(t)$ 를 미분해 보자.

$$g(t) = \frac{1}{2} ab \cdot \frac{(1 + \cos t + \sin t)^2}{\cos t \sin t}$$

$$g'(t) = \frac{1}{2} ab \cdot \frac{2(1 + \cos t + \sin t)(\cos t - \sin t)(\cos t \sin t) - (1 + \cos t + \sin t)^2 (\cos^2 t - \sin^2 t)}{\cos^2 t \cdot \sin^2 t}$$

$$= \frac{1}{2} ab \cdot \frac{(1 + \cos t + \sin t)(\cos t - \sin t)(1 - \cos t - \sin t)}{\cos^2 t \cdot \sin^2 t}$$

$$= \frac{1}{2} ab \cdot \frac{(\cos t - \sin t)(-2 \cos t \sin t)}{\cos^2 t \sin^2 t} = -ab \cdot \frac{(\sin t - \cos t)}{\cos t \sin t} \text{ 이다.}$$

이때 $g'(t)$ 는 $\frac{\pi}{4}$ 에서 0이므로 $g(t)$ 의 종단점을 고려하자.

t	$\dots$	$\frac{\pi}{4}$	$\dots$
$g(t)$	$-$	0	$+$
$g'(t)$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$

따라서 $g(t)$ 는 $0 < t < \frac{\pi}{2}$ 에서

$t = \frac{\pi}{4}$ 에서 최댓값 $ab \cdot (3 + 2\sqrt{2})$ 를

가진다.

그러므로 문제의 조건에 해당하는 직각삼각형의 넓이의 최댓값은

$$ab \cdot (3 + 2\sqrt{2}) \text{ 이다.}$$

[1-3] 이 문제도 문제 1-1의 그림을 활용해 보자.

$$BH = p \text{ 이므로 } b \cdot \frac{1 + \cos t + \sin t}{\sin t} = p \text{ 이므로}$$

$$b = p \cdot \frac{\sin t}{1 + \cos t + \sin t} \text{ 이다.}$$

$$AH = q \text{ 이라면 } a \cdot \frac{1 + \cos t + \sin t}{\cos t} = q \text{ 이므로}$$

$$a = q \cdot \frac{\cos t}{1 + \cos t + \sin t} \text{ 이다.}$$

[문제 1]의 타원의 장축과 단축의 길이의 곱은 $2a \times b$ 이므로

$$\text{문제 3의 장축과 단축의 길이의 곱 } f(t) = 4 \cdot p \cdot q \cdot \frac{\cos t \cdot \sin t}{(1 + \cos t + \sin t)^2} \text{ 이다.}$$

문제 2와 마찬가지로 $0 < t < \frac{\pi}{2}$ 에서만 생각해 보자.

$f(t)$ 의 최댓값을 구하기 위해 $f'(t)$ 를 구해 보자.

$$f'(t) = 4pq \cdot \frac{(\cos^2 t - \sin^2 t)(1 + \cos t + \sin t)^2 - 2(1 + \cos t + \sin t)(\cos t - \sin t)(\cos t \sin t)}{(1 + \cos t + \sin t)^4}$$

$$= 4pq \cdot \frac{(4 \cos t \sin t)^2 (\cos t - \sin t)}{(1 + \cos t + \sin t)^4} = 4pq \cdot \frac{\cos t - \sin t}{(1 + \cos t + \sin t)^2} \text{ 이다.}$$

따라서 $f'(t)$ 는 $0 < t < \frac{\pi}{2}$ 에서 $t = \frac{\pi}{4}$ 일때 0이다.

종단점을 살펴보자.

t	$\dots$	$\frac{\pi}{4}$	$\dots$
$f(t)$	$+$	0	$-$
$f'(t)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$

따라서 $f(t)$ 는 $t = \frac{\pi}{4}$ 일때 극대 값을 가지며

$f(\frac{\pi}{4})$ 는 $0 < t < \frac{\pi}{2}$ 에서 $f(t)$ 의 최댓값이다.

$$f(\frac{\pi}{4}) = 2pq \cdot \frac{1}{3 + 2\sqrt{2}} = 2pq(3 + 2\sqrt{2})$$

이다.

따라서 조건에 맞는 타원의 장축과 단축의 길이의 곱의

최댓값은 $2pq(3 + 2\sqrt{2})$ 이다.