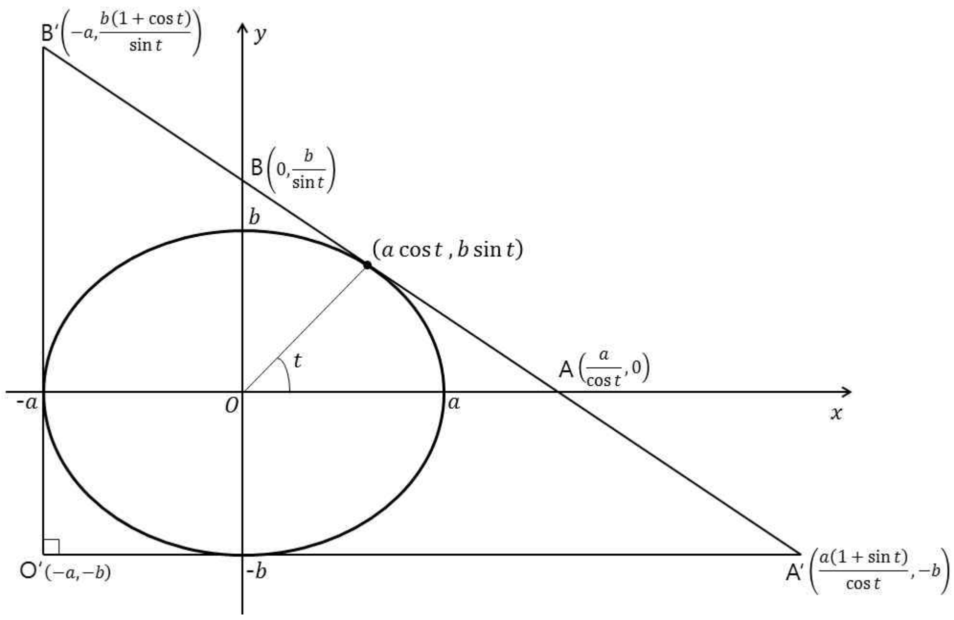
한양대학교 2018학년도 신입학전형 수시		
자 연 계	**논 술 예 시 답 안**	오전-1번

1.



점 $(a\cos t, b\sin t)$ $(0 < t < \frac{\pi}{2})$에서의 접선의 방정식은 $\frac{\cos t}{a}x + \frac{\sin t}{b}y = 1$이므로,

$\mathrm{A}\left(\frac{a}{\cos t}, 0\right)$, $\mathrm{B}\left(0, \frac{b}{\sin t}\right)$,

$\mathrm{A}'\left(\frac{a(1+\sin t)}{\cos t}, -b\right)$, $\mathrm{B}'\left(-a, \frac{b(1+\cos t)}{\sin t}\right)$

이다. 따라서 $\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{\frac{a^2}{\cos^2 t} + \frac{b^2}{\sin^2 t}}$,

$\overline{\mathrm{A'B'}} = \sqrt{\frac{a^2(1+\sin t+\cos t)^2}{\cos^2 t} + \frac{b^2(1+\cos t+\sin t)^2}{\sin^2 t}}$ 이고, $\frac{\overline{\mathrm{A'B'}}}{\overline{\mathrm{AB}}} = 1+\cos t+\sin t$이다.

2. 타원을 매개변수 곡선 $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$ $(a, b$는 양수$)$로 나타내자. 두 변이 각각 타원의 장축, 단축에 평행한 직각삼각형 중에서 넓이가 최소인 직각삼각형의 세 변은 타원과 각각 한 점에서 만난다. 이러한 삼각형은 위의 그림에서 $\triangle\mathrm{A'B'O'}$이고, 타원과 빗변 $\mathrm{A'B'}$와의 교점을 $(a\cos t, b\sin t)$ $(0 < t < \frac{\pi}{2})$라 하면, 문제 1번으로부터,

$\triangle\mathrm{A'B'O'}$의 넓이$= \triangle\mathrm{ABO}$의 넓이$\times(1+\cos t+\sin t)^2 = \frac{ab}{2}\frac{(1+\cos t+\sin t)^2}{\sin t\cos t}$이다.

$f(t) = \frac{(1+\cos t+\sin t)^2}{\sin t\cos t}$라 하면, $f'(t) = -\frac{(1+\cos t+\sin t)^2(\cos t-\sin t)}{\sin^2 t\cos^2 t}$ 이고,

$f(t)$는 오른쪽 표와 같이 $t = \frac{\pi}{4}$에서 최솟값 $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2(1+\sqrt{2})^2$를 갖는다.

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		↘	$2(1+\sqrt{2})^2$	↗	

따라서, $\triangle\mathrm{A'B'O'}$의 넓이는 $t = \frac{\pi}{4}$일 때 최소이고, 이 때 최솟값 $\frac{ab}{2}\times 2(1+\sqrt{2})^2 = ab(1+\sqrt{2})^2$ $(= ab(3+2\sqrt{2}))$를 갖는다.

3. 구하려는 타원을 매개변수 곡선 $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$ $(a, b$는 양수$)$로 나타내자. 타원의 중심과 빗변과의 교점을 잇는 선분과 타원의 한 축이 이루는 각을 t $(0 < t < \frac{\pi}{2})$ 라 하면, 문제 2번의 풀이로부터, $\triangle$의 넓이$= \frac{1}{2}pq = \frac{ab}{2}f(t)$ 이다.

$0 < t < \frac{\pi}{2}$에서 $f(t) > 0$이고 $t = \frac{\pi}{4}$일 때 $f(t)$는 최소이므로, 같은 값 $t = \frac{\pi}{4}$일 때 $\frac{1}{f(t)}$은 최대이다.

따라서 타원의 장축과 단축의 길이의 곱 $4ab = \frac{4}{f(t)}pq$는 최댓값 $\frac{4}{f\left(\frac{\pi}{4}\right)}pq = \frac{2pq}{(1+\sqrt{2})^2}$ 를 갖는다.

한양대학교 2018학년도 신입학전형 수시		
자 연 계	**논 술 예 시 답 안**	오전-2번

1.

$$f'(x)=(x-3)\cdots(x-2017)+(x-1)(x-5)\cdots(x-2017)$$
$$+(x-1)(x-3)(x-7)\cdots(x-2017)+\ \cdots\ +(x-1)(x-3)\cdots(x-2015)$$

이고,

$$f'(2)=(2-3)(2-5)\cdots(2-2017)+(2-1)(2-5)\cdots(2-2017)$$
$$+(2-1)(2-3)(2-7)\cdots(2-2017)$$
$$+\ \cdots\ +(2-1)(2-3)\cdots(2-2015)$$

이다. 한편 우변의 첫 두항의 합은

$$(2-3)(2-5)\cdots(2-2017)+(2-1)(2-5)\cdots(2-2017)$$
$$=(-1)(2-5)\cdots(2-2017)+(1)(2-5)\cdots(2-2017)=0$$

이므로

$$f'(2)=(2-1)(2-3)(2-7)\cdots(2-2017)+\ \cdots\ +(2-1)(2-3)\cdots(2-2015)$$

한편 우변의 각항은 음수 1007개의 곱이므로 역시 음수이고, $f'(2)<0$이다.

2. 우선 임의의 $a=1,3,\ldots,2017$에 대하여 $f(a)=0$이고 $f'(a)\neq 0$이므로

$$f''(a)f(a)<(f'(a))^2.$$

만약 x가 1,3, ... ,2017이 아닌 실수라면 $f(x)\neq 0$이므로

$$\frac{f(x)f''(x)-f'(x)^2}{f(x)^2}<0 \quad \text{-------}(*)$$

임을 보이면 된다. 한편

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{x-1}+\ \cdots\ +\frac{1}{x-2017}$$

이고

$$\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)'=\frac{f(x)f''(x)-f'(x)^2}{f(x)^2}=-\left(\frac{1}{(x-1)^2}+\ \cdots\ +\frac{1}{(x-2017)^2}\right)<0.$$

3. 우선

$$-1=g(\alpha)^3-1=p_1(\alpha)\cdots p_n(\alpha) \quad \text{------}(*)$$

이고 $p_i(\alpha)\,(i=1,\ldots,n)$는 정수이므로 $p_i(\alpha)=\pm 1$이고

$$h(\alpha)=p_1(\alpha)^2+\ \cdots\ +p_n(\alpha)^2-n=0.$$

한편

$$3g(x)^2g'(x)=p_1{}'(x)p_2(x)\cdots p_n(x)+\ \cdots\ +p_1(x)\cdots p_{n-1}(x)p_n{}'(x)$$

이므로

$$0=p_1{}'(\alpha)p_2(\alpha)\cdots p_n(\alpha)+\ \cdots\ +p_1(\alpha)\cdots p_{n-1}(\alpha)p_n{}'(\alpha)$$
$$=-\left(\frac{p_1{}'(\alpha)}{p_1(\alpha)}+\ \cdots\ +\frac{p_n{}'(\alpha)}{p_n(\alpha)}\right) \quad \text{---------------}\ (*\ 적용)$$
$$=-\left(p_1{}'(\alpha)p_1(\alpha)+\ \cdots\ +p_n{}'(\alpha)p_n(\alpha)\right) \quad \text{------------}\ \left(p_i(\alpha)=\pm 1=\frac{1}{p_i(\alpha)}\right)$$

이고 $h'(x)=2(p_1(x)p_1{}'(x)+\ \cdots\ +p_n(x)p_n{}'(x))$이므로 $h'(\alpha)=0$.

한양대학교 2018학년도 신입학전형 수시 논술고사		
자 연 계	**출제 의도 및 평가 지침**	오전-1번

1. 출제 의도 및 문제 해설

자연계열 오전-1번 문제는 고교수학과정 중 “기하와 벡터-평면곡선-이차곡선” 단원의 타원, “기하와 벡터-평면곡선-평면곡선의 접선” 단원의 매개변수로 나타낸 함수의 미분법과 접선의 방정식, 그리고 “미적분II-미분법-여러가지 함수의 미분법” 단원의 합성함수의 미분법을 주요 내용으로 하고 있다. 미분법 등의 중요한 도구들을 적절히 활용해서 좌표평면에 있는 타원 등의 도형들이 갖고 있는 성질들을 이해하고, 정확한 논증을 통해 원하는 결과를 도출할 수 있는지를 묻고 있다. 다음 3개의 소문항으로 구성되어 있다.

문항 1. 매개변수로 나타낸 곡선의 방정식으로부터, 곡선의 모양과 관련 성질을 이끌어 내고 활용하기.
문항 2. 주어진 조건을 만족하는 직각삼각형의 넓이를 미분법의 기술을 적절히 활용하여 구하기.
문항 3. 직각삼각형과 그 안에 들어있는 주어진 조건을 만족하는 타원과의 관계를 이해하고 이러한 타원의 성질을 이끌어내기.

2. 종합 평가 기준

문항	배점	세부 평가 기준	세부 배점
1	30	좌표평면에서 주어진 조건을 만족하는 네 점 A, B, A′, B′의 좌표를 구했는가?	10
		길이의 비 $\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$를 t에 대한 식으로 적절히 나타냈는가?	20
2	40	주어진 조건을 만족하는 직각삼각형의 넓이에 대한 적절한 식을 세웠는가?	20
		주어진 조건을 만족하는 직각삼각형의 넓이의 최솟값을 구했는가?	20
3	30	직각삼각형의 넓이와 주어진 타원의 장축과 단축의 길이의 곱의 관계를 표현하는 식을 세웠는가?	10
		타원의 장축과 단축의 길이의 곱의 최댓값을 구했는가?	20

한양대학교 2018학년도 신입학전형 수시 논술고사

자 연 계 | **출제 의도 및 평가 지침** | 오전-2번

1. 출제 의도 및 문제 해설

자연계 오전 문제 2번은 다항함수와 분수함수의 미분법을 이용하여 주어진 성질을 파악할 수 있는지를 묻고 있다. 특별히 3번 문항의 경우는 계수가 정수인 다항식, 정수해라는 조건을 정확히 파악하여 활용할 수 있는지를 묻고 있다. 주어진 조건들을 활용하여 새로운 성질을 찾아낼 수 있는 논리적 사고력이 있는지, 다항식, 분수식의 미분을 활용할 수 있는지를 파악하고자 하는데 출제의도가 있다.

2. 종합 평가 기준

문항	배점	세부 평가 기준	세부 배점
1	20	$f'(2) \neq 0$임을 보였는가?	20
2	40	$x = 1,3,\ldots,2017$일 때 $f''(x)f(x) < (f'(x))^2$이 성립함을 보였는가?	10
		$x \neq 1,3,\ldots,2017$일 때 $f''(x)f(x) < (f'(x))^2$이 성립함을 보였는가?	30
3	40	$h(\alpha) = 0$임을 보였는가?	10
		$h'(\alpha) = 0$임을 보였는가?	30