한양대학교 2018학년도 신입학전형 수시		
자 연 계	**모 의 논 술 예 시 답 안**	1 번

1. 만약 $x_m = x_{m+l}$ 인 자연수 m과 l이 존재한다면,

$\dfrac{1}{p(x_m)} + \sum_{k=1}^{m-1} \dfrac{1}{x_k} = 1$ 이고 $\dfrac{1}{p(x_{m+l})} + \sum_{k=1}^{m+l-1} \dfrac{1}{x_k} = 1$ 이므로

=> $\dfrac{1}{p(x_m)} + \sum_{k=1}^{m-1} \dfrac{1}{x_k} = 1 = \dfrac{1}{p(x_{m+l})} + \sum_{k=1}^{m+l-1} \dfrac{1}{x_k}$

=> $\dfrac{1}{p(x_m)} - \dfrac{1}{p(x_{m+l})} = \sum_{k=m}^{m+l-1} \dfrac{1}{x_k}$

$p(x_m) = p(x_{m+l})$ 이므로 $\sum_{k=m}^{m+l-1} \dfrac{1}{x_k} = 0$ 이다. 이는 모순이다.

그러므로 $x_m = x_{m+l}$ 인 자연수 m과 l이 존재하지 않는다.

2. 1번에서 모든 자연수 n에 대해서 $x_n \neq x_{n+1}$ 이므로

임의의 x_n에 대해서 $\dfrac{1}{p(x_n)} - \dfrac{1}{p(x_{n+1})} = \dfrac{1}{x_n} > 0$ 이므로 $p(x_n) < p(x_{n+1})$ 이다. ---(1)

그러므로 $\lim_{n\to\infty} p(x_n)$ 은 발산한다.

3. $\dfrac{1}{p(x_2)} + \dfrac{1}{x_1} = 1$ 이므로 $x_1 = 2$, $p(x_2) = 2$ 이다.

x_1	$p(x_2)$
2	2

$x_1 = 2$, $p(x_1) = 1$ => $\dfrac{1}{p(x_3)} + \dfrac{1}{x_2} = \dfrac{1}{2}$ 이므로 다음과 같은 3가지 경우를 고려할 수 있다.

=> { $p(x_3) = x_2 = 2^2$ }, { $p(x_3) = 3$, $x_2 = 6$ }, { $p(x_3) = 6$, $x_2 = 3$ }

x_2	$p(x_3)$
3	6
4	4
6	3

=> { $p(x_3) = x_2 = 2^2$ } => $\dfrac{1}{p(x_4)} + \dfrac{1}{x_3} = \dfrac{1}{2^2}$ =>

x_3	$p(x_4)$	x_3	$p(x_4)$
5	20	12	6
6	12	20	5
8	8		

{ $p(x_3) = 3$, $x_2 = 6$ } => $\dfrac{1}{p(x_4)} + \dfrac{1}{x_3} = \dfrac{1}{3}$ =>

x_3	$p(x_4)$
4	12
6	6
12	4

{ $p(x_3) = 6$, $x_2 = 3$ } => $\dfrac{1}{p(x_4)} + \dfrac{1}{x_3} = \dfrac{1}{6}$ =>

x_3	$p(x_4)$	x_3	$p(x_3)$
7	42	15	10
8	24	18	9
9	18	24	8
10	15	42	7
12	12		

이런 방법으로 계속 하다보면 제한된 시간에 $p(x_4)$를 구하기에 시간이 부족하다.

혹은 $x_n = 2^n$ 이고 다항식은 $p(x) = \dfrac{1}{2}x$ 임을 유추할 수 있는데, 이런경우는 부분점수.

그런데, 모든 자연수 n 에 대해서 $\frac{1}{p(x_{n+1})}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}=1$ 를 만족하므로

=> $\frac{1}{p(x_n)}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{x_k}=1=\frac{1}{p(x_{n+1})}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}$

=> $\frac{1}{p(x_n)}-\frac{1}{x_n}=\frac{1}{p(x_{n+1})}>0$

=> $\frac{1}{p(x_n)}-\frac{1}{x_n}>0$

=> $0<\frac{p(x_n)}{x_n}<1$ -- (2)

위의 (2) 에 의해 모든 n 에 대해서 $0<\frac{p(x_n)}{x_n}<1$ 를 만족하고

(1)에 의해 $f(x_n)$ 값은 n 이 커짐에 따라 증가하고 수열 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 는 서로 다른 자연수들로 이루어져

있으므로 수열 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 도 증가수열이고 다항식 $p(x)$ 의 차수는 1 이하임. ------------(3)

(3) 에의해서 $p(x_1)=1$ 이고 $p(x_2)=2$ 이므로 다항식 $p(x)$ 는 상수함수가 아니다.
그러므로 다항식은 $p(x)=cx$ 이다.

$x_1=2$, $p(x_1)=1$ => $f(2)=2c=1$ => $c=\frac{1}{2}$ => $p(x)=\frac{1}{2}x$

$p(x_2)=2$ => $p(x_2)=\frac{1}{2}x_2=2$ => $x_2=4$

$p(x_3)=4$ => $p(x_3)=\frac{1}{2}x_3=4$ => $x_3=8$

.... $x_n=2^n$ 이고 다항식은 $p(x)=\frac{1}{2}x$

$p(x_4)=8$

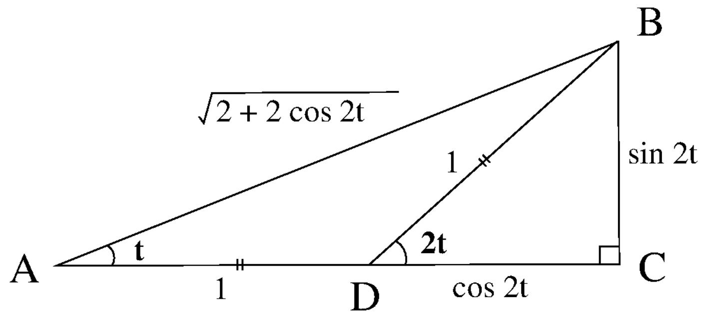
한양대학교 2018학년도 신입학전형 수시		
자 연 계	**모 의 논 술 예 시 답 안**	2 번

1.

아래 그림에서, 임의의 $0 < t < \frac{\pi}{4}$ 에 대해, $\cos t = \frac{1+\cos 2t}{\sqrt{2+2\cos 2t}} = \sqrt{\frac{1+\cos 2t}{2}}$ 이다.

따라서 $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{2}}$ 로 할 수 있다.

이때, $f(\cos 0) = \sqrt{\frac{1+1}{2}} = 1 = \cos 0$, $f\left(\cos\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+0}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ 이므로, $0 \le t \le \frac{\pi}{4}$ 일 때, $\cos t = f(\cos 2t)$ 가 성립한다.



2.

$a_1 = \sqrt{2} = 2\cos\frac{\pi}{4} = 2\cos\frac{\pi}{2^2}$,

$a_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}} = \sqrt{2+a_1} = 2\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}} = 2f\left(\cos\frac{\pi}{4}\right) = 2\cos\frac{\pi}{8} = 2\cos\frac{\pi}{2^3}$,

$a_3 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \sqrt{2+a_2} = 2\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{8}}{2}} = 2f\left(\cos\frac{\pi}{8}\right) = 2\cos\frac{\pi}{16} = 2\cos\frac{\pi}{2^4}$, ...

로부터 $a_n = 2f\left(\cos\frac{\pi}{2^n}\right) = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$ 임을 알 수 있다. 따라서 극한값은 $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}} = 2 \cdot 1 = 2$ 이다.

3.

$$b_m = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\sqrt{1+\cos\frac{\pi k}{2^m n}} = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(\cos\frac{\pi k}{2^m n}\right)\frac{\pi}{n} = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{\pi k}{2^{m+1}n}\right)\frac{\pi}{n}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\pi}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2^{m+1}}k}{n}\right)\frac{\frac{\pi}{2^{m+1}}}{n}2^{m+1} = \frac{\sqrt{2}}{\pi}2^{m+1}\int_0^{\frac{\pi}{2^{m+1}}}\cos t\,dt = \frac{\sqrt{2}}{\pi}2^{m+1}\sin\frac{\pi}{2^{m+1}}$$

이다. 따라서 b_1 은 $\frac{\sqrt{2}}{\pi}2^{1+1}\sin\frac{\pi}{2^{1+1}} = \frac{4}{\pi}$ 이고

$$\lim_{m\to\infty} b_m = \lim_{m\to\infty}\frac{\sqrt{2}}{\pi}2^{m+1}\sin\frac{\pi}{2^{m+1}} = \lim_{m\to\infty}\sqrt{2}\,\frac{\sin\frac{\pi}{2^{m+1}}}{\frac{\pi}{2^{m+1}}} = \sqrt{2} \cdot 1 = \sqrt{2}$$ 이다.

한양대학교 2018학년도 신입학전형 수시 모의논술고사

자 연 계	출제 의도 및 평가 지침	1 번

1. 출제 의도 및 문제 해설

고등학교 수학교과를 정상화하기 위하여 철저하게 교과서를 중심으로 출제하였으며, 정상적인 수학교과를 이수한 수험생이면 충분하게 풀 수 있는 문제를 출제하였다. 1번에서는 주어진 조건 방정식에서 서로다른 두 x_m, x_{m+l}에서는 $x_m \neq x_{m+l}$ 임을 파악하고 2번에서는 함수 값$p(x_n)$이 n이 커짐에 따라 증가함을 파악하여 3번에서는 다항식 $f(x)$의 최대 차수를 구하여야 한다. 다항식 $p(x)$가 원점을 지나는 선형식임을 파악하여 수열과 함수를 구하는 문제이다. 3번은 1번과 2번의 결과를 이용할 수 있는 지를 묻고 있다.

* 학생들이 몇 번의 시도를 통하여 수열과 함수를 유추할 수 있는데, 1번과 2번에서는 예를 들어서 증명한 경우는 정답으로 인정되지 않음을 주의.

2. 종합 평가 기준

문항	배점	세부 평가 기준	세부 배점
1	20	자연수 조건과 제시된 조건식을 이용하여 $\frac{1}{p(x_m)} - \frac{1}{p(x_{m+l})} = \sum_{k=m}^{m+l-1} \frac{1}{x_k}$ 를 유도하였는가? * 수열과 함수의 예를 들어서 증명한 경우는 0점	20
2	30	관계식 $\frac{1}{p(x_n)} - \frac{1}{p(x_{n+1})} = \frac{1}{x_n} > 0$ 을 잘 이용하여 $p(x_n) < p(x_{n+1})$ 를 보였는가? * 수열과 함수의 예를 들어서 증명한 경우는 0점	30
3	50	수열은 증가수열이고 다항식의 차수가 1임을 유추하였는가? * $x_n = 2^n$ 과 $p(x) = \frac{1}{2}x$ 를 유추한 경우도 해당	20
		수열과 함수를 논리적으로 구하였는가?	30

3. 출제 근거

수열(수학I), 다항식(수학I)

한양대학교 2018학년도 신입학전형 수시 모의논술고사

자 연 계	**출제 의도 및 평가 지침**	2 번

1. 출제 의도 및 문제 해설

자연계열 모의논술 2번 문제는 고교수학과정 중 “미적분II - 삼각함수” 단원의 삼각함수의 뜻과 삼각함수의 극한, “미적분II-적분법” 단원의 삼각함수의 적분, 정적분과 급수 등을 주요 내용으로 하고 있다. 수업시간에 배운 중요한 수학적 도구들을 적절히 활용해서 함수의 관계식을 구하고 주어진 수열의 수렴 발산 여부를 판정하고 그 극한값을 구하는 과정에서, 정확한 논증을 통해 원하는 결과를 도출할 수 있는지를 묻고 있다. 다음 3개의 소문항으로 구성되어 있다.

문항 1. 주어진 그림을 이용해서 특정한 성질을 만족하는 함수의 관계식을 구하기.
문항 2. 귀납적으로 주어진 수열의 수렴 발산 여부를 판정하고 그 극한값을 구하기.
문항 3. 정적분으로 표현된 수열의 극한값을 구하기.

2. 종합 평가 기준

문항	배점	세부 평가 기준	세부 배점
1	20	$\cos t$를 $\cos 2t$에 관한 식으로 표현하고 함수의 관계식을 구했는가.	20
2	40	주어진 수열의 일반항을 코사인 함수를 포함한 식으로 적절히 변형했는가.	20
		주어진 수열의 극한값을 구했는가.	20
3	40	주어진 수열의 일반항을 정적분의 정의식을 이용해서 잘 정리하고 수열의 제1항을 구했는가.	20
		삼각함수의 극한식을 활용해서 주어진 수열의 일반항을 구했는가.	20

3. 출제 근거

교과서 미적분II (미래엔 이강섭 외 14인) - 삼각함수 - 삼각함수의 뜻과 그래프 p. 49-58.
교과서 미적분II (동아출판 우정호 외 24인) - 삼각함수 - 삼각함수의 미분 - 삼각함수의 극한 p. 105-107
교과서 미적분II (비상교육 김원경 외 11인) - 적분법 - 여러 가지 적분법 - 여러 가지 함수의 적분 p. 137-138
교과서 미적분II (동아출판 우정호 외 24인) - 적분법 - 정적분 - 여러 가지 함수의 정적분 p. 203-204

한양대학교

답안지 (자연계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지
		1/6

[문제 1-1]

제시문 다. 에서 $\frac{1}{p(x_{n+1})} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}$ 이므로, $\frac{1}{p(x_n)} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{x_k}$ 이고

$$\begin{array}{rl} & \frac{1}{p(x_{n+1})} + \frac{1}{x_n} + \frac{1}{x_{n-1}} + \cdots + \frac{1}{x_1} = 1 \\ - & \frac{1}{p(x_n)} + \frac{1}{x_{n-1}} + \frac{1}{x_{n-2}} + \cdots + \frac{1}{x_1} = 1 \\ \hline & \frac{1}{p(x_{n+1})} + \frac{1}{x_n} - \frac{1}{p(x_n)} = 0. \end{array}$$

$\therefore \frac{1}{p(x_{n+1})} = \frac{1}{p(x_n)} - \frac{1}{x_n}$

x_n과 $p(x_n)$은 모두 자연수이므로 $\frac{1}{p(x_n)} > 0$ 이고 $\frac{1}{x_n} > 0$ 인데,

$\frac{1}{p(x_{n+1})} = \frac{1}{p(x_n)} - \frac{1}{x_n} = \left(\frac{1}{p(x_{n-1})} - \frac{1}{x_{n-1}}\right) - \frac{1}{x_n} = \frac{1}{p(x_{n-1})} - \frac{1}{x_{n-1}} - \frac{1}{x_n}$ 으로 $\frac{1}{p(x_n)}$은 $n \to \infty$일수록 점점 작아진다.

2번째 제시문에서 $p(x)$는 다항식이고 $p(0) = 0$, $p(x_1) = 1$ 이라고 했으므로, $p(x)$는 원점과 양의 x좌표값에 1의 y좌표값을 가지는 또다른 한 점을 지나는 그래프를 그리므로 함수 $p(x)$는 정의역 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n \cdots\}$ 에 대해 일대일 대응이다. 따라서 $x_m = x_l$ 인 서로 다른 자연수 m과 l은 존재하지 않는다.

한양대학교	답안지 (자연계열)	
수 험 번 호	성 명	페 이 지
		2/6

[문제 1-2]

문제 1-1 에서 도출해낸 $\frac{1}{p(x_{n+1})} = \frac{1}{p(x_n)} - \frac{1}{x_n}$ 에서 보면 다항식 $p(x)$가 $x>0$에서 단조증가 함수인데,

$p(x_n) = x_n$이 되버리면 $\frac{1}{p(x_{n+1})} = 0$ 이 되어 조건에 모순이므로 $p(x)$의 그래프는 무조건 $y=x$ 그래프 아래에

있어야 한다. 따라서 $p(x)$는 이차 이상의 차수를 가지면 안되므로 일차함수이고 원점을 지나므로

기울기를 임의의 실수 K로 하여 $y = p(x) = Kx$ 이다. (단, $0<K<1$)

또한 $p(x_n)$과 x_n 모두 자연수여야 하므로 $K = \frac{1}{(자연수N)}$ 이어야 하고 x_n은 N의 배수여야 한다.

$N=2$일 때, $K=\frac{1}{2}$, $p(x_1) = 1 = \frac{1}{2}x_1$ $\therefore x_1 = 2$, $\frac{1}{p(x_2)} = \frac{1}{p(x_1)} - \frac{1}{x_1} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, $p(x_2) = 2$

$p(x_2) = 2 = \frac{1}{2}x_2$ $\therefore x_2 = 4$, $\frac{1}{p(x_3)} = \frac{1}{p(x_2)} - \frac{1}{x_2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$, $p(x_3) = 4$.

$\vdots$

$N=3$일 때, $K=\frac{1}{3}$, $p(x_1) = 1 = \frac{1}{3}x_1$ $\therefore x_1 = 3$, $\frac{1}{p(x_2)} = \frac{1}{p(x_1)} - \frac{1}{x_1} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$. $p(x_2) = \frac{3}{2}$

($p(x_n)$은 자연수란 조건에 모순)

$\therefore N=2$일 때만 성립하고, $p(x) = \frac{1}{2}x$, 위에서 보았듯이 $p(x_n)$은 발산한다.

한양대학교

답안지 (자연계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지
		3/6

[문제 1-3]

문제 1-2에서 $p(x)=\frac{1}{2}x$ 이므로,

$p(x_1)=1=\frac{1}{2}x_1 \quad \therefore x_1=2,\ \frac{1}{p(x_2)}=\frac{1}{p(x_1)}-\frac{1}{x_1}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2},\ p(x_2)=2$

$p(x_2)=2=\frac{1}{2}x_2 \quad \therefore x_2=4,\ \frac{1}{p(x_3)}=\frac{1}{p(x_2)}-\frac{1}{x_2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4},\ p(x_3)=4$

$p(x_3)=4=\frac{1}{2}x_3 \quad \therefore x_3=8,\ \frac{1}{p(x_4)}=\frac{1}{p(x_3)}-\frac{1}{x_3}=\frac{1}{4}-\frac{1}{8}=\frac{1}{8},\ p(x_4)=8.$

$\therefore p(x_4)=8$

한양대학교	답안지 (자연계열)	
수 험 번 호	성 명	페 이 지
		4/6

[문제 2-1]

$\overline{CD} = \overline{BD}\cos 2t$, $\overline{AC} = \overline{AD} + \overline{CD} = \overline{AD} + \overline{BD}\cos 2t = \overline{AD}(1+\cos 2t) \cdots ①$ $(\because \overline{AD} = \overline{BD})$

삼각형 ABD에서 $\overline{AB}$의 중점을 M이라 하고 $\overline{MD}$를 그으면 △ABD가 이등변삼각형이기 때문에

△AMD는 ∠AMD=90°인 직각삼각형이 된다. 따라서 $\cos t = \dfrac{\overline{AM}}{\overline{AD}}$, $\overline{AB} = 2\overline{AM} = 2\overline{AD}\cos t \cdots ②$

△ABC에서 $\cos t = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{AD}(1+\cos 2t)}{2\overline{AD}\cos t} = \dfrac{1+\cos 2t}{2\cos t}$ $(\because ①, ②)$

$2\cos^2 t = 1+\cos 2t$, $\cos t = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos 2t}{2}}$, 하지만 $0 \le t \le \frac{\pi}{4}$ 이므로 $\cos t > 0$ 이어야 해서

$\cos t = \sqrt{\dfrac{1+\cos 2t}{2}}$ $\therefore f(x) = \sqrt{\dfrac{1+x}{2}}$ (단, $0 \le x \le 1$)

[문제 2-2]

위 문제에서 $\cos t = \sqrt{\frac{1+\cos 2t}{2}}$ 였으므로, $2\cos t = \sqrt{2+2\cos 2t}$ 이다.

$\cos 2t = 0$ 이고, $2\cos t = a_1$ 이면, $2\cos t = \sqrt{2+0} = \sqrt{2} = a_1$

$a_2 = 2\cos\frac{t}{2}$ 이면, $a_2 = 2\cos\frac{t}{2} = \sqrt{2+2\cos t} = \sqrt{2+\sqrt{2}}$

$a_3 = 2\cos\frac{t}{4}$ 이면, $a_3 = 2\cos\frac{t}{4} = \sqrt{2+2\cos\frac{t}{2}} = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

$\vdots$

$a_n = 2\cos\frac{t}{2^{n-1}}$ 이면, $a_n = 2\cos\frac{t}{2^{n-1}} = \sqrt{2+2\cos\frac{t}{2^{n-2}}} = \sqrt{2+a_{n-1}}$.

$0 \le t \le \frac{\pi}{4}$ 이었으므로 $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 2\cos\frac{t}{2^{n-1}} = 2\cos 0 = 2$

$\therefore$ a_n은 수렴하고 $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$

5

[문제 2-3]

$m=1$일 때, $b_1 = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\sqrt{1+\cos\frac{k\pi}{2n}}$ 이고, $\frac{k}{n}=x_k$, $\frac{1}{n}=\Delta x$ 라 하면, $x_1=\frac{1}{n}$, $x_n=1$ 이고.

$b_1 = \lim_{n\to\infty}\Delta x\cdot\left(\sqrt{1+\cos\frac{\pi}{2}x_1}+\sqrt{1+\cos\frac{\pi}{2}x_2}+\cdots+\sqrt{1+\cos\frac{\pi}{2}x_n}\right) = \int_0^1\sqrt{1+\cos\frac{\pi}{2}x}\,dx = \int_0^1\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}x\,dx$ ($\because$ 문제2-1)

$= \left[\frac{4\sqrt{2}}{\pi}\sin\frac{\pi}{4}x\right]_0^1 = \frac{4\sqrt{2}}{\pi}\sin\frac{\pi}{4} - \frac{4\sqrt{2}}{\pi}\sin 0 = \frac{4}{\pi}$ $\quad\therefore$ $m=1$일 때 $b_1=\frac{4}{\pi}$

$b_1 = \int_0^1\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{2^{m+1}}x\,dx$ 였으므로, $b_m = \int_0^1\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{2^{m+1}}x\,dx = \left[\frac{2^{m+1}\sqrt{2}}{\pi}\sin\frac{\pi}{2^{m+1}}x\right]_0^1 = \frac{2^{m+1}\sqrt{2}}{\pi}\sin\frac{\pi}{2^{m+1}} - \frac{2^{m+1}\sqrt{2}}{\pi}\sin 0$

$\therefore b_m = \frac{2^{m+1}\sqrt{2}}{\pi}\sin\frac{\pi}{2^{m+1}}$, $\lim_{m\to\infty} b_m = \lim_{n\to\infty}\frac{2^{m+1}\sqrt{2}}{\pi}\sin\frac{\pi}{2^{m+1}}$, $\frac{\pi}{2^{m+1}}=K$ 라 치환하면, $\lim_{m\to\infty}\frac{\pi}{2^{m+1}} = \lim_{K\to 0}K$

$\lim_{m\to\infty} b_m = \lim_{n\to\infty}\frac{2^{m+1}\sqrt{2}}{\pi}\sin\frac{\pi}{2^{m+1}} = \lim_{K\to 0}\frac{\sqrt{2}\sin K}{K} = \sqrt{2}$, $\lim_{m\to\infty} b_m = \sqrt{2}$

한양대학교

답안지 (자연계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지
		1/6

[문제 1-1]

$x_m = x_{m+l}$을 만족시키는 서로 다른 자연수 m과 l이 존재한다고 가정하자.

임의의 자연수 n에 대하여

$$\frac{1}{P(x_{n+1})} = 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}$$

이 성립하므로

$$\frac{1}{P(x_m)} = \begin{cases} 1 & (m=1) \\ 1 - \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{x_k} & (m \geq 2) \end{cases}$$

$$\frac{1}{P(x_{m+l})} = 1 - \sum_{k=1}^{m+l-1} \frac{1}{x_k}$$

이다. 이때

$x_m = x_{m+l}$이므로

$P(x_m) = P(x_{m+l})$이다.

i) $m=1$인 경우

$$1 = P(x_m) = P(x_{m+l}) = 1 - \sum_{k=1}^{m+l-1} \frac{1}{x_k}$$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{m+l-1} \frac{1}{x_k} = 0$이 되어야 하는데

x_i는 자연수로 이루어진 무한수열이므로

임의의 자연수 i에 대하여 $x_i > 0$이다.

$\therefore \sum_{k=1}^{m+l-1} \frac{1}{x_k} = 0 > 0 \rightarrow$ 모순

ii) $m \geq 2$인 경우

$$\frac{1}{P(x_{m+l})} - \frac{1}{P(x_m)} = \left(1 - \sum_{k=1}^{m+l-1} \frac{1}{x_k}\right) - \left(1 - \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{x_k}\right)$$

$$= -\sum_{k=m}^{m+l-1} \frac{1}{x_k}$$ 인데

$x_i > 0$이므로 $-\sum_{k=m}^{m+l-1} \frac{1}{x_k} < 0$이 된다.

그런데 $x_{m+l} = x_m$이어서 $P(x_{m+l}) = P(x_m)$이 되어야 하므로 이는 모순이다.

$\therefore$ 존재하지 않는다

[문제 1-2]

$n\geq 2 \rightarrow \frac{1}{P(x_{n+1})} - \frac{1}{P(x_n)} = \left(1-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}\right) - \left(1-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{x_k}\right)$

$= -\frac{1}{x_n} < 0$ 이므로

$\frac{1}{P(x_{n+1})} < \frac{1}{P(x_n)}$ 인데 $P(x_n), P(x_{n+1})$은 자연수이므로

$P(x_{n+1}) > P(x_n)$, 즉 $P(x_n)$은 증가수열이다.

$P(x)$는 다항식이므로 $y=P(x)$는 연속함수이다. 따라서

$\lim_{n\to\infty} P(x_n) = P(\lim_{n\to\infty} x_n)$ 이다.

따라서 만약 $P(x_n)$이 수렴하려면 x_n 또한 수렴해야 한다.

x_n이 수렴한다고 가정하자.

let $\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$ $(\alpha\in\mathbb{N})$

if $P(\alpha)\neq 0$

~~따라서~~ 항상 $\frac{1}{P(x_{n+1})} - \frac{1}{P(x_n)} = -\frac{1}{x_n}$ 이 성립하므로

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{P(x_{n+1})} - \frac{1}{P(x_n)} + \frac{1}{x_n} = 0$ 이 되어야 한다. ... ①

그런데 $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \alpha$ 이므로

① $\rightarrow \frac{1}{P(\lim_{n\to\infty} x_{n+1})} - \frac{1}{P(\lim_{n\to\infty} x_n)} + \frac{1}{\lim_{n\to\infty} x_n} = \cancel{\frac{1}{P(\alpha)}} - \cancel{\frac{1}{P(\alpha)}} + \frac{1}{\alpha} = 0$ 이

되어야 한다. $\rightarrow$ 모순 ($\because \alpha > 0$)

if $P(\alpha) = 0$

$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} = \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{P(x_{n+1})}$ ~~따라서~~ 인데

$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} > 0$ 이므로 $P(x_{n+1}) > 1$ 이 되어야 하는데

$1 < \lim_{n\to\infty} P(x_n) = 0$ 이 되어 모순이다.

$\therefore$ 발산한다

한양대학교

답안지 (자연계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지
		3/6

[문제 1-3]

$$\frac{1}{P(x_{m+1})} = \frac{1}{P(x_m)} - \frac{1}{x_m}$$

이때 $P(x_{m+1}) > 0$ 이므로

$\frac{1}{P(x_m)} - \frac{1}{x_m} > 0$, 즉 $\frac{1}{P(x_m)} > \frac{1}{x_m}$ 이다.

따라서 $m \geq 2$일때

$P(x_m) < x_m$ 이다.

이때 하나의 자연수 n에 대하여 한 개의

x_k가 대응되~~므로~~고

$P(x)$는 다항식이므로

$x \geq 1$일때 $P(x) < x$ 이 되어야한다.

$\because$ if $P(x)$가 어느 한 c값에 대하여

$P(c) \geq c$가 될 경우 $(c \geq 2)$

~~c보다 큰 자연수 u에 대하여~~ 어떠한 자연수 t에 대해

$x_t = u$가 되는 $(u > c)$ t가 존재하므로

모순이다.

$\therefore P(x) < x \quad (x \geq 2)$

이를 만족하는 $P(x)$는 $y = kx$ 꼴 뿐이다. $(k < 1)$ ($\because$ 차수가 1보다 클 경우 반드시 $P(x) > x$ 인 x가 생기므로 일차함수이고, $P(0) = 0$이기 때문)

$\frac{1}{P(x_2)} = 1 - \frac{1}{x_1}$ 인데

$P(x_2)$가 자연수가 되는 x_1은 2 뿐이므로

$x_1 = 2$, $P(x_1) = 1$ 이다. $\rightarrow k = \frac{1}{2}$

~~$\therefore P(x) = \frac{1}{2}x$~~

$P(x_2) = 2 \Rightarrow x_2 = 4 \quad \left(\because \frac{1}{P(x_3)} = \frac{1}{P(x_2)} - \frac{1}{x_2} = \frac{1}{4},\ x_2 = 2P(x_2)\right)$

$\rightarrow P(x_3) = 4 \Rightarrow x_3 = 8$ (같은 이유로)

$\rightarrow P(x_4) = 8$ 이다.

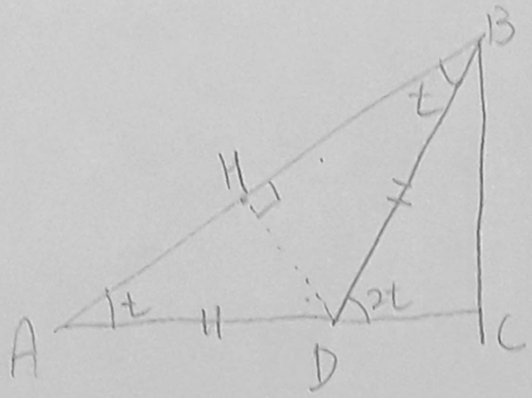
$\boxed{\therefore P(x_4) = 8}$

한양대학교

답안지 (자연계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지
		4/6

[문제 2-1]



$\overline{AD}=1$ 이라고 하자.

$\overline{CD}=\cos 2t$

$\overline{BC}=\sin 2t=\sqrt{1-\cos^2 2t}$ (피타고라스 정리)

D에서 $\overline{AB}$에 수선을 내린 점을 H라고 하자.

$\overline{AH}=\overline{BH}=\cos t$

$\overline{AB}=2\cos t$

$(2\cos t)^2=(1+\cos 2t)^2+\left(\sqrt{1-\cos^2 2t}\right)^2$

$4\cos^2 t=1+2\cos 2t+\cancel{\cos^2 2t}+1-\cancel{\cos^2 2t}$

$\cos^2 t=\dfrac{1+\cos 2t}{2}$

$\cos t=\pm\sqrt{\dfrac{1+\cos 2t}{2}}$

이 때 $(0\le t\le \frac{\pi}{4})$ 이므로

$\cos t=\sqrt{\dfrac{1+\cos 2t}{2}}\ \Rightarrow\ f(x)=\sqrt{\dfrac{1+x}{2}}\ (0\le x\le 1).$

한양대학교 답안지 (자연계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지
		5/6

[문제 2-2]

$a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}$

$\frac{a_n}{2} = \sqrt{\frac{2 + a_{n-1}}{4}}$

$= \sqrt{\frac{1 + \frac{a_{n-1}}{2}}{2}}$

$\frac{a_n}{2} = f\left(\frac{a_{n-1}}{2}\right)$

$\frac{a_n}{2} = f^{n-1}\left(\frac{a_1}{2}\right)$

(1)에서 $f(\cos 2t) = \cos t \Rightarrow f(\cos t) = \cos \frac{t}{2} \quad \left(0 \le t \le \frac{\pi}{2}\right)$

$\Rightarrow f(f(\cos t)) = f\left(\cos \frac{t}{2}\right) = \cos \frac{t}{2^2}$

$\rightarrow f^{n-1}(\cos t) = \cos \frac{t}{2^{n-1}}$

$\Rightarrow a_1 = \sqrt{2}, \quad f^{n-1}\left(\frac{a_1}{2}\right) = f^{n-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$= f^{n-1}\left(\cos \frac{\pi}{4}\right)$

$= \cos \frac{\frac{\pi}{4}}{2^{n-1}}$

$= \cos \frac{\pi}{2^{n+1}}$

$\rightarrow a_n = 2 \cdot f^{n-1}\left(\frac{a_1}{2}\right) = 2 \cdot \cos \frac{\pi}{2^{n+1}}$

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 2 \cdot \cos \frac{\pi}{2^{n+1}} = 2.$

한양대학교

답안지 (자연계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지
		6/6

[문제 2-3]

$$b_1 = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \sqrt{1+\cos \frac{k}{2n}\pi}$$

$\downarrow \frac{1}{n} = dx,\ \frac{k}{n} = x$ 치환

$$= \int_0^1 \sqrt{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}\, dx$$

$$= \int_0^1 \sqrt{\frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{2}} \cdot \sqrt{2}\, dx$$

$$= \int_0^1 \sqrt{2} \cdot \left|\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)\right| dx \Rightarrow \left(\cos\frac{\pi}{4}x\text{는 범위 내에서 항상 양수}\right).$$

$$= \int_0^1 \sqrt{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right) = \sqrt{2} \cdot \left[\frac{4}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)\right]_0^1 = \frac{4}{\pi}$$

$$b_m = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \sqrt{1+\cos \frac{k\pi}{2^m n}}$$

$\downarrow \frac{1}{n} = dx,\ \frac{k}{n} = x$ 치환

$$= \int_0^1 \sqrt{1+\cos\left(\frac{\pi}{2^m}x\right)}\, dx$$

$$= \sqrt{2} \cdot \int_0^1 \left|\cos\left(\frac{\pi}{2^{m+1}}x\right)\right| dx \quad \left(\cos\frac{\pi}{2^{m+1}}x\text{는 범위 내에서 양수}\right)$$

$$= \sqrt{2} \cdot \int_0^1 \cos\left(\frac{\pi}{2^{m+1}}x\right) dx$$

$$= \sqrt{2} \cdot \left[\frac{2^{m+1}}{\pi} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2^{m+1}}x\right)\right]_0^1$$

$$= \sqrt{2} \cdot \frac{2^{m+1}}{\pi} \cdot \sin\frac{\pi}{2^{m+1}}$$

$$\Rightarrow \lim_{m\to\infty} b_m = \lim_{m\to\infty}\left(\sqrt{2} \cdot \frac{2^{m+1}}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2^{m+1}}\right)\right) = \sqrt{2} \cdot \lim_{m\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2^{m+1}}\right)}{\frac{\pi}{2^{m+1}}} \xrightarrow{\frac{\pi}{2^{m+1}} = t,\ m\to\infty\text{일 때 } t\to 0+} \sqrt{2}\lim_{t\to 0+}\frac{\sin t}{t} = \sqrt{2}.$$

$$\therefore \lim_{m\to\infty} b_m = \sqrt{2}$$

[문제 1-1]

$x_m = x_{m+l}$인 서로 다른 자연수 m과 l이 존재한다고 가정하자.

이 때,

$$\frac{1}{p(x_m)} + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{x_k} = 1 \quad \cdots\cdots ①$$

$$\frac{1}{p(x_{m+l})} + \sum_{k=1}^{m+l-1} \frac{1}{x_k} = 1 \quad \cdots\cdots ②$$

①과 ②를 연립하면 $p(x_m) = p(x_{m+l})$이므로,

$$\frac{1}{x_{m+l-1}} + \frac{1}{x_{m+l-2}} + \cdots + \frac{1}{x_m} = 0$$ 이 나온다.

모든 자연수 n에 대하여 x_n은 자연수이므로, 이는 모순이다.

$\therefore$ $x_m = x_{m+l}$인 서로 다른 자연수 m과 l은 존재하지 않는다.

한양대학교

답안지 (자연계열)

수험번호	성 명	페이지
		2/6

[문제 1-2]

$$\frac{1}{p(x_{n+1})} = 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}$$

$$-\ )\ \frac{1}{p(x_n)} = 1 - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{x_k}$$

$\frac{1}{p(x_{n+1})} - \frac{1}{p(x_n)} = -\frac{1}{x_n}$, 양 변에 $(-p(x_n)p(x_{n+1}))$을 곱하면

$p(x_{n+1}) - p(x_n) = \frac{p(x_n)p(x_{n+1})}{x_n}$, $\frac{p(x_n)p(x_{n+1})}{x_n} > 0$ 이므로,

$p(x_n)$은 n의 값이 커지면 $p(x_n)$의 값도 커지는 증가함수이다.

이 때 ~~$p(x_n)$은~~ 모든 자연수 n에 대하여 $p(x_n)$은 자연수이므로,

$\lim_{n\to\infty} p(x_n)$ 의 값은 계속해서 증가하여 ∞로 발산한다.

[문제 1-3]

$p(x)$는 $p(0)=0$을 만족하는 다항식이므로, $p(x)=xf(x)$로 나타낼 수 있다. ($f(x)$는 $f(0)$이 정의되는 다항식)

$\frac{1}{p(x_{n+1})}=1-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}$, $\frac{1}{x_{n+1}f(x_{n+1})}=1-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}$ 에서 양변에 $\left(-\frac{1}{x_{n+1}}\right)$을 더하면

$\frac{1}{x_{n+1}}\left(\frac{1}{f(x_{n+1})}-1\right)=1-\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{x_k}=\frac{1}{p(x_{n+2})}>0$ 이므로, $\frac{1}{f(x_{n+1})}-1>0$,

$0<f(x_{n+1})<1$ 임을 알 수 있다. 이때 모든 자연수 n에 대하여 $p(x_{n+1})=x_{n+1}f(x_{n+1})$, $0<f(x_{n+1})<1$이고

$f(0)$이 정의되려면 $f(x)$는 상수함수이어야 한다.

문제 1-2에서 구했듯이 $p(x_{n+1})-p(x_n)=\frac{p(x_n)p(x_{n+1})}{x_n}$이고, $x_n\{p(x_{n+1})-p(x_n)\}=p(x_n)p(x_{n+1})$이다.

i) $n=1$일 때 $p(x_1)=1$이므로 $x_1\{p(x_2)-1\}=p(x_2)$이다. x_n, $p(x_n)$이 자연수이므로 이 식을 만족하려면 $p(x_2)=2$일수밖에 없다. ($\because (p(x_2)-1)$이 $p(x_2)$의 약수) 이때 $x_1=2$이다.

$p(x)=xf(x)$에서 $p(2)=2f(2)=1$이므로 $f(x)=\frac{1}{2}$이다. $\therefore p(x)=\frac{1}{2}x$. $\therefore p(x_2)=2$이므로 $x_2=4$.

ii) $n=2$일 때 $x_2(p(x_3)-p(x_2))=p(x_3)p(x_2)$는 $4(p(x_3)-2)=2p(x_3)$,

$2p(x_3)=8$, $p(x_3)=4$, $x_3=8$.

iii) $n=3$일 때 $x_3(p(x_4)-p(x_3))=p(x_4)p(x_3)$, $8(p(x_4)-4)=4p(x_4)$,

$4p(x_4)=32$, $p(x_4)=8$이다.

한양대학교

답안지 (자연계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지
		4/6

[문제 2-1]

그림에서 $\overline{BD}$의 길이를 1이라 하면 $\overline{DC} = \cos 2t$ $\overline{AB} = 2\cos t$

$\cos t = f(\cos 2t)$를 만족하는 함수 $y = f(x)$, $x = \cos 2t$, $y = \cos t$.

즉 $\overline{DC}$의 길이는 x, $\overline{AB}$의 길이는 $2y$가 된다.

$\triangle ABC$에서 $\overline{AB} = \sqrt{(\overline{AC})^2 + (\overline{BC})^2}$, 여기서 $\overline{AC} = x+1$, $\overline{BC} = \sqrt{1-x^2}$.

따라서 $2y = \sqrt{(x+1)^2 + (\sqrt{1-x^2})^2}$, $2y = \sqrt{2+2x}$.

즉 $y = \frac{1}{2}\sqrt{2+2x}$

4

한양대학교

답안지 (자연계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지
		5/6

[문제 2-2]

a_n과 a_{n+1}의 관계식은 $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$, $2(\frac{1}{2}a_{n+1}) = \sqrt{2+2(\frac{1}{2}a_n)}$.

문제1. 에서 $2\cos t = \sqrt{2+2\cos 2t}$

즉 $a_{n+1} = 2\cos t$, $a_n = 2\cos 2t$ 에 대응된다.

$a_n = 2\cos b_n$ 이라 하면 $a_{n+1} = 2\cos b_{n+1} = 2\cos \frac{1}{2}b_n$.

즉 $b_{n+1} = \frac{1}{2}b_n$

$a_1 = 2\cos b_1 = \sqrt{2}$ 이므로 $b_1 = \frac{\pi}{4}$, $b_n = \frac{\pi}{4} \times (\frac{1}{2})^{n-1}$ 이 된다.

따라서 $a_n = 2\cos\left[\frac{\pi}{4} \times (\frac{1}{2})^{n-1}\right]$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 2\cos\left[\frac{\pi}{4} \times (\frac{1}{2})^{n-1}\right]$$

$$= 2$$

5

한양대학교

답안지 (자연계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지
		6/6

[문제 2-3]

먼저 제 1항 b_1의 값을 구해보자

$b_m = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \sqrt{1+\cos\frac{\pi}{2^m}\frac{k}{n}}$ 에서 $m=1$ 을 대입하면

$b_1 = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \sqrt{1+\cos\frac{\pi}{2}\frac{k}{n}}$

$= \int_0^1 \sqrt{1+\cos\frac{\pi}{2}x}\, dx = \int_0^1 \sqrt{2}\left|\cos\frac{\pi}{4}x\right| dx$, 계산하면 $\frac{4}{\pi}$ 가 된다.

이제 $\lim_{m\to\infty} b_m$ 을 구해보자

$b_m = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \sqrt{1+\cos\frac{\pi}{2^m}\frac{k}{n}}$

$= \int_0^1 \sqrt{1+\cos\frac{\pi}{2^m}x}\, dx = \int_0^1 \sqrt{2} \times \left|\cos\frac{\pi}{2^{m+1}}x\right| dx$.

계산하면 $\sqrt{2} \times \frac{2^{m+1}}{\pi} \times \sin\frac{\pi}{2^{m+1}}$.

$\lim_{m\to\infty} b_m = \lim_{m\to\infty} \sqrt{2} \times \frac{\sin\frac{\pi}{2^{m+1}}}{\frac{\pi}{2^{m+1}}} = \sqrt{2}$