

[문제 1번] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하십시오. (50점)

자연수들로 이루어진 무한수열 $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ 과 다항식 $p(x)$ 는 다음 조건들을 모두 만족한다.

가. $p(0) = 0$

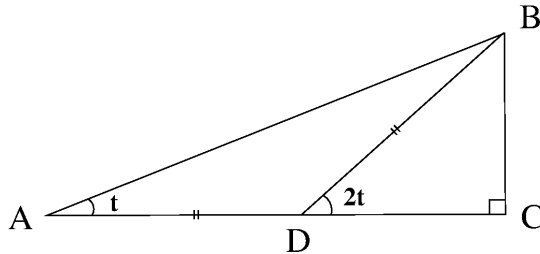
나. $p(x_1) = 1$ 이며 모든 자연수 n 에 대해서 $p(x_n)$ 는 자연수이다.

다. 모든 자연수 n 에 대해서 $\frac{1}{p(x_{n+1})} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} = 1$ 을 만족시킨다.

1. 무한수열 $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ 에서 $x_m = x_{m+l}$ 인 서로 다른 자연수 m 과 l 이 존재하는지 논하십시오.
2. 무한수열 $p(x_1), p(x_2), \dots, p(x_n), \dots$ 의 수렴, 발산 여부를 판정하십시오.
발산하면 그 이유를 설명하고 수렴하면 그 극한값 $\lim_{n \rightarrow \infty} p(x_n)$ 을 구하십시오.
3. 무한수열 $p(x_1), p(x_2), \dots, p(x_n), \dots$ 의 4번째 항 $p(x_4)$ 의 값을 구하십시오.

[문제 2번] 다음 물음에 답하시오.

1. 아래 그림을 이용하여 $0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$ 일 때, $\cos t = f(\cos 2t)$ 를 만족하는 함수 $y = f(x)$, $0 \leq x \leq 1$, 를 구하시오. (단, 그림에서 $\overline{AD} = \overline{BD}$ 이다.)



2. 위 문제에서 구한 함수 $y = f(x)$ 를 이용해서, 아래와 같이 주어진 수열 $\{a_n\}$ 의 수렴, 발산 여부를 판정하시오. 발산하면 그 이유를 설명하고 수렴하면 극한값 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 을 구하시오.

$$a_1 = \sqrt{2}, \quad a_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}, \quad a_3 = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}, \quad a_4 = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}, \quad \dots$$

3. 수열 $\{b_m\}$ 을 $b_m = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \sqrt{1 + \cos \frac{k\pi}{2^m n}}$ 으로 정의할 때, 제1항 b_1 의 값과 극한값 $\lim_{m \rightarrow \infty} b_m$ 을 구하시오.