한양대학교 2018학년도 신입학전형 수시

자 연 계	**모 의 논 술 예 시 답 안**	1 번

1. $f'(x)=\frac{1}{3}(1-\sqrt[3]{\frac{15}{x^2}})$이므로 $f(x)$는 $x=\sqrt{15}$에서 최솟값

$$f(\sqrt{15})=\frac{8+\sqrt{15}}{3}-\sqrt[3]{15\sqrt{15}}=\frac{8+\sqrt{15}}{3}-\sqrt{15}=\frac{8-2\sqrt{15}}{3}$$

을 갖는다.

2. $g'(x)=\frac{1}{5}(1-\sqrt[5]{\frac{24}{x^4}})$이고 $g''(x)=\frac{4}{25}\sqrt[5]{\frac{24}{x^9}})$이므로 $g(x)$는 $x=\sqrt[4]{24}$에서 최솟값

$$g(\sqrt[4]{24})=\frac{10+\sqrt[4]{24}}{5}-\sqrt[5]{24\sqrt[4]{24}}=\frac{10+\sqrt[4]{24}}{5}-\sqrt[4]{24}=\frac{10-4\sqrt[4]{24}}{5}>0$$

을 갖는다. 따라서 모든 양의 실수 x에 대하여 $g(x)>0$.

3. 1,2번의 내용을 토대로 함수 $h_{2017}(x)=\frac{a_1+\cdots+a_{2016}+x}{2017}-\sqrt[2017]{a_1\cdots a_{2016}x}$를 생각해보면

$$h_{2017}'(x)=\frac{1}{2017}(1-\sqrt[2017]{\frac{a_1\cdots a_{2016}}{x^{2016}}})$$

이고

$$h_{2017}''(x)=\frac{2016}{(2017)^2}\sqrt[2017]{\frac{a_1\cdots a_{2016}}{x^{4033}}})$$

이므로 $h_{2017}(x)$는 $x=\sqrt[2016]{a_1\cdots a_{2016}}$에서 최솟값

$$h_{2017}(\sqrt[2016]{a_1\cdots a_{2016}})=\frac{a_1+\cdots+a_{2016}+\sqrt[2016]{a_1\cdots a_{2016}}}{2017}-\sqrt[2017]{a_1\cdots a_{2016}\sqrt[2016]{a_1\cdots a_{2016}}}$$

$$=\frac{a_1+\cdots+a_{2016}+\sqrt[2016]{a_1\cdots a_k}}{2017}-\sqrt[2016]{a_1\cdots a_{2016}}$$

$$=\frac{a_1+\cdots+a_{2016}-2016\sqrt[2016]{a_1\cdots a_{2016}}}{2017}$$

을 갖는다. 따라서 $\frac{a_1+\cdots+a_{2016}}{2016}\geq\sqrt[2016]{a_1\cdots a_{2016}}$이면 모든 양의 실수 x에 대하여 $h_{2017}(x)\geq 0$이다.

즉, 임의의 양의실수 $a_1,a_2,\ldots,a_{2016}$에 대하여 $\frac{a_1+\cdots+a_{2016}}{2016}\geq\sqrt[2016]{a_1\cdots a_{2016}}$임을 보이면 충분하다.

다시 함수 $h_{2016}(x)=\frac{a_1+\cdots+a_{2015}+x}{2016}-\sqrt[2016]{a_1\cdots a_{2015}x}$에 위의 논리를 적용하면

$\frac{a_1+\cdots+a_{2015}}{2015}\geq\sqrt[2015]{a_1\cdots a_{2015}}$이면 $\frac{a_1+\cdots+a_{2016}}{2016}\geq\sqrt[2016]{a_1\cdots a_{2016}}$이 성립함을 알 수 있다. 결국 이 논리를 반복하면 $\frac{a_1+a_2}{2}\geq\sqrt{a_1a_2}$임을 보이는 것으로 증명이 끝났다는 것을 알 수 있다. 이는

$$\frac{a_1+a_2}{2}-\sqrt{a_1a_2}=\frac{\sqrt{a_1^2}+\sqrt{a_2^2}}{2}-\sqrt{a_1a_2}=\frac{\sqrt{a_1^2}+\sqrt{a_2^2}-2\sqrt{a_1a_2}}{2}=\frac{(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2})^2}{2}\geq 0$$

으로 증명 끝!!

별해> 임의의 양의실수 $a_1, a_2, \ldots, a_n$과 2이상의 자연수 n에 대하여

$$\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\geq \sqrt[n]{a_1\cdots a_n}$$

임을 n에 대한 수학적 귀납법으로 보이고자 한다. 우선 $n=2$일 때,

$$\frac{a_1+a_2}{2}-\sqrt{a_1a_2}=\frac{\sqrt{a_1^2}+\sqrt{a_2^2}}{2}-\sqrt{a_1a_2}=\frac{\sqrt{a_1^2}+\sqrt{a_2^2}-2\sqrt{a_1a_2}}{2}=\frac{(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2})^2}{2}\geq 0$$

이므로 성립한다. $n=k$일 때 부등식이 성립한다고 가정하자. 양의 실수에서 정의된 함수

$$h(x)=\frac{a_1+\cdots+a_k+x}{k+1}-\sqrt[k+1]{a_1\cdots a_k x}$$

의 도함수

$$h'(x)=\frac{1}{k+1}\left(1-\sqrt[k+1]{\frac{a_1\cdots a_k}{x^k}}\right)$$

이므로 $h(x)$는 $x=\sqrt[k]{a_1\cdots a_k}$에서 최솟값

$$h(\sqrt[k]{a_1\cdots a_k})=\frac{a_1+\cdots+a_k+\sqrt[k]{a_1\cdots a_k}}{k+1}-\sqrt[k+1]{a_1\cdots a_k\sqrt[k]{a_1\cdots a_k}}\ \text{*****************}\quad (1)$$

$$=\frac{a_1+\cdots+a_k+\sqrt[k]{a_1\cdots a_k}}{k+1}-\sqrt[k]{a_1\cdots a_k}$$

$$=\frac{a_1+\cdots+a_k-k\sqrt[k]{a_1\cdots a_k}}{k+1}\geq 0$$

을 갖는다. (1)의 마지막 부등식은 수학적 귀납법의 가정의 결과이다.

한양대학교 2018학년도 신입학전형 수시		
자 연 계	**모 의 논 술 예 시 답 안**	2 번

1. $\sqrt{a^2+b}-a=\sqrt{a^2+b}-a\dfrac{\sqrt{a^2+b}+a}{\sqrt{a^2+b}+a}=\dfrac{a^2+b+a\sqrt{a^2+b}-a\sqrt{a^2+b}-a^2}{\sqrt{a^2+b}+a}=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b}+a}<\dfrac{b}{2a}$

이 성립한다. 같은 방법으로, 계산하면

$$a-\sqrt{a^2-b}=a-\sqrt{a^2-b}\,\frac{\sqrt{a^2-b}+a}{\sqrt{a^2-b}+a}=\frac{a\sqrt{a^2-b}+a^2-(a^2-b)-a\sqrt{a^2-b}}{\sqrt{a^2-b}+a}=\frac{b}{\sqrt{a^2-b}+a}>\frac{b}{2a}$$

을 얻는다. 따라서 $\sqrt{a^2+b}-a<\dfrac{b}{2a}<a-\sqrt{a^2-b}$ 이다.

2. $x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$로부터

$$\sqrt[3]{a^3+b}-a=\frac{(a^3+b)-a^3}{(\sqrt[3]{a^3+b})^2+a\sqrt[3]{a^3+b}+a^2}=\frac{b}{(\sqrt[3]{a^3+b})^2+a\sqrt[3]{a^3+b}+a^2}<\frac{b}{3a^2}$$

이 성립함을 알 수 있다. 마찬가지 방법으로

$$a-\sqrt[3]{a^3-b}=\frac{a^3-(a^3-b)}{a^2+a\sqrt[3]{a^3-b}+(\sqrt[3]{a^3-b})^2}=\frac{b}{a^2+a\sqrt[3]{a^3-b}+(\sqrt[3]{a^3-b})^2}>\frac{b}{3a^2}$$

을 얻는다. 따라서 $\sqrt[3]{a^3+b}-a<a-\sqrt[3]{a^3-b}$ 이 성립한다.

3. 문항 1에서 부등식

$$\sqrt{a^2+b}-a<\frac{b}{2a}<a-\sqrt{a^2-b}\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ ①$$

이 성립한다. 우선, $75^2=5625$ 이므로, 부등식 ① 에 의해 부등식

$$|75-\sqrt{5627}|=\sqrt{5627}-75=\sqrt{75^2+2}-75<\frac{2}{2\cdot 75}=\frac{1}{75}$$

이 성립한다. 또한 문항 2의 증명으로부터 부등식

$$\sqrt[3]{a^3+b}-a<\frac{b}{3a^2}<a-\sqrt[3]{a^3-b}\cdots\ \cdots\ \cdots\ ②$$

이 성립함을 알 수 있다. $341=343-2=7^3-2$이므로, 부등식 ② 에 의해

$$|7-\sqrt[3]{341}|=7-\sqrt[3]{341}=7-\sqrt[3]{7^3-2}>\frac{2}{3\cdot 7^2}=\frac{2}{147}>\frac{1}{73.5}>\frac{1}{75}$$

이 성립한다. 그러므로 $|75-\sqrt{5627}|<|7-\sqrt[3]{341}|$임을 알 수 있다.

한양대학교 2018학년도 신입학전형 수시 모의논술고사		
자 연 계	**출제 의도 및 평가 지침**	1 번

1. 출제 의도 및 문제 해설

고등학교 수학교과를 정상화하기 위하여 철저하게 교과서를 중심으로 출제하였으며, 정상적인 수학교과를 이수한 수험생이면 충분하게 풀 수 있는 문제를 출제하였다. 1,2번에서는 미분 가능한 함수의 주어진 범위 안에서의 최대, 최소를 파악할 수 있는지를 묻고 있으며, 3번에서는 1,2번의 문제풀이로 힌트를 얻어 적절한 미분가능함수를 고안하여 부등식이 만족함을 보일 수 있는지 묻고 있다.

2. 종합 평가 기준

문항	배점	세부 평가 기준	세부 배점
1	20	미분을 이용하여 함수 $f(x)$의 최소값을 잘 구했는가?	20
2	30	미분을 이용하여 함수 $g(x)$의 최소값이 양수임을 보였는가?	30
3	50	1,2번 문제를 토대로 미분가능함수를 잘 설정하였는가?	15
		수학적귀납법 또는 다른 방법으로 올바르게 증명하였는가?	35

3. 출제 근거

이계도함수와 함수의 그래프 - 고등학교 미적분II (비상교육, 2014년), 116

한양대학교 2018학년도 신입학전형 수시 모의논술고사		
자 연 계	**출제 의도 및 평가 지침**	2 번

1. 출제 의도 및 문제 해설

고등학교 교육과정내의 교과서를 중심으로 출제하였으며, 고등학교 수업에 따라 충실히 공부한 학생이면 해결 할 수 있는 문제를 출제하였다. 고등학교 수학교과과정을 이해하는데, 기본이 되는 수학 1에서 다항식의 인수분해, 방정식과 부등식을 잘 이해하고 있으며, 이를 활용하여 주어진 문제를 풀 수 있는 사고력을 측정하는 문제이다. 모의 논술 고사 자연계 문제 2번의 문항1은 주어진 세 수의 대소를 비교하기 위하여 다항식의 인수분해를 적절히 사용할 수 있는 능력을 측정하는 문제이다. 문항2에서는 삼중근을 포함하는 부등식을 보이기 위하여 문항1의 대소 관계에서 얻어진 아이디어를 적용하고, 유추하는 능력을 측정하고자 한다. 문항3에서는 문항1과 문항2에서 구한 대소 관계를 주어진 절댓값의 크기 비교에 적용하여 해결할 수 있는 사고력을 측정한다.

자연계 모의논술 문제 2번에서는 인수분해 및 방정식과 부등식을 잘 이해하고, 이를 활용하여 수학적 사고력을 통한 문제 해결능력과 논리적 사고력을 측정할 수 있다. 이 문제들은 고등학교 수학교과과정에서 기본적으로 다루어지는 방정식과 부등식 단원의 전형적인 문제이고, 이를 통해 학생들이 학교교육을 성실히 이수했는지를 평가하고자 출제되었다.

2. 종합 평가 기준

문항	배점	세부 평가 기준	세부 배점
1	30	부등식 $\sqrt{a^2+b}-a<\dfrac{b}{2a}$이 성립함을 바르게 보였는가?	15
		부등식 $a-\sqrt{a^2-b}>\dfrac{b}{2a}$이 성립함을 바르게 보였는가?	15
2	30	주어진 조건하에서 부등식 $\sqrt[3]{a^3+b}-a<\dfrac{b}{3a^2}$이 성립함을 보였는가?	15
		주어진 조건하에서 부등식 $a-\sqrt[3]{a^3-b}>\dfrac{b}{3a^2}$이 성립함을 보였는가?	15
3	40	$75^2=5625$임을 인지하고, $\left\|75-\sqrt{5627}\right\|<\dfrac{1}{75}$임을 보였는가?	20
		$341=7^3-2$임을 인지하고 $\left\|7-\sqrt[3]{341}\right\|>\dfrac{1}{75}$임을 보였는가?	20

3. 출제 근거

▶ 교과서:

- ► 수학 I (미래엔, 이강섭 외 14인),
  - − 단원: 다항식 (인수분해)
  - − 단원: 방정식과 부등식 (여러 가지 부등식)
- ► 수학 I (비상교육, 김원경 외 10인),
  - − 단원: 인수분해 (인수분해) p. 31−36
  - − 단원: 방정식과 부등식 (여러 가지 부등식) p. 93−102
- ► 수학 I (지학사, 신항균 외 11인),
  - − 단원: 다항식 (인수분해) p. 42−49
  - − 단원: 방정식과 부등식 (여러 가지 부등식) p. 110−121

한양대학교

답안지 (자연계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지
		1/6

[문제 1-1]

$f(x)$는 양의 실수 전체에서 미분가능하다.

$f(x) = \frac{x+8}{3} - (15x)^{\frac{1}{3}}$ 을 미분하면,

$f'(x) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\cdot(15x)^{-\frac{2}{3}}\cdot 15 = \frac{1}{3}\{1 - 15\cdot(15x)^{-\frac{2}{3}}\}$ 이다.

$f'(x)=0$ 이 되는 양수 x를 구하자.

$\frac{1}{15} = (15x)^{-\frac{2}{3}} \Leftrightarrow 15^{\frac{3}{2}} = 15x \Leftrightarrow x = \sqrt{15}$

$x \in (0, \sqrt{15})$ 일 때 $f'(x) < 0$,

$x \in (\sqrt{15}, \infty)$ 일 때 $f'(x) > 0$ 이므로

양의 실수 x에 대하여 $f(x)$의 최솟값은 $f(\sqrt{15})$ 이다.

즉, $\frac{8+\sqrt{15}}{3} - \left(15\cdot 15^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{8+\sqrt{15}}{3} - \sqrt{15} = \frac{8-2\sqrt{15}}{3}$ 이다.

한양대학교

답안지 (자연계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지
		2/6

[문제 1-2]

$x>0$ 에서 $g(x)$는 미분가능하다.

$g'(x) = \frac{1}{5} - \frac{1}{5}\cdot(24x)^{-\frac{4}{5}}\cdot 24 = \frac{1}{5}\left\{1 - \frac{24}{(24x)^{\frac{4}{5}}}\right\}$ 이다.

$x>0$ 에서 $g'(x)=0$ 인 x를 구하면,

$$(24x)^{\frac{4}{5}} = 24 \Leftrightarrow 24x = 24^{\frac{5}{4}} \Leftrightarrow x = 24^{\frac{1}{4}}$$

$x \in (0,\ 24^{\frac{1}{4}})$ 에서 $g'(x)<0$ 이고,

$x \in (24^{\frac{1}{4}},\ \infty)$ 에서 $g'(x)>0$ 이므로

양의 실수 x에 대하여 $g(x)$의 최솟값은 $g(24^{\frac{1}{4}})$ 이다.

$g(24^{\frac{1}{4}}) = \frac{10+24^{\frac{1}{4}}}{5} - (24^{\frac{5}{4}})^{\frac{1}{5}} = 2 - \frac{4}{5}\cdot 24^{\frac{1}{4}}$ 이다.

모든 양의 실수 x에 대하여 $g(x)>0$ 이기 위해서는

$2 > \frac{4}{5}\cdot 24^{\frac{1}{4}}$ 이어야 한다.

그런데 $\left(\frac{5}{2}\right)^4 > 2^2\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^2 = 25 > 24$ 이므로

$2 > \frac{4}{5}\cdot 24^{\frac{1}{4}}$ 이다.

즉, 모든 양의 실수 x에 대하여 $g(x)>0$ 이 성립한다.

한양대학교	답안지 (자연계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지
		3/6

[문제 1-3]

$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{n-1}$ 을 각각 양의 실수를 값으로 가지는 상수라 하자.
(단, $n \geq 2$ 인 자연수)

$x > 0$ 에서 함수

$$f_n(x) = x + \sum_{k=1}^{n-1} a_k - n \cdot x^{\frac{1}{n}} (a_1 a_2 \cdots a_{n-1})^{\frac{1}{n}}$$ 를 정의하자.

$$\frac{d}{dx} f_n(x) = 1 - n \cdot \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1-n}{n}} \cdot (a_1 \cdots a_{n-1})^{\frac{1}{n}}$$

$$= 1 - \frac{(a_1 \cdots a_{n-1})^{\frac{1}{n}}}{x^{\frac{n-1}{n}}} = f_n'(x)$$

$f_n'(x) = 0$ 인 x 를 구하면,

$x = \{(a_1 \cdots a_{n-1})^{\frac{1}{n}}\}^{\frac{n}{n-1}} = (a_1 \cdots a_{n-1})^{\frac{1}{n-1}}$ 이다.

그런데 $x \in (0, (a_1 \cdots a_{n-1})^{\frac{1}{n-1}})$ 에서 $f_n'(x) < 0$

$x \in ((a_1 \cdots a_{n-1})^{\frac{1}{n-1}}, 0)$ 에서 $f_n'(x) > 0$ 이므로

$x > 0$ 에서 $f_n(x)$의 최솟값은 $f_n((a_1 \cdots a_{n-1})^{\frac{1}{n-1}})$

$= \sum_{k=1}^{n-1} a_k - (n-1)(a_1 a_2 \cdots a_{n-1})^{\frac{1}{n-1}}$ 이다.

즉, $x > 0$ 에서 $f_{n-1}(x) \geq 0$ 이 성립하면, $f_n(x)$ 가 성립한다. (단 $n \geq 2$)

그런데 $a>0, b>0$, $(a-b)^2 \geq 0$ 에서 $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ 이므로

$f_2(x) \geq 0$ 이 성립하고, 수학적 귀납법에 의해 모든 n에 대해

$x > 0$ 이면 $f_n(x) \geq 0$ 이 성립한다.

즉, $n = 2017$ 일 때 $\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{2017}}{2017} \geq \sqrt[2017]{a_1 a_2 \cdots a_{2017}}$ 이다.

[문제 2-1]

$$a-\sqrt{a^2-b}=\sqrt{a^2}-\sqrt{a^2-b}=\frac{a^2-(a^2-b)}{\sqrt{a^2}+\sqrt{a^2-b}}=\frac{b}{a+\sqrt{a^2-b}}$$

$$\sqrt{a^2+b}-a=\frac{a^2+b-a^2}{\sqrt{a^2+b}+a}=\frac{b}{a+\sqrt{a^2+b}}$$

$a>0,\ b>0$ 이므로 $0<a+\sqrt{a^2-b}<2a<a+\sqrt{a^2+b}$ 이고

$$\sqrt{a^2+b}-a=\frac{b}{a+\sqrt{a^2+b}}<\frac{b}{2a}<\frac{b}{a+\sqrt{a^2-b}}=a-\sqrt{a^2-b}$$ 이다

$$\therefore\ \sqrt{a^2+b}-a<\frac{b}{2a}<a-\sqrt{a^2-b}$$

(단, $a>0,\ a^2>b>0$ 일 때)

![한양대학교]

답안지 (자연계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지
		5/6

[문제 2-2]

항등식 $x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$ 에서,

$x>0,\ y>0$ 일 때 $x-y=\dfrac{x^3-y^3}{x^2+xy+y^2}$ 이다.

따라서 $\sqrt[3]{a^3+b}-a=\dfrac{a^3+b-a^3}{(\sqrt[3]{a^3+b})^2+a\cdot\sqrt[3]{a^3+b}+a^2}$,

$$a-\sqrt[3]{a^3-b}=\frac{a^3-(a^3-b)}{a^2+a\cdot\sqrt[3]{a^3-b}+(\sqrt[3]{a^3-b})^2}$$

이 때, $\sqrt[3]{a^3+b}>\sqrt[3]{a^3-b}>0$ 이므로

$(\sqrt[3]{a^3+b})^2+a\cdot\sqrt[3]{a^3+b}+a^2>a^2+a\cdot\sqrt[3]{a^3-b}+(\sqrt[3]{a^3-b})^2>0$ 이고,

이로부터 $\sqrt[3]{a^3+b}-a<a-\sqrt[3]{a^3-b}$ 가

양수 a,b에 대해 $a^3>b$인 조건에서 항상 성립함을 알 수 있다.

5

한양대학교

답안지 (자연계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지
		6/6

[문제 2-3]

$75^2=5625$, $7^3=343$ 이다.

즉, $|75-\sqrt{5627}|=\sqrt{5627}-75$ 이고, $|7-\sqrt[3]{341}|=7-\sqrt[3]{341}$ 이다.

[문제 2-1]의 결과, $a>0$, $a^2>b>0$ 일 때

$\sqrt{a^2+b}-a<\frac{b}{2a}$ 에서 $a=75$, $b=2$ 라 하면

$\sqrt{5627}-75<\frac{1}{75}$ 이라는 결과를 얻는다.

마찬가지로, [문제 3-1]의 결과를 조금 강화하면, $a>0$, $a^3>b>0$ 일 때

$a-\sqrt[3]{a^3-b}=\frac{a^3-(a^3-b)}{a^2+a\cdot\sqrt[3]{a^3-b}+(\sqrt[3]{a^3-b})^2}>\frac{b}{3a^2}$ 이라는 결과를 얻는다.

$a=7$, $b=2$ 를 대입하면 $7-\sqrt[3]{341}=\frac{2}{3\cdot 49}$ 이다.

$\frac{1}{75}\times(75\times3\times49)=147$, $\frac{2}{3\times49}\times(75\times3\times49)=150$ 이므로

$\sqrt{5625}-75<\frac{1}{75}<\frac{2}{147}<7-\sqrt[3]{341}$

$\therefore |75-\sqrt{5625}|<|7-\sqrt[3]{341}|$

한양대학교

답안지 (자연계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지
930000937	박현중	1/6

[문제 1-1]

$x>0$ 일때 $f(x)$와 $f''(x)$를 구해보자.

$$f'(x) = \frac{1}{3} - 5 \cdot (15x)^{-\frac{2}{3}}$$

$$f''(x) = \frac{10}{3} \cdot (15x)^{-\frac{5}{3}} > 0$$

$f''(x) > 0$ 이므로 $f(x)$는 증가함수 이고, $f(x)$는

$f(x)=0$ 일 때 최솟값을 갖게 된다.

$f(x)=0$ 을 만족시키는 x를 찾자.

$$\frac{1}{3} - 5 \cdot (15x)^{-\frac{2}{3}} = 0$$

$$(15x)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{15}$$

$$x = \sqrt{15}$$

$$\therefore f(\sqrt{15}) = \frac{8+\sqrt{15}}{3} - \sqrt[3]{15 \cdot \sqrt{15}}$$

$$= \frac{8}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{15}$$

$\therefore$ $x=\sqrt{15}$ 일 때 $f(x)$는 최솟값

$\frac{8}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{15}$ 를 갖는다 (단, $x>0$)

한양대학교

답안지 (자연계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지
930000937	박현중	2/6

[문제 1-2]

[문제 1-1]에서와 마찬가지로 $x>0$ 일 때

$g'(x)$와 $g''(x)$를 구해보자.

$$g'(x) = \frac{1}{5} - \frac{24}{5}(24x)^{-\frac{4}{5}}$$

$$g''(x) = \frac{96}{25}(24x)^{-\frac{9}{5}} > 0$$

$g''(x)>0$ 이므로 $g'(x)$는 증가함수이고

$g(x)$는 $g'(x)=0$ 일 때 최솟값을 갖는다

$g'(x)=0$ 을 만족시키는 x를 찾자.

$$\frac{1}{5} - \frac{24}{5}(24x)^{-\frac{4}{5}} = 0$$

$$(24x)^{-\frac{4}{5}} = \frac{1}{24}$$

$$x = \sqrt[4]{24}$$

$$\therefore g(\sqrt[4]{24}) = \frac{10+\sqrt[4]{24}}{5} - \sqrt[5]{24\cdot\sqrt[4]{24}}$$

$$= \frac{10}{5} - \frac{4}{5}\sqrt[4]{24}$$

이 때 $\sqrt[4]{24} < \sqrt[4]{39.0625} = 2.5$

이므로 $4\cdot\sqrt[4]{24} < 10$

이고, $\frac{10}{5} - \frac{4\sqrt[4]{24}}{5} > 0$ 이다.

$x>0$ 일 때 $g(x)$의 최솟값 $g(\sqrt[4]{24})$

가 0보다 크므로 모든 양의 실수

x에 대해 $g(x)>0$ 이 성립한다.

한양대학교

답안지 (자연계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지
930000937	박현중	3/6

[문제 1-3]

수학적 귀납법을 이용해 주어진 부등식이 성립함을 보이자 (단, $a_n > 0$)

부등식 $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n}$ 이 모든 자연수 n에 대해 참임을 보이자.

i) $n=1$ 일때

$$\frac{a_1}{1} \geq a_1$$

$\therefore$ $n=1$ 일 때 임의의 양의 실수 a_1에 대해 주어진 부등식이 참이다.

ii) 임의의 자연수 k에 대해 $n=k$ 일 경우 주어진 부등식이 참이라면 $n=k+1$ 일 때도 주어진 부등식이 참임을 증명하자

$n=k$ 일 때, $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k} \geq \sqrt[k]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_k}$

$$a_1+a_2+\cdots+a_k = b_k$$

$a_1 \cdot a_2 \cdots a_k = C_k$ 라고 하고,

$h(a_k) = \frac{b_k}{k} - \sqrt[k]{C_k}$ 인 함수를 잡자

$h(a_k) \geq 0$ 이 성립한다고 가정하고 $h(a_{k+1}) \geq 0$ 도 성립함을 증명해보자

$$h(a_{k+1}) = \frac{b_k+a_{k+1}}{k+1} - \sqrt[k+1]{C_k \cdot a_{k+1}}$$

$h'(a_{k+1})$와 $h''(a_{k+1})$을 구해보자.

$$h'(a_{k+1}) = \frac{1}{k+1} - \frac{C_k}{k+1} \cdot (C_k a_{k+1})^{\frac{-k}{k+1}}$$

$$h''(a_{k+1}) = \frac{kC_k}{(k+1)^2} \cdot (C_k a_{k+1})^{\frac{-2k-1}{k+1}} > 0$$

$h''(a_{k+1}) > 0$ 이므로 $h'(a_{k+1})$은 증가함수 이다.

즉 $h(a_{k+1})$은 $h'(a_{k+1}) = 0$ 일 때 최솟값을 갖는다.

$h'(a_{k+1}) = 0$ 인 a_{k+1} 의 값을 찾아보자.

$$\frac{1}{k+1} - \frac{C_k}{k+1}(C_k a_{k+1})^{\frac{-k}{k+1}} = 0$$

$$(C_k a_{k+1})^{\frac{-k}{k+1}} = \frac{1}{C_k}$$

$$a_{k+1} = \sqrt[k]{C_k}$$

$a_{k+1} = \sqrt[k]{C_k}$ 일 때 $h(a_{k+1})$이 최솟값을 갖는다.

$$h(a_{k+1} = \sqrt[k]{C_k}) = \frac{b_k + \sqrt[k]{C_k}}{k+1} - \sqrt[k+1]{C_k \cdot \sqrt[k]{C_k}}$$

$$= \frac{b_k}{k+1} - \frac{k}{k+1}\sqrt[k]{C_k}$$

$$= \frac{k}{k+1} h(a_k) \geq 0$$

$\therefore$ $h(a_{k+1}) \geq 0$ 도 성립한다.

i)과 ii)에 의해 부등식 $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots}$ 이 모든 자연수 n에 대해 성립한다.

$$\therefore \frac{a_1+a_2+\cdots+a_{2017}}{2017} \geq \sqrt[2017]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_{2017}}$$

[문제 2-1]

$a^2 > b$ 이고 $a>0$, $b>0$ 이므로 아래 부등식이 성립한다

$0 < a^2 - b < a^2 < a^2 + b$

$0 < \sqrt{a^2-b} < a < \sqrt{a^2+b}$

$0 < a + \sqrt{a^2-b} < 2a < a + \sqrt{a^2+b}$ ⋯ ㉠

문제에서 주어진 세 실수를 보면 아래 등식이 성립한다

$(a - \sqrt{a^2-b}) \times (a + \sqrt{a^2-b}) = b$

$(\sqrt{a^2+b} - a) \times (\sqrt{a^2+b} + a) = b$

$\frac{b}{2a} \times 2a = b$

㉠에 의해 $a+\sqrt{a^2-b}$, $\sqrt{a^2+b}+a$, $2a$ 모두 양수이므로 양변을 나눌 수 있다.

$a - \sqrt{a^2-b} = \frac{b}{a+\sqrt{a^2-b}}$

$\sqrt{a^2+b} - a = \frac{b}{\sqrt{a^2+b}+a}$

$\frac{b}{2a} = \frac{b}{2a}$

이제 분모들을 살펴보면 ㉠에 의해

$a - \sqrt{a^2-b} > \frac{b}{2a} > \sqrt{a^2+b} - a$

임을 알 수 있다.

한양대학교

답안지 (자연계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지
930000937	박현중	5/6

[문제 2-2]

$a^3>b$ 이고 $a>0, b>0$ 이므로
아래 부등식들이 성립한다.

$0<a^3-b<a^3+b$

$0<\sqrt[3]{(a^3-b)^2}<\sqrt[3]{(a^3+b)^2}$ …㉠

$0<a\cdot\sqrt[3]{a^3-b}<a\cdot\sqrt[3]{a^3+b}$ …㉡

$\sqrt[3]{(a^3-b)^2}+a\cdot\sqrt[3]{a^2-b}+a^2=Q(a)$

$\sqrt[3]{(a^3+b)^2}+a\cdot\sqrt[3]{a^2+b}+a^2=H(a)$

라고 하자.

㉠과 ㉡에 의해 $H(a)>Q(a)>0$
가 성립한다. …㉢

이제 주어진 식 $\sqrt[3]{a^3+b}-a$ 와
$a-\sqrt[3]{a^3-b}$ 를 보자

$(\sqrt[3]{a^3+b}-a)\times H(a)=b$

$(a-\sqrt[3]{a^3-b})\times Q(a)=b$

㉢에 의해 $H(a)>0$, $Q(a)>0$
이므로

$\sqrt[3]{a^3+b}-a=\frac{b}{H(a)}$

$a-\sqrt[3]{a^3-b}=\frac{b}{Q(a)}$ 가 성립한다.

㉢에 의해 $H(a)>Q(a)$ 이므로
$\frac{b}{H(a)}<\frac{b}{Q(a)}$ 이다.

$\therefore \sqrt[3]{a^3+b}-a<a-\sqrt[3]{a^3-b}$

한양대학교

답안지 (자연계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지
930000937	박현중	6/6

[문제 2-3]

$75 = \sqrt{5625} < \sqrt{5627}$

$|75 - \sqrt{5627}| = \sqrt{5627} - 75$

$= \sqrt{75^2+2} - 75$

[문제 2-1] 에서 알아냈듯이

$a^2 > b$ 이고 $a>0$, $b>0$ 이면

$\sqrt{a^2+b} - a < \frac{b}{2a}$ 이다

$a = 75$, $b = 2$ 라고 하면

$\sqrt{75^2+2} - 75 < \frac{2}{150}$ 이다 … ㉠

$7 = \sqrt[3]{343} > \sqrt[3]{341}$

$|7 - \sqrt[3]{341}| = 7 - \sqrt[3]{341}$

$= 7 - \sqrt[3]{7^3-2}$

[문제 2-2]에서 알아낸 것을 응용해보자

$a^3 > b$ 이고 $a>0$, $b>0$ 일 때,

$0 < a^3-b < a^3 < a^3+b$

$0 < \sqrt[3]{(a^3-b)^2} < a^2 < \sqrt[3]{(a^3+b)^2}$ … ⓐ

$0 < a \cdot \sqrt[3]{a^3-b} < a^2 < a \cdot \sqrt[3]{(a^3+b)^2}$ … ⓑ

ⓐ ⓑ 에 의해 $0 < Q(a) < 3a^2 < H(a)$

임을 알 수 있다 … ⓒ

($Q(a)$, $H(a)$ 는 [문제 2-2]에서 쓰던 기호를

그대로 사용하였다.)

ⓒ에 의해 $\frac{b}{H(a)} < \frac{b}{3a^2} < \frac{b}{Q(a)}$ 이므로

$\sqrt[3]{a^3+b} - a < \frac{b}{3a^2} < a - \sqrt[3]{a^3-b}$ 이다

이제 $a = 7$, $b = 2$ 라고 하면

$\frac{2}{147} < 7 - \sqrt[3]{7^3-2}$ 이다. … ㉡

∴ ㉠과 ㉡에 의해 아래 부등식이 성립한다

$|75 - \sqrt{5627}| = \sqrt{75^2+2} - 75 < \frac{2}{150} < \frac{2}{147}$

$< 7 - \sqrt[3]{7^3-2} = |7 - \sqrt[3]{341}|$

$\therefore |75 - \sqrt{5627}| < |7 - \sqrt[3]{341}|$

한양대학교

답안지 (자연계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지
		1/6

[문제 1-1] $f(x)=\frac{3+x}{3}-\sqrt[3]{15x}$ $(x>0)$ 에 대해서

$f'(x)=\frac{1}{3}-\sqrt[3]{15}\cdot\frac{1}{3}\cdot x^{-\frac{2}{3}}$

$f''(x)=\frac{2}{9}\sqrt[3]{15}\;x^{-\frac{5}{3}}>0$ 이므로 $f'(a)=0$ 일 때 $x=a$에서

f는 극소이다. 또, $f''>0$에서 f'는 증가하므로 그러한 점은 많아야 하나이고, 그 점에서 최소이다.

$f'(a)=0$ 에서 $a=\sqrt{15}$ 이므로

최솟값은 $\frac{8}{3}-\frac{2}{3}\sqrt{15}$ 이다

[문제 1-2] $g(x) = \frac{10+x}{5} - \sqrt[5]{24x}$ $(x>0)$ 에 대해서

$g'(x) = \frac{1}{5} - \sqrt[5]{24} \cdot \frac{1}{5} x^{-\frac{4}{5}}$

$g''(x) = \frac{4}{25} \sqrt[5]{24}\, x^{-\frac{9}{5}} > 0$

이므로 문제 1-1과 비슷하게 $g'(a)=0$ 인 점에서 $g(x)$가 최소인데

$a = \sqrt[4]{24}$ 에서 $g'(a)=0$ 이고 $g(a) = 2 - \frac{4}{5}\sqrt[4]{24} > 2 - \frac{4}{5}\sqrt[4]{\frac{125}{16}} = 0$

이다. g의 최소값이 0 초과 이므로 모든 양의 실수 x에 대해 $g(x) > 0$ 이다.

한양대학교 답안지 (자연계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지
		3/6

[문제 1-3]

임의의 자연수 n에 대해 $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1\cdots a_n}$ 임을 보이자. n에 대한 수학적 귀납법을 사용한다 (단, $\sqrt[1]{a} = a^{\frac{1}{1}} = a$로 정의한다.)

i) $n=1$

$(\text{좌변}) = \frac{a_1}{1} = \sqrt[1]{a_1} = (\text{우변})$

으로 성립한다.

ii) $n=k\ (k \geq 1)$일 때 $\frac{a_1+\cdots+a_k}{k} \geq \sqrt[k]{a_1\cdots a_k}$가 성립한다고 가정하자.

$A_m = \frac{a_1+\cdots+a_m}{m}$, $B_m = \sqrt[m]{a_1 a_2 \cdots a_m}$ 이라 하면

$A_{k+1} = \frac{k}{k+1}A_k + \frac{a_{k+1}}{k+1}$, $B_{k+1} = B_k^{\frac{k}{k+1}} a_{k+1}^{\frac{1}{k+1}}$ 이다.

$a_1, a_2, \cdots, a_k$를 상수로 놓고 a_{k+1}을 x라는 변수로 놓고 $h(x) = A_{k+1} - B_{k+1}\ (x>0)$으로 두자.

$h(x) = \frac{k}{k+1}A_k + \frac{x}{k+1} - B_k^{\frac{k}{k+1}} x^{\frac{1}{k+1}}$ 에서

$h'(x) = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+1} B_k^{\frac{k}{k+1}} x^{-\frac{k}{k+1}}$

$h''(x) = \frac{k}{(k+1)^2} B_k^{\frac{k}{k+1}} x^{-\frac{2k+1}{k+1}} > 0$ 이므로 $h'(a)=0$일 때, $x=a$에서 h가 최소이다.

따라서 $x = B_k$일 때 $h(x) = \frac{k}{k+1}(A_k - B_k)$로 최소인데 $A_k \geq B_k$를 가정했으므로 모든 양의 실수 x에 대해 $h(x) \geq 0$, 즉 $A_{k+1} \geq B_{k+1}$이다.

따라서 귀납적으로 모든 자연수 n에 대해 성립하고, 따라서 $n=2017$일 때도 성립한다. 등호는 $a_2=B_1, a_3=B_2, \cdots, a_n=B_{n-1}$일 때 성립하게 되며 $a_1=a_2=\cdots=a_k$일 때 $B_k=a_k$가 되므로 $a_1=a_2=\cdots=a_n$일 때 등호가 성립한다.

한양대학교

답안지 (자연계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지
		4/6

[문제 2-1]

$$\sqrt{a^2+b}-a=\sqrt{\left(a+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}}-a<\sqrt{\left(a+\frac{b}{2a}\right)^2}-a=\frac{b}{2a}$$

$b<a^2<2a^2$ 이므로 $\frac{b}{2a}<a$ 이다. 따라서

$$a-\sqrt{a^2-b}=a-\sqrt{\left(a-\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}}>a-\sqrt{\left(a-\frac{b}{2a}\right)^2}=\frac{b}{2a}\left(\because a-\frac{b}{2a}>0\right)$$

$$\therefore \sqrt{a^2+b}-a<\frac{b}{2a}<a-\sqrt{a^2-b}$$

4

답안지 (자연계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지
		5/6

[문제 2-2]

$$\sqrt[3]{a^3+b}-a=\sqrt[3]{\left(a+\frac{b}{3a^2}\right)^3-\frac{b^2}{3a^3}-\frac{b^3}{27a^6}}-a$$

$$<\sqrt[3]{\left(a+\frac{b}{3a^2}\right)^3}-a$$

$$=\frac{b}{3a^2}$$

$b<a^3<9a^3$ 에서 $\frac{b^2}{3a^3}>\frac{b^3}{27a^6}$ 이다. 따라서

$$a-\sqrt[3]{a^3-b}=a-\sqrt[3]{\left(a-\frac{b}{3a^2}\right)^3-\frac{b^2}{3a^3}+\frac{b^3}{27a^6}}$$

$$>a-\sqrt[3]{\left(a-\frac{b}{3a^2}\right)^3}\quad\left(\because \frac{b^2}{3a^3}-\frac{b^3}{27a^6}>0\right)$$

$$=\frac{b}{3a^2}$$

$$\therefore \sqrt[3]{a^3+b}-a<\frac{b}{3a^2}<a-\sqrt[3]{a^3-b}$$

$$\therefore \sqrt[3]{a^3+b}-a<a-\sqrt[3]{a^3-b}$$

한양대학교

답안지 (자연계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지
		6/6

[문제 2-3]

$a=75$, $b=2$ 로 놓으면 $5627 = a^2+b$ 이므로

$$|75-\sqrt{5627}| = |a-\sqrt{a^2+b}| = \sqrt{a^2+b}-a < \frac{b}{2a} = \frac{1}{75}$$

$c=7$, $d=2$ 로 놓으면 $341 = c^3-d$ 이므로

$$|7-\sqrt[3]{341}| = |c-\sqrt[3]{c^3-d}| = c-\sqrt[3]{c^3-d} > \frac{d}{3c^2} = \frac{2}{147} > \frac{2}{150} = \frac{1}{75}$$

이다. 따라서

$$|75-\sqrt{5627}| < \frac{1}{75} < |7-\sqrt[3]{341}|$$

$$\therefore\ |75-\sqrt{5627}| < |7-\sqrt[3]{341}|$$