한양대학교

답안지 (자연계)

답안지 바코드

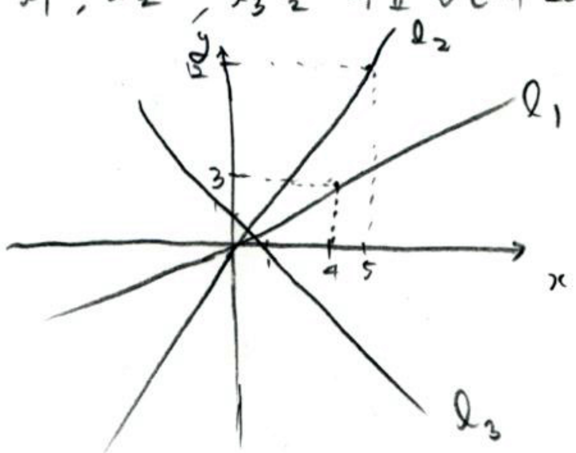
지원학과	
성 명	
수험번호	
생년월일 (예:980301)	

수험생 유의사항

1. 답안지는 검정색 펜(볼펜, 연필, 샤프)으로 작성하십시오. (빨강색이나 파랑색 사용금지)
2. 답안지를 수정할 경우 지우개(연필, 샤프 사용 시)를 사용하거나 두 줄을 긋고(볼펜 사용 시) 그 위에 재 작성하십시오.
3. 답안과 관련 없는 표현이나 표시를 한 답안지는 "0"점 처리 됩니다.
4. 본 고사는 답안지 1장 이내에 답안을 작성하여야 합니다. 답안지 교체는 가능하지만 기존 답안지 제출은 불가합니다.

문제 1번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

1. l_1, l_2, l_3를 좌표평면에 그려보면



$\therefore A_1 = \{(x,y) \mid x \ge 0 \to y < \frac{3}{4}x,\ x<0 \to y < \frac{12}{5}x\}$

$A_2 = \{(x,y) \mid \frac{3}{4}x < y < \frac{12}{5}x\}$

$A_3 = \{(x,y) \mid x \ge 0 \to y > \frac{12}{5}x,\ x<0 \to y > \frac{3}{4}x\}$

$A_4 = \{(x,y) \mid \frac{12}{5}x < y < \frac{3}{4}x\}$ 이다

l_1, l_2를 만나서 생기는 현의 길이가 같으므로

원의 중심은 l_1, l_2로 부터 거리가 같은 점에 있으므로 원의 중심의 자취는

$y = \frac{9}{7}x$ 또는 $y = -\frac{7}{9}x$ 이다.

($y = \frac{q}{p}x$ 라 할때 $(p,q)\cdot(\frac{4}{5},\frac{3}{5}) = (p,q)\cdot(\frac{5}{13},\frac{12}{13})$ 또는

$(p,q)\cdot(\frac{4}{5},\frac{3}{5}) = (p,q)\cdot(-\frac{5}{13},-\frac{12}{13})$ 이므로)

이중 A_4가 포함하는 자취는 $y = \frac{9}{7}x$, $x<0$ 이다

이 직선 위의 점을 $(7t, 9t)$ 라 하면

$r^2 = (\frac{a}{2})^2 + (\frac{|21t-36t|}{5})^2 = \frac{a^2}{4} + 9t^2$

$= (\frac{b}{2})^2 + (\frac{|16t-1|}{\sqrt{2}})^2 = \frac{b^2}{4} + \frac{1}{2}(256t^2 - 32t + 1)$ 이다.

$\therefore \frac{1}{2}(a^2-b^2) = 238t^2 - 32t + 1$ 이다. $\cdots\cdots$ ①

이때 $t<0$ 이고 함수 $y = 238x^2 - 32x + 1$ 의 대칭축은 $x = \frac{8}{119}$

이므로 $t<0$ 에서 $238t^2 - 32t + 1 > 1$ 이다.

$\therefore a^2 - b^2 > 2$ 이면 중심이 A_4 내부에 있는 원이 존재한다.

2. $a = 2.57$ $b = 1.06$ 일때 $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$= (1.51)(3.63) > 2$ 이다

$\frac{1}{2}(1.51)\times(3.63) = 238t^2 - 32t + 1$ 의 실근의 개수를 구하면

$y = 238x^2 - 32x + 1 = f(x)$ 라 할때

$f'(x) = 476x - 32$ 이므로 $x<0$ 에서 $f'(x) < -32 < 0$ 이다

$\therefore f(x)$는 감소함수 이므로 $x<0$ 에서 $238x^2 - 32x + 1 = \frac{1}{2}(1.51)(3.63)$

이 되도록 하는 x는 유일하다.

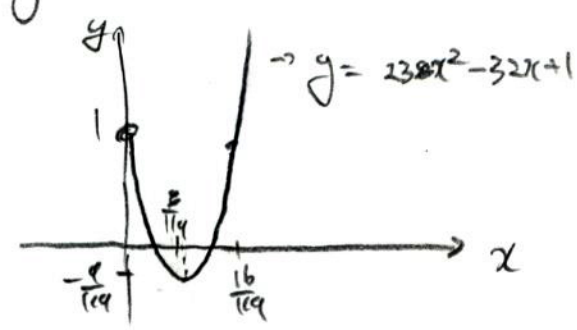
$\therefore$ 이조건을 만족하는 t값이 유일하므로 중심이 A_4 내부에 있는 원의 개수는 1개이다.

3. 원의 중심이 A_2 내부에 있으려면 그 중심의 좌표는

$(7t, 9t)$ $t>0$ 이다.

a와 b값을 선택했을때 중심이 영역 A_2의 내부에 있는 원이 존재하려면 $\frac{1}{2}(a^2-b^2) = 238t^2 - 32t + 1$ $(t>0)$ 의 근이 1개 있어야 한다. ($\because$ ①번과 거리공식에 의한 식이 같으므로)

$y = 238x^2 - 32x + 1$ 의 그래프를 그려보면



$\therefore \frac{1}{2}(a^2-b^2) \ge 1$ 또는 $\frac{1}{2}(a^2-b^2) = -\frac{9}{119}$ 이다

또한 A_4 내부에 있는 원이 존재하지 않으므로

$\frac{1}{2}(a^2-b^2) \le 1$ 이다.

이를 모두 만족시키는 경우는 $t = \frac{8}{119}$, $t = \frac{16}{119}$ 일때 이며

이때 원의 중심의 좌표는 각각

$(\frac{56}{119}, \frac{72}{119})$, $(\frac{112}{119}, \frac{144}{119})$ 이다.

문제 2번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

#1. 구간 (a, b)에 속하는 실수 x에 대하여, $y=\sin x$는 구간 (x, b)에서 미분가능하고, 구간 $[x, b]$에서 연속이므로 평균값 정리에 의하여 다음 식을 만족하는 실수 α가 구간 (x, b)에 존재한다.

$$\frac{\sin b-\sin x}{b-x}=\cos\alpha$$

이때, $y=\cos x$를 미분할 경우, $y'=-\sin x$인데 $-\sin x$는 구간 $(0, \pi)$에서 음의 부호를 가지기 때문에 $y=\cos x$는 구간 $(0, \pi)$에서 감소한다.

즉, $a<x<\alpha<b$에서 다음 부등식이 성립한다.

$$\cos b<\cos\alpha<\cos x<\cos a$$

따라서, $\cos b<\frac{\sin b-\sin x}{b-x}<\cos a$ 이고, $b-x$가 양수이기 때문에 각 변에 $(b-x)$를 곱한 후 구간 (a, b)에서 적분해주면 다음의 결과를 얻게 된다.

$$\int_a^b \cos b(b-x)\,dx \le \int_a^b(\sin b-\sin x)\,dx \le \int_a^b \cos a(b-x)\,dx$$

이때 각 정적분은 다음과 같이 계산된다.

$$\int_a^b \cos b(b-x)\,dx=\left[\frac{1}{2}\cos b\,(b-x)^2\right]_a^b$$
$$=\frac{1}{2}\cos b\,(b-a)^2$$
$$\int_a^b \cos a(b-x)\,dx=\left[\frac{1}{2}\cos a\,(b-x)^2\right]_a^b$$
$$=\frac{1}{2}\cos a\,(b-a)^2$$

따라서 주어진 부등식이 성립함을 알 수 있다.

#2.
모든 자연수 n에 대하여 $d_{n+1}-d_n=\frac{1}{n+2}$이다. 양변을 $(n+1)$로 나누면

$\frac{d_{n+1}}{n+1}-\frac{d_n}{n+1}=\frac{1}{(n+1)(n+2)}$이 된다. 따라서 $\sum_{k=1}^{n}\frac{d_k}{k(k+1)}$은 다음과 같이 계산된다.

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{d_k}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}d_k\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{d_k}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{d_k}{k+1}$$
$$=d_1+\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{d_k}{k}-\frac{d_{k-1}}{k}\right)-\frac{d_n}{n+1}$$
$$=d_1+\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k(k+1)}\right)-\frac{d_n}{n+1}$$
$$=\frac{3}{2}+\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)-\frac{d_n}{n+1}$$
$$=2-\frac{d_n+1}{n+1}$$

한편, $y=\frac{1}{x}$을 미분하면, $y'=-\frac{1}{x^2}$이고 $x>0$에서 $-\frac{1}{x^2}$의 부호가 음이므로 $y=\frac{1}{x}$은 $x>0$에서 감소한다. 따라서 함수 $f(x)$를 $f(x)=\frac{1}{x}$이라 할 때 자연수 n에 대해 다음이 성립한다.

$$\int_{n+1}^{n+2}f(x)dx<\frac{1}{n+1}<\int_{n}^{n+1}f(x)\,dx \quad -①$$

따라서, 1부터 n까지의 자연수에 대해 ①의 식을 모두 더해주면 다음 결과가 나오게 된다.

$$\int_2^{n+2}f(x)dx<\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k}<\int_1^{n+1}f(x)dx$$

이때, $\int_2^{n+2}f(x)\,dx=[\ln x]_2^{n+2}=\ln\frac{n+2}{2}$ 이고, $\int_1^{n+1}f(x)dx=[\ln x]_1^{n+1}=\ln(n+1)$ 이므로, d_n은 다음 부등식을 만족한다.

$$\ln\frac{n+2}{2}+1<d_n<\ln(n+1)+1$$

이때, 각 변에 1을 더하고 $n+1$로 나누면 다음 부등식이 성립한다.

$$\frac{\ln\frac{n+2}{2}+2}{n+1}<\frac{d_n+1}{n+1}<\frac{\ln(n+1)+2}{n+1}$$

$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)+2}{n+1}=0$, $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(\frac{n+2}{2}\right)+2}{n+1}=0$이므로 샌드위치 법칙에 의해 $\lim_{n\to\infty}\frac{d_n+1}{n+1}=0$이다. 따라서 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{d_k}{k(k+1)}=2$이다.

#3.
① $m=2$일 때
$(1-x)^2(1+x)^n$의 x^k의 계수는 $a_k={}_nC_k-2\cdot{}_nC_{k-1}+{}_nC_{k-2}$이다. (단 $k\ge 2$인 정수)
$k\le n+1$인 정수 k에 대해 $a_k=a_{k+1}=0$이라 가정하자.
다음이 성립해야 한다.

$${}_nC_k-{}_nC_{k-1}={}_nC_{k-1}-{}_nC_{k-2} \quad -①$$
$${}_nC_k-2\cdot{}_nC_{k-1}+{}_nC_{k-2}={}_nC_{k+1}-2{}_nC_k+{}_nC_{k-1} \quad -②$$
$${}_nC_{k+1}-{}_nC_k={}_nC_k-{}_nC_{k-1} \quad -③$$

①에서 ${}_nC_k-{}_nC_{k-1}={}_{n-1}C_{k-1}$이고, ${}_nC_{k-1}-{}_nC_{k-2}={}_{n-1}C_{k-2}$이므로 ${}_{n-1}C_{k-1}={}_{n-1}C_{k-2}$이어야 한다. 또한, ③에서 마찬가지 이유로 ${}_{n-1}C_k={}_{n-1}C_{k-1}$이어야 한다. 따라서 ${}_nC_k$의 정의에 의하여 다음이 성립해야 한다.

$$\frac{{}_{n-1}C_{k-1}}{{}_{n-1}C_{k-2}}=\frac{n-k+1}{k-1}=1$$
$$\frac{{}_{n-1}C_k}{{}_{n-1}C_{k-1}}=\frac{n-k}{k}=1$$

따라서, $n=2k=2k-2$이어야 하므로 모순이다. 따라서 $2\le k\le n+1$인 k에 대해 $a_k=a_{k+1}=0$인 k가 존재하지 않는다.
$a_1=n-2$, $a_0=1$, $a_2={}_nC_2-2n+1$이므로 $k=0$, 1에 대해서도 $a_k=a_{k+1}=0$인 k가 존재하지 않는다.

② 어떠한 자연수 m에 대하여 주어진 명제가 성립한다고 가정하자.
$(1-x)^m(1+x)^n$의 x^k의 계수를 b_k라 정의하자 (단 $0\le k\le m+n$)
$(1-x)(1-x)^m(1+x)^n$에서 x^{k+1}의 계수는 $b_{k+1}-b_k$인데 $b_{k+1}=b_k=0$인 정수 k가 존재하지 않으므로 $b_{k+1}-b_k=0$, $b_{k+2}-b_{k+1}=0$인 k가 존재하지 않는다. $(1-x)(1-x)^m(1+x)^n$에서 상수항이 1이므로 $k=0$일 때도 성립하지 않는다.

①, ②에 의하여 수학적 귀납법에 의해 주어진 명제가 성립한다.

한양대학교

답안지 (자연계)

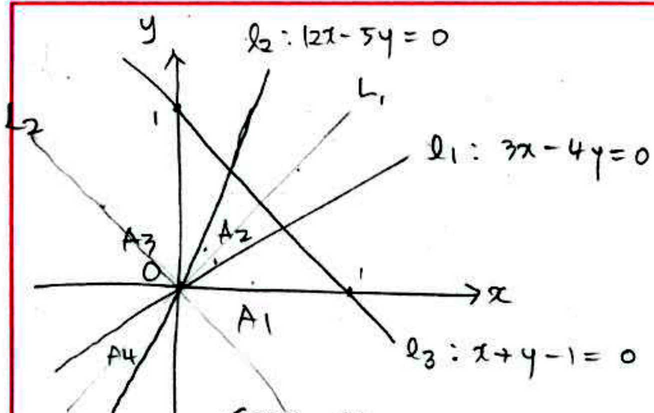
답안지 바코드

지원학과	
성 명	
수험번호	
생년월일 (예:980301)	

수험생 유의사항

1. 답안지는 검정색 펜(볼펜, 연필, 샤프)으로 작성하십시오. (빨강색이나 파랑색 사용금지)
2. 답안지를 수정할 경우 지우개(연필, 샤프 사용 시)를 사용하거나 두 줄을 긋고(볼펜 사용 시) 그 위에 재 작성하십시오.
3. 답안과 관련 없는 표현이나 표시를 한 답안지는 "0"점 처리 됩니다.
4. 본 고사는 답안지 1장 이내에 답안을 작성하여야 합니다. 답안지 교체는 가능하지만 기존 답안지 제출은 불가합니다.

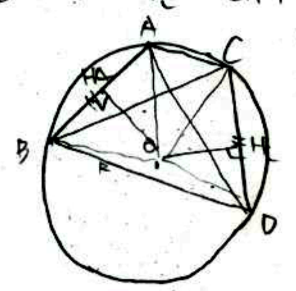
문제 1번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)



<그림 1>

1. 원이 l_1과 l_2와 만나 이루는 현의 길이가 a로 같고, l_3와는 이루는 현의 길이가 b이다. $(a, b>0)$

임의의 원 내부에 길이가 같은 두 현을 그려보자.



<그림 2>

-) $\overline{AB}$와 $\overline{CD}$가 겹치지 않는 경우

$\overline{AB}=\overline{CD}$ 이므로 $\angle AOB=\angle COD$ 이다.
또한 $AO=CO$, $BO=DO$ 이므로
$\triangle ABO \equiv \triangle CDO$ 이고, O에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 H_A, $\overline{CD}$에 내린 수선의 발을 H_C라 두면
$\overline{OH_A}$는 O와 직선 $\overleftrightarrow{AB}$ 사이의 거리이고
$\overline{OH_C}$는 O와 직선 $\overleftrightarrow{CD}$ 사이의 거리이다.
또한, $\overline{OH_A}=\overline{OH_C}$ 이다. 즉, O에서 직선 $\overleftrightarrow{AB}$ 와 직선 $\overleftrightarrow{CD}$에 이르는 거리가 같다.

따라서, 좌표평면 위의 원이 l_1과 l_2와 이루는 현의 길이가 같다면 원의 중심 O에서 l_1, l_2에 이르는 거리가 같다는 것이 필요충분조건이다.

$\Leftrightarrow$ O는 l_1, l_2가 이루는 예각의 각이등분선 L_1 또는 l_1, l_2가 이루는 둔각의 각이등분선 L_2 위에 있다. $(L_1 \perp L_2)$

l_1과 x축이 이루는 예각을 α
l_2와 x축이 이루는 예각을 β 라 두면 $\tan\alpha=\frac{3}{4}$, $\tan\beta=\frac{12}{5}$ 이다.

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{3}{4}+\frac{12}{5}}{1-\frac{3}{4}\cdot\frac{12}{5}}=-\frac{63}{16}$$

$$=\frac{2\tan\frac{\alpha+\beta}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha+\beta}{2}}$$ 이다.

$\Rightarrow 63\tan^2\frac{\alpha+\beta}{2}-32\tan\frac{\alpha+\beta}{2}-63=0$ 이고,

$\tan\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{9}{7}$ 가 된다

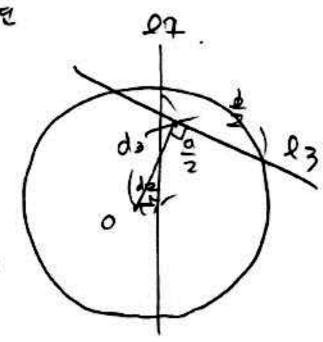
L_1이 x축과 이루는 예각이 $\frac{\alpha+\beta}{2}$ 이므로
L_1의 기울기는 $\frac{9}{7}$ 이고, L_1이 원점을 지나므로
L_1의 직선의 방정식은 $9x-7y=0$ 이다.
$L_1 \perp L_2$ 이고 L_2도 원점 지나므로

L_2의 직선의 방정식은 $7x+9y=0$ 이다.

이제, 원의 중심이 A_4 위에 있고 l_1과 l_2와 만나는 현의 길이가 a로 같은 원의 중심 좌표를 $(7t, 9t)$ $(t<0)$ 으로 두자. 원의 반지름을 R로 두고. 원의 중심 O에서 l_1, l_2, l_3까지 거리 d_1, d_2, d_3를 구하면

$$d_1=\frac{|3\cdot 7t-4\cdot 9t|}{\sqrt{3^2+4^2}}=-3t, \quad d_2=-3t$$

$$d_3=\frac{|7t+9t-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{|1-16t|}{\sqrt{2}}.$$



이제

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2+d_2^2=\frac{a^2}{4}+9t^2=R^2$$

$$=\left(\frac{b}{2}\right)^2+d_3^2=\frac{b^2}{4}+\frac{256t^2-32t+1}{2}$$ 임을 이용하면

$119t^2-16t+\frac{1}{2}+\frac{b^2-a^2}{4}=0$ 의 음의 해가 존재해야 함 ··· 방정식 ①

$$\therefore t=\frac{8\pm\sqrt{8^2-119\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{b^2-a^2}{4}\right)}}{119}$$ 이므로

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}+\frac{b^2-a^2}{4}<0$ 이어야 ··· 식 ② 음의 근 t 유일 존재 (if not, 두 근 모두 양수 or 근이 존재 안함)

$\Leftrightarrow \boxed{b^2-a^2<-2}$

2. $a=2.57$, $b=1.06$ 이면
$b^2-a^2=1.1236-6.6049<-2$ 이므로
원이 하나 존재한다.

3. 방정식 ①은 원의 중심이 A_2에 있어도 성립한다. (즉 $t>0$ 일때도 성립)
식 ② 에서 $\frac{1}{2}+\frac{b^2-a^2}{4}=0$ 이면
$t=0$, $\frac{16}{119}$ 으로 양수근은
$t=\frac{16}{119}$ 으로 유일하고, 원의 중심 좌표는 $\left(\frac{16}{17}, \frac{144}{119}\right)$

식 ②에서 $8^2-119\left(\frac{1}{2}+\frac{b^2-a^2}{4}\right)=0$ 이면
$t=\frac{8}{119}$ 로 유일하고 원의 중심 좌표는 $\left(\frac{8}{17}, \frac{72}{119}\right)$ 이다.

문제 2번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

1. 평균값 정리에 의해

$\sin b - \sin x = (b-x)\cdot\cos c$ 인 c가 $[a,b]$에 존재한다.

$\int_a^b (\sin b - \sin x)\,dx = \int_a^b \{(b-x)\cos c\}\,dx = \left[b\cos c\cdot x - \frac{1}{2}x^2\cos c\right]_a^b$

$= \frac{1}{2}(b-a)^2\cdot\cos c$ $\cancel{(a<c<b)}$ $(0\le a<c<b\le\pi)$

함수 $y=\cos x$는 $[0,\pi]$에서 감소하므로

$\cos b \le \cos c \le \cos a$ 이다.

$(b-a)^2>0$ 이므로 $\frac{1}{2}(b-a)^2\cos b \le \frac{1}{2}(b-a)^2\cos c \le \frac{1}{2}(b-a)^2\cos a$

따라서 부등식 $\frac{1}{2}(b-a)^2\cos b \le \int_a^b(\sin b - \sin x)\,dx \le \frac{1}{2}(b-a)^2\cos a$ 가

$0\le a<b\le\pi$ 인 실수 a, b에 대해 성립한다.

2.

$\sum_{k=1}^{n}\frac{d_k}{(k+1)k} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{d_k}{k}-\frac{d_k}{k+1}\right) = d_1 - \frac{d_1}{2} + \frac{d_2}{2} - \frac{d_2}{3} + \cdots + \frac{d_n}{n} - \frac{d_n}{n+1}$

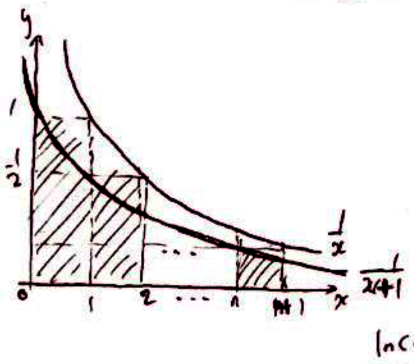
$= d_1 + \frac{1}{2}(d_2-d_1) + \frac{1}{3}(d_3-d_2) + \frac{1}{n}\left(d_n - \cancel{d_{n+1}}\, d_{n-1}\right) - \frac{d_n}{n+1}$

한편, $d_n - d_{n-1} = \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \frac{1}{n+1}$ 이다.

따라서 $\sum_{k=1}^{n}\frac{d_k}{(k+1)k} = d_1 - \frac{d_n}{n+1} + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$

$= d_1 - \frac{d_n}{n+1} + \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

$= 2 - \frac{d_n+1}{n+1}$



그래프에서 보듯이

$\int_0^{n+1}\frac{1}{x+1}\,dx \le 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n+1} \le 1+\int_1^{n+1}\frac{1}{x}\,dx$

$\ln(n+2) \le d_n \le 1+\ln(n+1)$

$\frac{\ln(n+2)+1}{n+1} \le \frac{d_n+1}{n+1} \le \frac{\ln(n+1)+2}{n+1}$ 이므로

양변에 $n\to\infty$인 극한을 취하면

$0 \le \lim_{n\to\infty}\frac{d_n+1}{n+1} \le 0$ 이므로

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{d_k}{(k+1)k} = 2 - \lim_{n\to\infty}\frac{d_n+1}{n+1} = 2$ 이다.

3.

$a_k = a_{k+1} = 0$ 을 만족시키는 k가

존재한다고 해보자.

모순을 발견하게 된다.

따라서 $a_k = a_{k+1} = 0$ 을 만족시키는