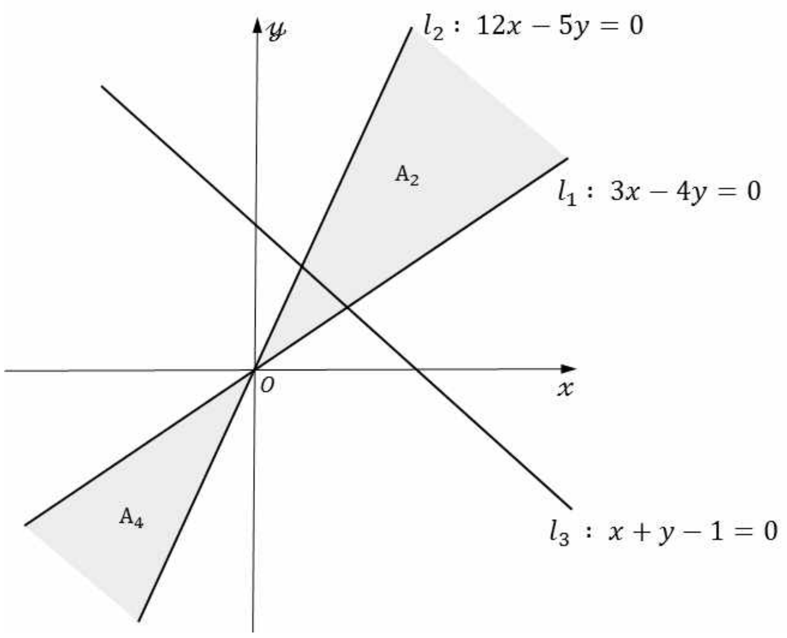
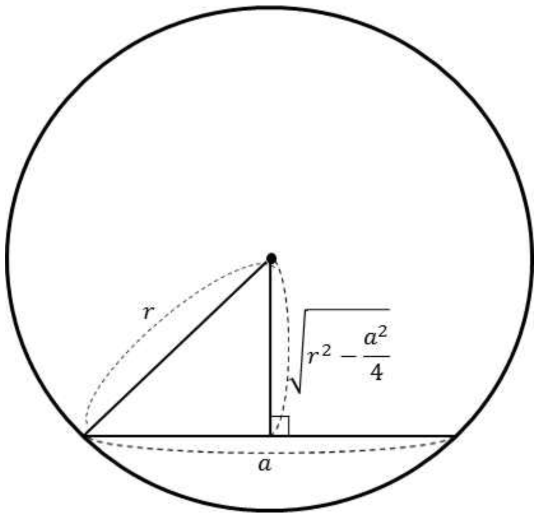
한양대학교 2018학년도 신입학전형 수시

자 연 계 | **논 술 예 시 답 안** | 의예-1번





제시문의 조건을 만족하는 원의 중심점을 (x, y), 반지름을 r이라 하고,
점과 직선사이의 거리공식을 적용하면,

$$\frac{|3x-4y|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}, \quad \frac{|12x-5y|}{\sqrt{12^2+5^2}} = \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}, \quad \frac{|x+y-1|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \sqrt{r^2 - \frac{b^2}{4}} \quad \left(r > \frac{a}{2}, r > \frac{b}{2}\right)$$

이 성립한다.

위의 세 식들을 연립하여 $\sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}$ 에 대한 2차방정식을 유도하여 $\sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}$ 의 값을 살펴보도록 한다.

1. $(x, y) \in A_4$이면 $3x - 4y = 5\sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}$, $12x - 5y = -13\sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}$ 이므로 두 식을 연립하면

   $x = -\frac{7}{3}\sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}$, $y = -3\sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}$ 이다.

   따라서 $|x+y-1| = \left|\frac{16}{3}\sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}} + 1\right| = \sqrt{2}\sqrt{r^2 - \frac{b^2}{4}}$ 이 성립한다.

   위의 등식에서 양변에 3을 곱한 후 제곱하면,

   $$256\left(r^2 - \frac{a^2}{4}\right) + 96\sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}} + 9 = 18\left(r^2 - \frac{b^2}{4}\right) = 18\left(r^2 - \frac{a^2}{4} + \frac{a^2 - b^2}{4}\right)$$ 이므로

   $$238\left(r^2 - \frac{a^2}{4}\right) + 96\sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}} + 9\left(1 + \frac{1}{2}(b^2 - a^2)\right) = 0 \quad \cdots\cdots (1)$$

   $X = \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}$ 으로 놓으면 위의 방정식은 다음과 같이 변환된다.

   $$238X^2 + 96X + \frac{9}{2}(2 + b^2 - a^2) = 0 \quad \cdots\cdots (1)$$

   물음의 원이 존재하려면 위의 방정식은 양의 실수해를 가져야 하는데, 1차항의 계수가 양수이므로,
   <u>양의 실수해가 존재한다면 단 한개만 가져야하고 이는 $2 + b^2 - a^2 < 0$일 때만 가능하다</u>. …… ★

   $\therefore 2 + b^2 - a^2 < 0$

2. $a = 2.57$, $b = 1.06$이면 $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$이고 $a + b > 1.5$, $a - b > 1.5$이므로 $a^2 - b^2 > 2$이다.
   따라서 $a = 2.57$, $b = 1.06$이면 문항 1에서 도출된 조건을 만족시키는데,
   ★에 의해 제시문의 원들 중 중심이 영역 A_4의 내부에 있는 원은 1개이다.

3. $(x, y) \in A_2$ 이면 $3x - 4y = -5\sqrt{r^2 - \dfrac{a^2}{4}}$, $12x - 5y = 13\sqrt{r^2 - \dfrac{a^2}{4}}$ 이므로, 두 식을 연립하면

$x = \dfrac{7}{3}\sqrt{r^2 - \dfrac{a^2}{4}}$, $y = 3\sqrt{r^2 - \dfrac{a^2}{4}}$ 이다. …… (2)

따라서 $|x + y - 1| = \left|\dfrac{16}{3}\sqrt{r^2 - \dfrac{a^2}{4}} - 1\right| = \sqrt{2}\sqrt{r^2 - \dfrac{b^2}{4}}$,

$256\left(r^2 - \dfrac{a^2}{4}\right) - 96\sqrt{r^2 - \dfrac{a^2}{4}} + 9 = 18\left(r^2 - \dfrac{b^2}{4}\right) = 18\left(r^2 - \dfrac{a^2}{4} + \dfrac{a^2 - b^2}{4}\right)$,

$238\left(r^2 - \dfrac{a^2}{4}\right) - 96\sqrt{r^2 - \dfrac{a^2}{4}} + 9\left(1 + \dfrac{1}{2}(b^2 - a^2)\right) = 0$

$X = \sqrt{r^2 - \dfrac{a^2}{4}}$ 으로 놓으면 다음의 2차방정식을 얻는다.

$238X^2 - 96X + \dfrac{9}{2}(2 + b^2 - a^2) = 0$ …… (3)

한편 $(x, y) \notin A_4$ 이므로 문항 1 에서 도출된 조건에 의해 $2 + b^2 - a^2 \geq 0$ 이 성립해야한다.
그러므로 방정식(3)의 양인 실수해는 다음의 두 가지 경우로 나누어서 구할 수 있다.

경우 1) $2 + b^2 - a^2 = 0$ 일 때

$238X^2 - 96X + 0 = 0$ 이므로 $\sqrt{r^2 - \dfrac{a^2}{4}} = X = \dfrac{48}{119}$ 이고,

이를 식 (2)에 대입하면 $x = \dfrac{16}{17}$, $y = \dfrac{144}{119}$ 이다.

case 2) $2 + b^2 - a^2 > 0$ 일 때

문항에서는 중심이 영역 A_2 안에 있는 원이 단 하나 존재하도록 a, b 가 선택되었다 했으므로,
방정식 (3) 의 양의 실수해는 하나만 존재해야한다. 방정식 (3) 의 상수항은 양수이고 일차항의 계수가 음수이므로 양의 실수해가 하나만 존재하기 위해서는 방정식(3)은 중근을 가져야한다.

따라서, $\sqrt{r^2 - \dfrac{a^2}{4}} = X = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{96}{238} = \dfrac{24}{119}$ 이 성립해야하고,

이를 식(2)에 대입하면

$x = \dfrac{8}{17}$, $y = \dfrac{72}{119}$

$\therefore$ 문항에서 요구하는 원의 중심의 좌표는 $\left(\dfrac{16}{17}, \dfrac{144}{119}\right)$ 이거나 $\left(\dfrac{8}{17}, \dfrac{72}{119}\right)$ 이다.

한양대학교 2018학년도 신입학전형 수시		
자 연 계	**논 술 예 시 답 안**	오후-의예과-2번

1. 함수 $f(x)=\sin x$는 미분 가능하므로,

평균값 정리에 의해 $a<x<b$인 실수 x에 대하여 $\sin b-\sin x=(\cos\alpha)(b-x)$인 $\alpha\in(x,b)$가 존재한다.

또한, $f'(x)=\cos x$는 구간 $[0,\pi]$에서 감소하므로, $\cos a\ge\cos\alpha\ge\cos b$가 성립한다.

그런데, $b-x>0$이므로, $(b-x)\cos a\ge(b-x)\cos\alpha=\sin b-\sin x\ge(b-x)\cos b$이다.

각 변을 a에서 b까지 적분하면, $\int_a^b(b-x)\cos b\,dx\le\int_a^b(\sin b-\sin x)dx\le\int_a^b(b-x)\cos a\,dx$ 이다.

그러므로 $\frac{1}{2}(b-a)^2\cos b\le\int_a^b(\sin b-\sin x)dx\le\frac{1}{2}(b-a)^2\cos a$ 이다.

2. $d_1=\frac{3}{2}$, $d_k-d_{k-1}=\frac{1}{k+1}$ 이다.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{d_k}{k(k+1)}&=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{d_k}{k}-\frac{d_k}{k+1}\right)=(d_1-\frac{d_1}{2})+(\frac{d_2}{2}-\frac{d_2}{3})+\cdots+(\frac{d_n}{n}-\frac{d_n}{n+1})\\&=d_1+\frac{1}{2}(d_2-d_1)+\frac{1}{3}(d_3-d_2)+\cdots+\frac{1}{n}(d_n-d_{n-1})-\frac{d_n}{n+1}\\&=\frac{3}{2}+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+\cdots+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})-\frac{d_n}{n+1}\\&=2-\frac{1}{n+1}-\frac{d_n}{n+1}\end{aligned}$$

부등식 $\ln(n+1)=\int_1^{n+1}\frac{1}{x}dx\le d_n=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}\le1+\int_1^{n+1}\frac{1}{x}dx=1+\ln(n+1)$이 성립하므로,

각 변을 $n+1$로 나누고 극한 $\lim_{n\to\infty}$을 취하면, $0=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)}{n+1}\le\lim_{n\to\infty}\frac{d_n}{n+1}\le\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{\ln(n+1)}{n+1}\right)=0$이다.

따라서 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{d_n}{n+1}=0$이므로, $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{d_k}{k(k+1)}=2$이다.

3. $q(x)=(1-x)^{m-1}(1+x)^n$의 x^k의 계수를 b_k $(0\le k\le m+n-1)$,

$r(x)=(1-x)^m(1+x)^{n-1}$의 x^k의 계수를 c_k $(0\le k\le m+n-1)$이라 하자.

그러면 $p(x)=q(x)-xq(x)=r(x)+xr(x)$임을 알 수 있다.

위의 등식에서 x^k $(0\le k\le m+n)$의 계수를 비교하면, $a_k=b_k-b_{k-1}=c_k+c_{k-1}$ ⋯⋯ (1)

$p(x)=\sum_{k=0}^{m+n}a_kx^k=(1-x)^m(1+x)^n$라 놓고, 양변을 미분하면

$$p'(x)=\sum_{k=1}^{m+n}ka_kx^{k-1}=-m(1-x)^{m-1}(1+x)^n+n(1-x)^m(1+x)^{n-1}=-mq(x)+nr(x)$$

$$\Rightarrow\sum_{k=1}^{m+n}ka_kx^{k-1}=-m\sum_{k=0}^{m+n-1}b_kx^k+n\sum_{k=0}^{m+n-1}c_kx^k$$

위 등식에서 x^{k-1} $(1\le k\le m+n)$의 계수를 비교하면, $ka_k=-mb_{k-1}+nc_{k-1}$ ⋯⋯ (2)

이항정리를 이용하면, $p(x)$의 x^{m+n}의 계수는 $a_{m+n}=(-1)^m\times1^n=(-1)^m\ne0$임을 알 수 있다.

어떤 $k\in\{0,1,\cdots,m+n-2\}$에 대하여 $a_k=a_{k+1}=0$이라고 가정하자.

$a_k = a_{k+1} = 0$ 인 $k \in \{0, 1, \cdots, m+n-2\}$에 대하여, 식 (1)에 의하여

$$b_k - b_{k-1} = 0 \ \cdots\cdots \ ① \qquad c_k + c_{k-1} = 0 \ \cdots\cdots \ ②$$
$$b_{k+1} - b_k = 0 \ \cdots\cdots \ ③ \qquad c_{k+1} + c_k = 0 \ \cdots\cdots \ ④$$

식 (2)에 의해, $-mb_{k-1} + nc_{k-1} = 0 \ \cdots\cdots$ ⑤, $-mb_k + nc_k = 0 \ \cdots\cdots$ ⑥

$$mb_k + nc_k = mb_k + n(-c_{k-1}) \qquad (\because ② \ c_k = -c_{k-1})$$
$$= mb_{k-1} - mb_{k-1} = 0 \ \cdots\cdots \ ⑦ \qquad (\because ① \ b_k = b_{k-1} \quad ⑤ \ -nc_{k-1} = -mb_{k-1})$$

식 ⑥과 식 ⑦을 연립하여 풀면 $b_k = c_k = 0$ 이고, 식 ③과 식 ④로부터 $b_{k+1} = c_{k+1} = 0$ 임을 알 수 있다.

식 (2) 에 의해, $(k+2)a_{k+2} = -mb_{k+1} + nc_{k+1} = 0$. 따라서 $a_{k+2} = 0$ 이다.

$a_{k+1} = a_{k+2} = 0$ 이므로, 같은 방법으로 $b_{k+2} = c_{k+2} = 0$ 과 $a_{k+3} = 0$ 을 얻는다.

같은 방법으로 계속하면, $l \geq k$ 에 대하여 $a_l = 0$ 을 얻는다. 즉, $a_k = a_{k+1} = \cdots = a_{m+n} = 0$ 이다.

그런데, $a_{m+n} \neq 0$ 이므로, 모순이다. 그러므로 $a_k = a_{k+1}$ 인 $k \in \{0, 1, \cdots, m+n-1\}$는 존재하지 않는다.

	한양대학교 2018학년도 신입학전형 수시 논술고사	
자 연 계	**출제 의도 및 평가 지침**	오후(2)-1번

1. 출제 의도 및 문제 해설

좌표평면위의 직선과 원의 상대적 위치관계를 묻는 문제이다. 고등학교 교과과정에서 배우는

- 점과 직선사이의 거리
- 일차부등식과 영역
- 이차방정식이 실수해를 가질 조건(특히 이 문제에서는 주어진 이차방정식이 양의 실수해를 가질 조건)

과 같은 기초적인 사항에 대한 이해만으로도 문제를 해결할 수 있도록 출제되었는데,
주어진 지문을 읽고 이를 수학적 상황으로 해석하고 여기에 교과내용을 적용할 수 있는 분석력과 논리적 사고력을 평가하는데 주안점을 두었다.

2. 종합 평가 기준

문항	배점	세부 평가 기준	세부 배점
1	50	부등식 $2+b^2-a^2<0$ 또는 이와 동치인 부등식을 정확히 유도했는가? (a와 b에 대한 관한 식으로 답을 할 것.)	40
		조건 도출을 위한 논리의 전개가 명확하게 기술되었는가?	10
2	10	문항1에서 유도한 조건에 근거하여 문항에 명시된 원의 개수가 1개라는 결론을 도출하였는가?	10
3	40	중심의 좌표 $\left(\frac{16}{17}, \frac{144}{119}\right)$와 $\left(\frac{8}{17}, \frac{72}{119}\right)$를 모두 유도하였는가? (한개만 유도한 경우는 10점)	30
		결론 도출을 위한 논리의 전개가 명확하게 기술되었는가?	10

한양대학교 2018학년도 신입학전형 수시 논술고사

자 연 계

출제 의도 및 평가 지침

오후(2)-2번

1. 출제 의도 및 문제 해설

고등학교 교육과정을 정상적으로 이수한 학생은 누구나 해결할 수 있는 문제를 고등학교 교과과정의 범위에서 출제하였다. 특히, 수학의 개념, 원리, 법칙을 정확히 이해하고 수학적 사고력을 바탕으로 논리적으로 문제를 해결할 수 있는 능력을 측정하는데 주안점을 두고 출제를 하였다. 개념과 원리의 이해와 수리적 사고력은 민주 사회를 구현하기 위한 토대가 될 뿐 만 아니라 국가 경쟁력을 갖추는데 필수적인 요소라 할 수 있다. 특히, 4차 산업혁명 시기에 절실히 요구되는 수학적 사고력, 추론 능력을 키우기 위한 수학의 기본 개념과 중요한 정리들의 의미를 이해하고 있는지 측정하고자 하였다.

자연계 오후(2)의 2번 문제는 미분, 적분 및 수열에서 핵심적인 내용을 이해하고 있는지를 측정하는 문제이다. 문항 1은 미분가능한 함수의 성질을 숙지하고, 평균값 정리를 잘 이해하고 있는지 여부를 측정하고 간단한 적분을 통해 부등식을 구할 수 있는 능력을 측정하는 문제이다. 문항 2는 수열의 합이 함수의 적분값에 의해 유계되는 부등식을 구하고, 이를 통해 극한값을 구할 수 있는 능력을 측정하는 문제로써 수열과 적분을 결합한 전형적인 문제이다. 문항 3은 다항식의 이항정리를 이해하고 다항식의 계수들의 관계를 찾을 수 있는 추론능력을 측정하는 문제이다.

문제 2는 고등학교 수학교과에서 중요하게 다루어지는 수열과 급수, 미분, 적분, 확률과 통계단원에 관련된 종합적인 문제이고, 이를 통해 학생들이 학교교육을 성실히 이수했는지를 평가하고자 출제하였다. 이 문제를 통하여 수열과 급수의 극한, 평균값 정리와 이항정리를 이해하고 이를 이용하여 주어진 부등식을 보이고 극한값과 다항식의 계수의 관계를 구할 수 있는 수학적 사고력을 통한 문제 해결능력과 논리적 사고력을 측정할 수 있다.

2. 종합 평가 기준

문항	배점	세부 평가 기준	세부 배점
1	30	평균값 정리를 이해하고, 부등식 $(b-x)\cos b \le \sin b - \sin x \le (b-x)\cos a$을 구하였는가?	20
		적분을 통하여 부등식이 성립함을 보였는가?	10
2	30	부분합 $\sum_{k=1}^{n}\frac{d_k}{k(k+1)}$을 구했는가?	15
		적분을 이용하여 구한 부등식을 통해 극한값 $\lim_{n\to\infty}\frac{d_n}{n+1}$을 구하고, 극한값 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{d_k}{k(k+1)}$을 구했는가?	15
3	40	관계식 $a_k=b_k-b_{k-1}=c_k+c_{k-1}$과 $ka_k=-mb_{k-1}+nc_{k-1}$를 구했는가?	15
		구한 관계식을 통하여 $a_{k+2}=0$을 구했는가?	15
		귀납적 방법으로 $a_{m+n}=0$을 구하고, 모순점을 찾아는가?	10