한양대학교 2018학년도 신입학전형 수시

자 연 계	**논 술 예 시 답 안**	오후(2)-2번

1. 함수 $f(x)=\sin x$는 미분 가능하므로,

평균값 정리에 의해 $a<x<b$인 실수 x에 대하여 $\sin b-\sin x=(\cos\alpha)(b-x)$인 $\alpha\in(x,b)$가 존재한다.

또한, $f'(x)=\cos x$는 구간 $[0,\pi]$에서 감소하므로, $\cos a\ \ge\ \cos\alpha\ \ge \cos b$가 성립한다.

그런데, $b-x>0$이므로, $(b-x)\cos a\ \ge\ (b-x)\cos\alpha=\sin b-\sin x\ \ge\ (b-x)\cos b$이다.

각 변을 a에서 b까지 적분하면, $\int_a^b(b-x)\cos b\,dx\le\int_a^b(\sin b-\sin x)dx\le\int_a^b(b-x)\cos a\,dx$ 이다.

그러므로 $\frac{1}{2}(b-a)^2\cos b\le\int_a^b(\sin b-\sin x)dx\le\frac{1}{2}(b-a)^2\cos a$ 이다.

2. $\int e^{-x}\cos x\,dx=-e^{-x}\cos x-\int e^{-x}\sin x\,dx\ =-e^{-x}\cos x-\left[-e^{-x}\sin x+\int e^{-x}\cos x\,dx\right]$

$$\therefore\int e^{-x}\cos x\,dx=\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x-\cos x).$$

① $\int_{(k-\frac{1}{2})\pi}^{(k+\frac{1}{2})\pi}e^{-x}\cos x\,dx=\left[\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x-\cos x)\right]_{(k-\frac{1}{2})\pi}^{(k+\frac{1}{2})\pi}=(-1)^k\frac{1}{2}\left(e^{-(k+\frac{1}{2})\pi}+e^{-(k-\frac{1}{2})\pi}\right)$

② $a_n=\int_{(k-\frac{1}{2})\pi}^{(k+\frac{1}{2})\pi}\left|e^{-x}\cos x\right|dx=\begin{cases}\int_{(k-\frac{1}{2})\pi}^{(k+\frac{1}{2})\pi}e^{-x}\cos x\,dx,\ k=\text{짝수}\\-\int_{(k-\frac{1}{2})\pi}^{(k+\frac{1}{2})\pi}e^{-x}\cos x\,dx,\ k=\text{홀수}\end{cases}=\frac{1}{2}\left(e^{-(k+\frac{1}{2})\pi}+e^{-(k-\frac{1}{2})\pi}\right)=\frac{1}{2}\left(e^{-(k-\frac{1}{2})\pi}+e^{-(k+\frac{1}{2})\pi}\right)$

따라서 급수의 합은 다음과 같다.

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(e^{-(k-\frac{1}{2})\pi}+e^{-(k+\frac{1}{2})\pi}\right)=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left[e^{-\frac{1}{2}\pi}+e^{-\frac{3}{2}\pi}+e^{-\frac{3}{2}\pi}+e^{-\frac{5}{2}\pi}+\cdots+e^{-(n-\frac{1}{2})\pi}+e^{-(n+\frac{1}{2})\pi}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left[e^{-\frac{1}{2}\pi}+2\frac{e^{-\frac{3}{2}\pi}(1-e^{-(n-1)\pi})}{1-e^{-\pi}}+e^{-(n+\frac{1}{2})\pi}\right]=\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}\pi}+\frac{e^{-\frac{3}{2}\pi}}{1-e^{-\pi}}\ =\frac{1}{2}\frac{e^{-\frac{1}{2}\pi}+e^{-\frac{3}{2}\pi}}{1-e^{-\pi}}=\frac{e^{-\frac{1}{2}\pi}}{2}\frac{1+e^{-\pi}}{1-e^{-\pi}}$$

3. $b_1=\frac{3}{2},\ b_k-b_{k-1}=\frac{1}{k+1}$ 이다.

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{b_k}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{b_k}{k}-\frac{b_k}{k+1}\right)=(b_1-\frac{b_1}{2})+(\frac{b_2}{2}-\frac{b_2}{3})+\cdots+(\frac{b_n}{n}-\frac{b_n}{n+1})$$
$$=b_1+\frac{1}{2}(b_2-b_1)+\frac{1}{3}(b_3-b_2)+\cdots+\frac{1}{n}(b_n-b_{n-1})-\frac{b_n}{n+1}$$
$$=\frac{3}{2}+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+\cdots+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})-\frac{b_n}{n+1}$$
$$=2-\frac{1}{n+1}-\frac{b_n}{n+1}$$

부등식 $\ln(n+1)=\int_1^{n+1}\frac{1}{x}dx\le b_n=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}\le1+\int_1^{n+1}\frac{1}{x}dx=1+\ln(n+1)$이 성립하므로,

각 변을 $n+1$로 나누고 극한 $\lim_{n\to\infty}$을 취하면, $0=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)}{n+1}\le\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n+1}\le\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{\ln(n+1)}{n+1}\right)=0$이다.

따라서 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n+1}=0$이므로, $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{b_k}{k(k+1)}=2$이다.

한양대학교 2018학년도 신입학전형 수시 논술고사

자 연 계	출제 의도 및 평가 지침	오후(2)-2번

1. 출제 의도 및 문제 해설

고등학교 교육과정을 정상적으로 이수한 학생은 누구나 해결할 수 있는 문제를 고등학교 교과과정의 범위에서 출제하였다. 특히, 수학의 개념, 원리, 법칙을 정확히 이해하고 수학적 사고력을 바탕으로 논리적으로 문제를 해결할 수 있는 능력을 측정하는데 주안점을 두고 출제를 하였다. 개념과 원리의 이해와 수리적 사고력은 민주 사회를 구현하기 위한 토대가 될 뿐 만 아니라 국가 경쟁력을 갖추는데 필수적인 요소라 할 수 있다. 특히, 4차 산업혁명 시기에 절실히 요구되는 수학적 사고력, 추론 능력을 키우기 위한 수학의 기본 개념과 중요한 정리들의 의미를 이해하고 있는지 측정하고자 하였다.

자연계 오후(2)의 2번 문제는 미분, 적분 및 수열에서 핵심적인 내용을 이해하고 있는지를 측정하는 문제이다. 문항 1은 미분가능한 함수의 성질을 숙지하고, 평균값 정리를 잘 이해하고 있는지 여부를 측정하고 간단한 적분을 통해 부등식을 구할 수 있는 능력을 측정하는 문제이다. 문항 2는 부분적분법을 이해하고 이를 지수함수와 삼각함수의 곱으로 이루어진 함수의 적분에 적용하여 적분값을 구하고 급수의 합을 구하는 능력을 측정하는 문제이다. 문항 3은 수열의 합이 함수의 적분값에 의해 유계되는 부등식을 구하고, 이를 통해 극한값을 구할 수 있는 능력을 측정하는 문제로써 수열과 적분을 결합한 전형적인 문제이다.

이 문제들은 고등학교 수학교과에서 중요하게 다루어지는 수열과 급수, 미분, 적분단원의 문제이고, 이를 통해 학생들이 학교교육을 성실히 이수했는지를 평가하고자 출제하였다. 수열과 급수의 극한, 평균값 정리와 부분적분법을 이해하고 이를 이용하여 주어진 부등식이나 적분값을 구할 수 있는 수학적 사고력을 통한 문제 해결능력과 논리적 사고력을 측정할 수 있다.

2. 종합 평가 기준

문항	배점	세부 평가 기준	세부 배점
1	30	평균값 정리를 이해하고, 부등식 $(b-x)\cos b \le \sin b - \sin x \le (b-x)\cos a$을 구하였는가?	20
		적분을 통하여 부등식이 성립함을 보였는가?	10
2	30	부분적분을 이용하여 정적분 $\int_{(k-\frac{1}{2})\pi}^{(k+\frac{1}{2})\pi} e^{-x}\cos x\,dx$을 올바로 구했는가?	15
		일반항 a_n을 구하고 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 합을 구했는가?	15
3	40	부분합 $\sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{k(k+1)}$을 구했는가?	15
		적분을 이용하여 구한 부등식을 통해 극한값 $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{n+1}$을 구했는가?	15
		극한값 $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{k(k+1)}$을 구했는가?	10