한양대학교

답안지 (자연계)

답안지 바코드

지원학과	
성 명	
수험번호	
생년월일 (예:980301)	

수 험 생 유 의 사 항

1. 답안지는 검정색 펜(볼펜, 연필, 샤프)으로 작성하십시오. (빨강색이나 파랑색 사용금지)
2. 답안지를 수정할 경우 지우개(연필, 샤프 사용 시)를 사용하거나 두 줄을 긋고(볼펜 사용 시) 그 위에 재 작성하십시오.
3. 답안과 관련 없는 표현이나 표시를 한 답안지는 "0"점 처리 됩니다.
4. 본 고사는 답안지 1장 이내에 답안을 작성하여야 합니다. 답안지 교체는 가능하지만 기존 답안지 제출은 불가합니다.

문제 1번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

1-1

원 C와 위의 한점을 P라고 하고 원C의 중심을 점A라 하자

원 C의 반지름을 r이라고 하면 $\overline{OA}$는 원C에 수직이므로

$\overline{OA}^2 + r^2 = \overline{OP}^2$일 것이다. $(r>0)$

$\overline{OA}$는 (0,0,0)과 (3,4,12) 사이의 거리이므로

$\overline{OA} = \sqrt{(3-0)^2+(4-0)^2+(12-0)^2} = 13$

$\overline{OP}$는 구S의 반지름의 길이이므로 20이다

따라서 $13^2+r^2=20^2$ $r^2=231$

그러므로 원 C의 넓이는 231π이다.

$\overline{OA}$는 원 C에 수직이므로 원 C가 있는 평면의 법선벡터는

$\overrightarrow{OA}=(3,4,12)$이다

원C가 있는 평면과 평면 $4x+5y-20z=1$ 사이의 예각을 θ라하자

평면 $4x+5y-20z=1$의 법선벡터 $\vec{u}=(4,5,-20)$이므로

벡터의 내적을 이용하면 $\cos\theta = \frac{|4\times3+5\times4-20\times12|}{|\overrightarrow{OA}|\,|\vec{u}|}$

$$= \frac{208}{13\cdot21} = \frac{16}{21}$$

그러므로

원 C의 평면 $4x+5y-20z=1$ 위로의 정사영의 넓이는

(원 C의 넓이)$\cdot\cos\theta = 176\pi$ 이다

1-2

원 C를 포함하는 평면과 평면 α사이의 예각을 θ라고 하자.

$A_\alpha = A\cdot\cos\theta$ 이므로

$\frac{A_\alpha}{A} = \cos\theta$ 이다. 따라서 $\frac{A_\alpha}{A}$의 최댓값은 $\cos\theta$의 최댓값과 같다

평면 α는 x축을 포함하므로 $by+cz+d=0$ 으로 나타낼수있다

이때 평면 α의 법선벡터를 $\vec{u}$라하면 $\vec{u}=(0,b,c)$이다

법선벡터를 실수의 값으로 나누어도 이루는 각 θ는 같으므로

$|\vec{u}|=1$인 $\vec{u}$를 $(0,m,n)$이라 하자 $(m>0, n>0)$

이때 $m^2+n^2=1$이 된다.

원 C를 포함하는 평면의 법선벡터는 1-1에서 $\overrightarrow{OA}=(3,4,12)$이므로

벡터의 내적을 이용하면

$$\cos\theta = \frac{3\times0+4m+12n}{|\vec{u}|\cdot|\overrightarrow{OA}|} = \frac{4m+12n}{13}$$

따라서 $m^2+n^2=1$을 만족하는 m, n이

$4m+12n$이 최대가 될때 $\cos\theta$도 최대이므로

$m=\frac{1}{\sqrt{10}}$ $n=\frac{3}{\sqrt{10}}$ 일때 $\cos\theta$가 최대이다.

따라서 이때 $\cos\theta = \frac{4\sqrt{10}}{13}$

1-3.

반지름이 $\sqrt{10}$인 원의 넓이는 10π 이므로

이 원과 xy평면이 이루는 각을 θ_1이라 하면

$10\pi\cdot\cos\theta_1 = 6\pi$이므로 $\cos\theta_1=\frac{3}{5}$이다.

반지름이 $\sqrt{10}$인 원을 포함하는 평면의 법선벡터이면서

크기가 1인 벡터를 $\vec{u}=(a,b,c)$라 하자. (a,b,c는 실수)

$a^2+b^2+c^2=1$이다.

xy평면의 법선벡터는 $(0,0,1)$이므로 벡터의 내적을 이용하면

$\cos\theta_1 = \frac{c}{1\cdot|\vec{u}|} = c$ 이므로

$c=\frac{3}{5}$이다. 따라서 $a^2+b^2=\frac{16}{25}$이다

평면 $3x-y=1$의 법선벡터는 $\vec{\alpha}=(3,-1,0)$이다.

반지름이 $\sqrt{10}$인 원을 포함하는 평면과 평면 $3x-y=1$ 사이의 각을

θ_2라 하면

$\cos\theta_2 = \frac{3\times a-1\times b+0\times c}{|\vec{u}|\,|\vec{\alpha}|} = \frac{3a-b}{\sqrt{10}}$ 이다.

평면$3x-y=1$위로의 정사영의 넓이는 $10\pi\cdot\cos\theta_2$이므로

최대가 되려면 $\cos\theta_2$가 최대가 되어야 한다

$a^2+b^2=\frac{16}{25}$이고 $3a-b$가 최대가 되려면 $3a-b=k$라 하고

$a=X$ $b=Y$로 치환하여 X축, Y축, 원점을 가지는 좌표평면에

나타내면 반지름이 $\frac{4}{5}$인 원에 접하면서 $Y=3X-k$이므로

기울기가 3인 직선의 y절편의 최솟값이 $(-k)$이다

따라서 $k=\frac{4\sqrt{10}}{5}$이다.

따라서 $\cos\theta_2 = \frac{4}{5}$이므로 정사영의 넓이의 최댓값은

$10\pi\cdot\frac{4}{5} = 8\pi$

이 줄 위에 답안 작성 시 무효 처리됨

문제 2번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

[문제2]

(1) $A(x,\ (1-x^n)^{\frac{1}{n}})$이라 두면 (단, $0 \le x \le 1$)

$$\overline{OA}^2 = x^2 + (1-x^n)^{\frac{2}{n}}$$

$g(x) = x^2 + (1-x^n)^{\frac{2}{n}}$ 라 두면 (단, $0 \le x \le 1$)

$$g'(x) = 2x + \frac{2}{n}\cdot(1-x^n)^{\frac{2}{n}-1}\cdot(-n\cdot x^{n-1})$$

$$= 2\cdot x^{n-1}\left(x^{2-n} - (1-x^n)^{\frac{2-n}{n}}\right) \quad (\text{단, } 0<x<1)$$

$\therefore x = \sqrt[n]{\frac{1}{2}}$ 에서 유일한 극댓값을 가진다. ($\because n \ge 3$)

$\therefore x = \sqrt[n]{\frac{1}{2}}$ 에서 $g(x)$가 최댓값을 가진다.

$\therefore$ A의 좌표 $= \left(\sqrt[n]{\frac{1}{2}},\ f\left(\sqrt[n]{\frac{1}{2}}\right)\right) = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}},\ \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}\right)$

($\because \overline{OA} = \sqrt{g(x)}$)

(2) $(x_0,\ f(x_0))$에서의 접선의 방정식은

$$y = -(1-x_0^n)^{\frac{1}{n}-1}\cdot x_0^{n-1}(x-x_0) + (1-x_0^n)^{\frac{1}{n}}$$

$\therefore P = \left(\frac{1}{x_0^{n-1}},\ 0\right)$

$Q = \left(0,\ (1-x_0^n)^{\frac{1}{n}-1}\right)$

$$\overline{PQ}^2 = \left(\frac{1}{x_0^{n-1}}\right)^2 + \left\{(1-x_0^n)^{\frac{1}{n}-1}\right\}^2$$

$$= x_0^{2-2n} + (1-x_0^n)^{\frac{2}{n}-2}$$

$g(x_0) = x_0^{2-2n} + (1-x_0^n)^{\frac{2-2n}{n}}$ 라 두면 (단 $0<x_0<1$)

$$g'(x_0) = (2-2n)x_0^{1-2n} + (2-2n)(1-x_0^n)^{\frac{2}{n}-3}\cdot(-x_0^{n-1})$$

$$= (2-2n)\cdot x_0^{n-1}\left(x_0^{2-3n} - (1-x_0^n)^{\frac{2}{n}-3}\right) \quad (\text{단, } 0<x_0<1)$$

$\therefore g'(x_0)$는 $x_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$에서 에서 유일한 극솟값을 가진다

($\because n \ge 3$)

$\therefore g(x_0)$는 $x_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$ 에서 최솟값을 가진다.

$\therefore g\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}\right) = \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}\right\}^{2-2n} + \left(1-\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{n}-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{n}-3}$

$\therefore \overline{PQ}$의 최솟값 $= \sqrt{g\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}\right)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}-\frac{3}{2}}$

(3)

$$a_n = \int_0^1 (1-x^n)^{\frac{1}{n}}\,dx$$

$0 \le x < 1$ 에서

$$(1-x) \le 1-x^n \le 1$$

$\therefore (1-x)^{\frac{1}{n}} \le (1-x^n)^{\frac{1}{n}} \le 1^{\frac{1}{n}}$ ($\because 0 \le x < 1$)

부등식에 n을 무한대로의 극한을 취하면

$$\lim_{n\to\infty}(1-x)^{\frac{1}{n}} \le (1-x^n)^{\frac{1}{n}} \le 1^{\frac{1}{n}}$$

$$\lim_{n\to\infty}(1-x)^{\frac{1}{n}} = 1 \quad (\text{단, } x \ne 1)$$

$$\lim_{n\to\infty} 1^{\frac{1}{n}} = 1$$

($\because \lim_{n\to\infty} C^{\frac{1}{n}} = 1$ (단, C는 양수))

$\therefore \lim_{n\to\infty}(1-x^n)^{\frac{1}{n}} = 1$ (단, $x \ne 1$)

$$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 (1-x^n)^{\frac{1}{n}}\,dx$$

$$= \int_0^1 \lim_{n\to\infty}(1-x^n)^{\frac{1}{n}}\,dx$$

$$= \int_0^1 1\,dx = 1$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n = 1$$

이 줄 아래 답안 작성 시 무효 처리됨

답안지 (자연계)

답안지 바코드

지원학과	
성 명	
수험번호	
생년월일 (예:980301)	

수 험 생 유 의 사 항

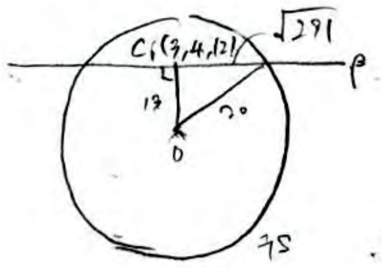
1. 답안지는 검정색 펜(볼펜, 연필, 샤프)으로 작성하십시오. (빨강색이나 파랑색 사용금지)
2. 답안지를 수정할 경우 지우개(연필, 샤프 사용 시)를 사용하거나 두 줄을 긋고(볼펜 사용 시) 그 위에 재 작성하십시오.
3. 답안과 관련 없는 표현이나 표시를 한 답안지는 "0"점 처리 됩니다.
4. 본 고사는 답안지 1장 이내에 답안을 작성하여야 합니다. 답안지 교체는 가능하지만 기존 답안지 제출은 불가합니다.

문제 1번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

1. 원 C를 포함하는 평면 β의 법선벡터 $\vec{n_1} = (3,4,12)$.

평면 $4x+5y-20z=1$의 법선벡터 $\vec{n_2} = (4,5,-20)$ 이다.

<그림1>을 참고하면,



<그림1>

$\overline{OC_1} = 13$

∴ C의 넓이 $S = 231\pi$.

이제 $\vec{n_1}$과 $\vec{n_2}$의 $\cos\theta$ 값을 구하면,

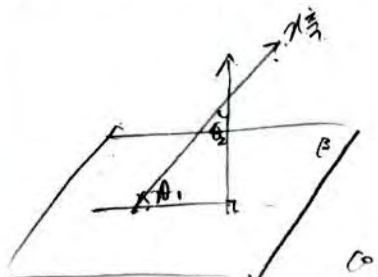
$$\cos\theta = \frac{|12+20-240|}{13\times 21} = \frac{208}{273}$$

∴ 원 C의 평면 $4x+5y-20z=1$ 위로의 정사영의 넓이 $S' = S\times\cos\theta$

$$S' = 231\pi \times \frac{208}{273} = \frac{46338}{273}\pi.$$

2. $\frac{A_\alpha}{A}$의 값은 문제의 두 평면 사이의 $\cos\theta$ 값이다.

$\cos\theta$의 값은 θ가 커질수록 작아지기 때문에 θ는 x축과 원 C를 포함하는 평면이 이루는 각 θ_1일 때 최소이고, 이때, $\cos\theta$는 최대이다.



<그림2>

x축 직선의 벡터 $\vec{d} = (1,0,0)$

$\vec{n_1} = (3,4,12)$

$\cos\theta_2 = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta_1\right) = \sin\theta_1$

$\cos\theta_2 = \frac{3}{1\times 13} = \frac{3}{13}$ ∴ $\sin\theta_1 = \frac{3}{13}$

$\cos\theta_1 = \frac{4\sqrt{10}}{13}$

∴ $\frac{A_\alpha}{A} = \frac{4\sqrt{10}}{13}$

3. 반지름 $\sqrt{10}$인 원 D의 넓이 $S = 10\pi$

원 D의 xy평면 위로의 정사영 넓이 $S' = 6\pi$.

두 원을 각각 포함하는 두 평면의 $\cos\theta = \frac{3}{5}$.

xy평면의 법선벡터 $\vec{n_1} = (0,0,1)$

D를 포함하는 평면의 법선벡터 $\vec{n_2} = (k,l,m)$

$3x-y=1$의 법선벡터 $\vec{n_3} = (3,-1,0)$

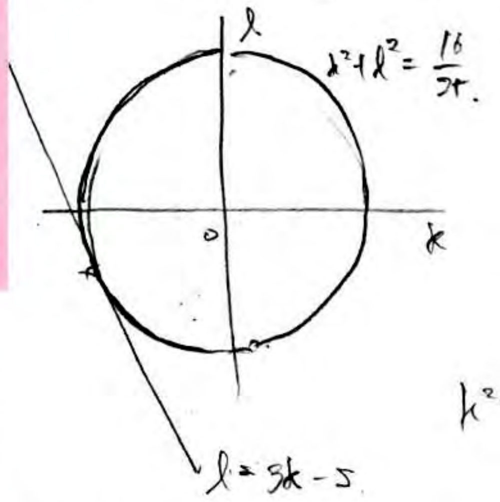
여기서 $\vec{n_2}$는 $k^2+l^2+m^2=1$인 단위벡터이다.

$\cos\theta = \frac{m}{1\times 1} = \frac{3}{5}$ ∴ $m = \frac{3}{5}$, $k^2+l^2 = \frac{16}{25}$.

원 D의 평면 $3x-y=1$ 위로의 정사영 넓이를 S''이라 하면.

$S'' = 10\pi \times \frac{3k-l}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}\pi(3k-l)\pi$.

따라서 $3k-l$의 최댓값을 구하면 된다.



$3k-l=s$ 라 하면

$l = 3k-s$ 는 kl평면 위의 직선의 방정식이고,

$k^2+l^2 = \frac{16}{25}$은 kl평면 위의 원의 방정식이다.

s의 최댓값은 두 도형의 접선이다.

$25k^2+25(9k^2+6ks+s^2)-16=0$

$250k^2+150ks+25s^2-16=0$

$D/4=0$ 이므로 $5625s^2-6250s^2+4000=0$.

$s = \frac{4\sqrt{10}}{5}$.

∴ $S'' = \sqrt{10}\pi \times \frac{4\sqrt{10}}{5} = 8\pi$.

문제 2번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

1. $(t, f(t))$와 원점사이의 거리를 l이라 할 때, $l^2 = g(t)$라 하자

$g(t) = t^2 + \{f(t)\}^2$

$g'(t) = 2t + 2f(t)f'(t)$

$= 2t\left(1 - \left(\frac{t^n}{1-t^n}\right)^{1-\frac{2}{n}}\right)$

$g'(t) = 0$ 인 t는 $t = 0$, $t = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ 이다.

증감표를 그려보면

t	0	$\cdots$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$	$\cdots$	1
$g'(t)$	0	$+$	0	$-$	$-$
$g(t)$	1	$\nearrow$		$\searrow$	1

$g(t)$는 $t = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$에서 최댓값을 가진다. 따라서 l도 $t = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$에서 최댓값을 가진다.

$f\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$

$\therefore$ A의 좌표는 $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}, \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}\right)$

2. $(x_0, f(x_0))$에서의 접선은 $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

P의 좌표는 $\left(x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}, 0\right)$ Q의 좌표는 $(0, f(x_0) - x_0 f'(x_0))$

$f'(x) = -x^{n-1}(1-x^n)^{\frac{1}{n}-1}$ 이므로 P.Q의 좌표는

$P(x_0^{1-n}, 0)$ $Q\left(0, (1-x_0^n)^{\frac{1}{n}-1}\right)$

$\overline{PQ}$의 길이를 l'이라 할 때, $l'^2 = h(x_0)$라 하자

$h(x_0) = x_0^{2-2n} + (1-x_0^n)^{\frac{2}{n}-2}$

$h'(x_0) = (2-2n)x_0^{1-2n} + \left(\frac{2}{n}-2\right)(1-x_0^n)^{\frac{2}{n}-3} \times (-n x_0^{n-1})$

$= (2n-2)x_0^{n-1}\left\{(1-x_0^n)^{\frac{2}{n}-3} - (x_0^n)^{\frac{2}{n}-3}\right\}$

이 때 $x_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$ 일 때 $h'(x_0) = 0$ 이다. ($0 < x_0 < 1$ 에서)

이를 바탕으로 증감표를 그려보면

x_0	(0)	$\cdots$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$	$\cdots$	(1)
$h'(x_0)$		$-$	0	$+$	
$h(x_0)$	(∞)		$2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{n}-2}$		(∞)

와 같다.

$\therefore h(x_0)$는 $x_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$에서 최솟값을 갖는다.

$\therefore l' \geq \sqrt{2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{n}-2}}$

$= \sqrt{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}-1}$

l'의 최솟값은 $\sqrt{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}-1}$이다.

3. $0 < x < 1$ 에서 $0 < 1 - x^n < 1$

$\therefore 1 - x^n < (1-x^n)^{\frac{1}{n}}$ ($0 < x < 1$ 일 때)

$(1-x^n)^{\frac{1}{n}} < 1$ ($0 < x < 1$ 일 때)

$\therefore 0 \leq x \leq 1$ 에서

$1 - x^n \leq (1-x^n)^{\frac{1}{n}} \leq 1$

$\therefore \int_0^1 (1-x^n)\,dx \leq \int_0^1 (1-x^n)^{\frac{1}{n}}\,dx \leq \int_0^1 1\,dx$

$\int_0^1 (1-x^n)\,dx = 1 - \frac{1}{n+1}$

$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 (1-x^n)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 1\,dx$

$= 1$

$\therefore$ 제시문 <다>에 의해 $\int_0^1 (1-x^n)^{\frac{1}{n}}\,dx = 1$ 이다.

한양대학교

답안지 (자연계)

답안지 바코드

지원학과	
성 명	
수험번호	
생년월일 (예:980301)	

수험생 유의사항

1. 답안지는 검정색 펜(볼펜, 연필, 샤프)으로 작성하십시오. (빨강색이나 파랑색 사용금지)
2. 답안지를 수정할 경우 지우개(연필, 샤프 사용 시)를 사용하거나 두 줄을 긋고(볼펜 사용 시) 그 위에 재 작성하십시오.
3. 답안과 관련 없는 표현이나 표시를 한 답안지는 "0"점 처리 됩니다.
4. 본 고사는 답안지 1장 이내에 답안을 작성하여야 합니다. 답안지 교체는 가능하지만 기존 답안지 제출은 불가합니다.

문제 1번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

1. 원 C의 중심의 좌표를 H라 하자.

$\overline{OH} = \sqrt{3^2+4^2+12^2} = 13$ 이므로

원 C의 반지름은 $\sqrt{20^2-13^2}$ 이다.

원 C를 포함하는 평면의 법선 벡터는 $\overrightarrow{OH}=(3,4,12)$ 이고

평면 $4x+5y-20z=1$의 법선 벡터는 $\vec{u}=(4,5,-20)$ 이므로

두 평면이 이루는 각을 θ라 하면

$\cos\theta = \dfrac{\overrightarrow{OH}\cdot\vec{u}}{|\overrightarrow{OH}|\times|\vec{u}|} = \dfrac{-208}{13\times 21} = -\dfrac{16}{21}$ 이다.

따라서 정사영의 넓이는 $\cos(\pi-\theta)\times(20^2-13^2)\pi$ 에서

정사영의 넓이는 176π 임을 알 수 있다.

2. x축을 포함하는 평면α의 법선벡터는 $\vec{u'}=(0,1,a)$ 라 둘 수 있고

평면α와 원 C를 포함하는 평면이 이루는 각을 θ′라 하면

$A_\alpha = A\cos\theta'$ $(0\le\theta'\le\frac{\pi}{2})$ 이라 할 수 있다.

따라서 $\frac{A_\alpha}{A}$의 최댓값은 $\cos\theta'$의 최댓값과 같다.

$\cos\theta' = \dfrac{\overrightarrow{OH}\cdot\vec{u'}}{|\overrightarrow{OH}|\times|\vec{u'}|} = \dfrac{4+12a}{13\cdot\sqrt{1+a^2}}$ 이다.

$\frac{d}{da}\cos\theta' = \dfrac{12\sqrt{1+a^2}-(4+12a)\cdot(1+a^2)^{-\frac{1}{2}}a}{169(1+a^2)}$ 이고 $1+a^2>0$ 이므로

$12\sqrt{1+a^2}-(4+12a)a\cdot(1+a^2)^{-\frac{1}{2}}=0$ 인 a를 구하면,

$12(1+a^2)=12a^2+4a$

$a=3$ 일때 $\frac{d}{da}\cos\theta'=0$을 만족시키고

a	0	…	3	…	4
$\cos\theta'$	$\frac{4}{13}$	↗	$\frac{4\sqrt{10}}{13}$	↘	$\frac{4\sqrt{17}}{17}$

이므로

증감에 따라 $a=3$ 일때 $\cos\theta'$는 극대를 가지며 최댓값이 되므로 $\frac{A_\alpha}{A}$의 최댓값은 $\frac{4}{13}\sqrt{10}$ 이다.

3. 원 C의 반지름이 $\sqrt{10}$ 이라면 원의 중심을 H′이라 하면

$\overline{OH'} = \sqrt{390}$ 이다.

xy 평면으로 정사영의 넓이가 6π 이므로

xy평면과 원 C를 포함하는 평면이 이루는 각을 θ″라 하고

xy 평면의 법선벡터를 $\vec{u''}=(0,0,1)$ 이라 하면

$\cos\theta'' = \dfrac{\overrightarrow{OH'}\cdot\vec{u''}}{|\overrightarrow{OH'}|\times|\vec{u''}|} = \frac{3}{5}$ 이다.

점 H′의 좌표를 (x_1, y_1, z_1) 이라 하면

$x_1^2+y_1^2+z_1^2=390$ … ①

$\dfrac{z_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot 1} = \frac{3}{5}$ … ②

①, ② 식이 성립하고 두식을 연립하면

$z_1 = \frac{3}{5}\sqrt{390}$ 임을 알 수 있다.

이때 $x_1^2+y_1^2 = \frac{16}{25}\times 390$ 이다.

평면 $3x-y=1$ 의 법선벡터는 $\vec{p}=(3,-1,0)$ 라 하고

평면 $3x-y=1$과 원 C를 포함하는 평면이 이루는 각을 k라 하면,

$\cos k = \dfrac{\overrightarrow{OH'}\cdot\vec{p}}{|\overrightarrow{OH'}||\vec{p}|} = \dfrac{3x_1-y_1}{\sqrt{390}\cdot\sqrt{10}} = \dfrac{3x_1-y_1}{10\sqrt{39}}$

$10\pi\cos k$ 가 정사영의 넓이이고 이값의 최댓값은

$\cos k$ 가 최대일 때 이고 $3x_1-y_1$이 최대일때 가진다.

따라서 $x_1^2+y_1^2 = \frac{16}{25}\times 390$ 에서 $3x_1-y_1=t$라 하면.

$\begin{cases} x_1 = \frac{4}{5}\sqrt{390}\sin\alpha \\ y_1 = \frac{4}{5}\sqrt{390}\cos\alpha \end{cases}$ 라고, 매개변수로 표현하면

$\frac{4}{5}\sqrt{390}\cdot(3\sin\alpha-\cos\alpha)=t$.

$\frac{4}{5}\sqrt{390}\cdot\sqrt{10}\sin(\alpha-r)=t$ $(0<r<\pi)$

$\sin(\alpha-r)=1$ 일때 t값은 최대가 되고 그값은, $8\sqrt{39}$ 이므로

$10\pi\cos k = 8\pi$ 이다.

이 줄 아래 답안 작성 시 무효 처리됨

이 줄 위에 답안 작성 시 무효 처리됨

문제 2번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

1. $y=f(x)$ 위의 임의의 점의 좌표를 $(a, (1-a^n)^{\frac{1}{n}})$ 이라고 하면
$(a, (1-a^n)^{\frac{1}{n}})$ 과 원점사이의 거리의 제곱을 $l(a)$ 라고 할때
$l(a)$ 가 최대이면 $(a, (1-a^n)^{\frac{1}{n}})$ 과 원점사이의 거리 또한 최대가 된다
$\therefore l(a) = a^2 + (1-a^n)^{\frac{2}{n}}$ 이고 $l'(a) = 2a - 2a^{n-1}(1-a^n)^{\frac{2}{n}-1}$ 이다
이때 $a = (\frac{1}{2})^{\frac{1}{n}}$ 일때 $l'(a)=0$ 이다. 이때의 증감표를 그려보면

a	$\cdots$	$(\frac{1}{2})^{\frac{1}{n}}$	$\cdots$
$l'(a)$	$+$	0	$-$
$l(a)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$

$a = (\frac{1}{2})^{\frac{1}{n}}$ 에서 $l(a)$ 는 유일한 극대이므로 최대가 된다.
$\therefore$ 점 A의 좌표는 $((\frac{1}{2})^{\frac{1}{n}}, (\frac{1}{2})^{\frac{1}{n}})$ 이다.

2.
한점 $(x_0, f(x_0))$ 에서의 접선을 구하기 위해 $f(x)$ 를 미분하여 보면
$f'(x) = -x^{n-1}(1-x^n)^{\frac{1-n}{n}}$ 이다. 따라서 접선의 방정식을 구하면
$y = -x_0^{n-1}(1-x_0^n)^{\frac{1-n}{n}}(x-x_0) + (1-x_0^n)^{\frac{1}{n}}$ 이다.
이때 점 P는 $(x_0^{1-n}, 0)$ 이고 점 Q는 $(0, (1-x_0^n)^{\frac{1-n}{n}})$ 이다
$\therefore \overline{PQ}^2 = x_0^{2-2n} + (1-x_0^n)^{\frac{2-2n}{n}}$ 이다.
$\overline{PQ}^2 = g(x_0)$ 라고 할때 $g'(x_0) = (2-2n)x_0^{1-2n} - (2-2n)x_0^{n-1}(1-x_0^n)^{\frac{2}{n}-3}$
이다. 이때 $x_0^n = \frac{1}{2}$ 즉 $x_0 = (\frac{1}{2})^{\frac{1}{n}}$ 일때 $g'(x_0)=0$ 이다.
이때의 증감표를 그려보면

x_0	$\cdots$	$(\frac{1}{2})^{\frac{1}{n}}$	$\cdots$
$g'(x_0)$	$-$	0	$+$
$g(x_0)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$

$g(x_0)$ 는 $x_0 = (\frac{1}{2})^{\frac{1}{n}}$ 일때 유일한 극소이므로 최소이다.
$\therefore g((\frac{1}{2})^{\frac{1}{n}}) = 2^{3-\frac{2}{n}}$ 이고 $\overline{PQ} = \sqrt{g(x_0)}$ 이므로
$\overline{PQ}$ 의 최솟값은 $2^{\frac{3}{2}-\frac{1}{n}}$ 이 된다.

$\therefore \overline{PQ}$ 의 최솟값은 $2^{\frac{3}{2}-\frac{1}{n}}$ 이다.

3. $1-x \le 1-x^n \le 1$ 이므로 $(1-x)^{\frac{1}{n}} \le (1-x^n)^{\frac{1}{n}} \le 1$,
$\int_0^1 (1-x)^{\frac{1}{n}} dx \le \int_0^1 (1-x^n)^{\frac{1}{n}} dx \le \int_0^1 1 dx$ 이다.
이때 $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 (1-x)^{\frac{1}{n}} dx = \lim_{n\to\infty} \left[-\frac{n}{n+1}(1-x)^{\frac{n+1}{n}}\right]_0^1 = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$ 이다.
또한 $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 1 dx = 1$ 이다.
<제시문 다> 에 따라 $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 (1-x)^{\frac{1}{n}} dx = \int_0^1 1 dx = 1$ 이고
$\int_0^1 (1-x)^{\frac{1}{n}} dx \le \int_0^1 (1-x^n)^{\frac{1}{n}} dx \le \int_0^1 1 dx$ 이므로
$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 (1-x^n)^{\frac{1}{n}} dx = \lim_{n\to\infty} d_n = 1$ 이다.
$\therefore \lim_{n\to\infty} d_n = 1$ 이다.

이 줄 아래 답안 작성 시 무효 처리됨