한양대학교

답안지 (자연계)

답안지 바코드
300504

지원학과	
성 명	
수험번호	
생년월일 (예:980301)	

수험생 유의사항

1. 답안지는 검정색 펜(볼펜, 연필, 샤프)으로 작성하십시오. (빨강색이나 파랑색 사용금지)
2. 답안지를 수정할 경우 지우개(연필, 샤프 사용 시)를 사용하거나 두 줄을 긋고(볼펜 사용 시) 그 위에 재 작성하십시오.
3. 답안과 관련 없는 표현이나 표시를 한 답안지는 "0"점 처리 됩니다.
4. 본 고사는 답안지 1장 이내에 답안을 작성하여야 합니다. 답안지 교체는 가능하지만 기존 답안지 제출은 불가합니다.

문제 1번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

[문제 1-1]

$f(0)=0$ 이고 $\frac{\ln(t+1)+a}{t+1}$가 연속함수이므로 $f(x)$는 $x>-1$ 에서 미분가능 함으로 $f'(x)=\frac{\ln(x+1)+a}{x+1}$ 이다.

$f'(x)=0$ 일 때 $x=e^{-a}-1$ 이고 이 점에서 극소이자 최솟값을 갖는다 $x=e^{-a}-1$을 $f(x)$에 대입하면 $f(e^{-a}-1)=\int_0^{e^{-a}-1}\frac{\ln(t+1)+a}{t+1}dt$ 이다. 이때 $\ln(t+1)+a=g(t)$라 하면

$f(e^{-a}-1)=\int_0^{e^{-a}-1}g(t)g'(t)dt=\left[\frac{1}{2}(g(t))^2\right]_0^{e^{-a}-1}$ 로 나타낼 수 있다

($\because$ $g'(t)=\frac{1}{t+1}$)

$f(e^{-a}-1)$이 최소값인 $-\frac{1}{2}$이므로 $\frac{1}{2}(g(e^{-a}-1))^2-\frac{1}{2}(g(0))^2=-\frac{1}{2}a^2=-\frac{1}{2}$ 이다. a는 양의 실수이므로 $a=1$ 이다

$\int_0^{e^2-1}\frac{\{\ln(x+1)+1\}\{f(x)\}^3}{x+1}dx$ 에서 $\frac{\ln(x+1)+1}{x+1}=f'(x)$이므로

이 식은 $\int_0^{e^2-1}f'(x)(f(x))^3dx$로 고쳐진다. 이때 $f(x)=t$ 라 치환하면

이 식은 $\int_{f(0)}^{f(e^2-1)}t^3dt=\int_0^4 t^3dt$ 로 나타낼 수 있다.

($\because$ $f(e^2-1)=4$ 이고 $f(0)=0$)

따라서 $\int_0^{e^2-1}\frac{\{\ln(x+1)+1\}\{f(x)\}^3}{x+1}=\int_0^4 t^3dt=\left[\frac{1}{4}t^4\right]_0^4=64$ 이다.

[문제 1-2]

[문제 1-1]에서 $a=1$ 이었음으로 $f(x)=\int_0^x\frac{\ln(t+1)+1}{t+1}dt=\left[\frac{1}{2}(\ln(t+1)+1)^2\right]_0^x$

$=\frac{1}{2}(\ln(x+1)+1)^2-\frac{1}{2}$ 이다

$x=0$, $x=e^{-3}-1$, $y=0$과 곡선 $y=f(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이는

$\int_{e^{-3}-1}^0|f(x)|dx$로 나타낼 수 있다

$f(e^{-3}-1)=\frac{3}{2}$ 이고 $f(e^{-2}-1)=0$ 이므로 $(e^{-3}-1, e^{-2}-1)$에서 $f(x)>0$이고 $(e^{-2}-1, 0)$에서 $f(x)<0$ 이다

따라서 $\int_{e^{-3}-1}^0|f(x)|dx=\int_{e^{-3}-1}^{e^{-2}-1}f(x)dx+\int_{e^{-2}-1}^0-f(x)dx$ 이다.

$\int_{e^{-3}-1}^{e^{-2}-1}\frac{1}{2}(\ln(x+1))^2+\ln(x+1)dx-\int_{e^{-2}-1}^0\frac{1}{2}(\ln(x+1)^2)+\ln(x+1)dx$ 에서

$\ln(x+1)=t$로 치환하면

$\int_{-3}^{-2}(\frac{1}{2}t^2+t)e^tdt-\int_{-2}^0(\frac{1}{2}t^2+t)e^tdt$ —㊉ 이다

($\because$ $dx=e^tdt$, $\ln(e^{-3}-1+1)=-3$, $\ln(e^{-2}-1+1)=-2$, $\ln(0+1)=0$)

$\int(\frac{1}{2}t^2+t)e^tdt$을 계산하기 위해 $\frac{1}{2}t^2+t=p(t)$, $e^t=g'(t)$라 하고 부분적분법을 사용하면 $\int(\frac{1}{2}t^2+t)e^tdt=p(t)g(t)-\int p'(t)g(t)dt$

$=(\frac{1}{2}t^2+t)e^t-\underbrace{\int(t+1)e^tdt}_{②}$ —① 이다

②의 식도 부분적분법을 이용해 계산하면 $(t+1)e^t-e^t=te^t$이다

따라서 $\int(\frac{1}{2}t^2+t)e^tdt=(\frac{1}{2}t^2+t)e^t-te^t=\frac{1}{2}t^2e^t$이다

이것을 이용해 ㊉의 식에 넣어주면

$\left[\frac{1}{2}t^2e^t\right]_{-3}^{-2}-\left[\frac{1}{2}t^2e^t\right]_{-2}^0=4e^{-2}-\frac{9}{2}e^{-3}$ 이다

[문제 1-3]

$x>$에서 부등식 $2f(\frac{2}{x})>f(\frac{1}{x})+f(\frac{3}{x})$이 성립한다면

$f(\frac{2}{x})-f(\frac{1}{x})>f(\frac{3}{x})-f(\frac{2}{x})$ 이므로

$\frac{f(\frac{2}{x})-f(\frac{1}{x})}{\frac{2}{x}-\frac{1}{x}}>\frac{f(\frac{3}{x})-f(\frac{2}{x})}{\frac{3}{x}-\frac{2}{x}}$ —① 이 성립한다

$f(x)$는 $x>0$에서 연속함수이자 미분가능함수이므로

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$ ($a, b>0$ 인 실수, c는 (a, b) 사이의 임의의 실수)로 해석할수 있다. 따라서 ①의 식을 $f'(p)>f'(q)$라 나타낼 수 있고

(p는 $(\frac{1}{x}, \frac{2}{x})$ 사이의 임의의 실수, q는 $(\frac{2}{x}, \frac{3}{x})$ 사이의 임의의 실수)

$x>0$에서 $f'(x)$가 감소함으로 $f''(x)\le 0$ 이여야 ①이 성립한다

$f'(x)=\frac{\ln(x+1)+1}{x+1}$을 미분하면 $f''(x)=-\frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$ 이다

$x>0$ 에서 $\ln(x+1)>0$ 이므로 $f''(x)<0$ 이고 부등식 $2f(\frac{2}{x})>f(\frac{1}{x})+f(\frac{3}{x})$이 성립한다

이 줄 아래 답안 작성 시 무효 처리됨

한양대학교

답안지 (자연계)

답안지 바코드
300665

지원학과	
성 명	
수험번호	
생년월일 (예:980301)	

수 험 생 유 의 사 항

1. 답안지는 검정색 펜(볼펜, 연필, 샤프)으로 작성하십시오. (빨강색이나 파랑색 사용금지)
2. 답안지를 수정할 경우 지우개(연필, 샤프 사용 시)를 사용하거나 두 줄을 긋고(볼펜 사용 시) 그 위에 재 작성하십시오.
3. 답안과 관련 없는 표현이나 표시를 한 답안지는 "0"점 처리 됩니다.
4. 본 고사는 답안지 1장 이내에 답안을 작성하여야 합니다. 답안지 교체는 가능하지만 기존 답안지 제출은 불가합니다.

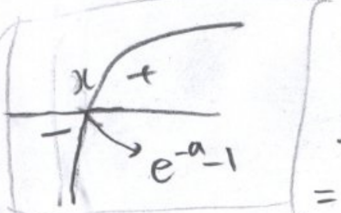
문제 1번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

1.

$f(x)=\int_0^x \frac{\ln(t+1)+a}{t+1}dt$

$f'(x)=\frac{\ln(x+1)+a}{x+1}$, $(-1,\infty)$에서 $x+1>0$ 이므로

$\ln(x+1)+a=0$ 을 만족하는 x에서 $f(x)$는 극솟값(최솟값)을 얻는다.



$\ln(x+1)=-a$, $x=e^{-a}-1$

$\int_0^x \frac{\ln(t+1)}{t+1}dt \int_0^x \frac{a}{t+1}dt$

$=\left[\ln(t+1)\cdot(\ln(t+1)+a)\right]_0^x-\int_0^x \frac{\ln(t+1)}{t+1}dt$

$\Rightarrow 2\cdot\int_0^x \frac{\ln(t+1)}{t+1}dt+a\ln(x+1)=\{\ln(x+1)\}^2+a\cdot\ln(x+1)$

$\Rightarrow \int_0^x \frac{\ln(t+1)}{t+1}dt=\frac{\{\ln(x+1)\}^2}{2}$

따라서 $f(x)=\int_0^x \frac{\ln(t+1)}{t+1}dt+\int_0^x \frac{a}{t+1}dt$

$=\frac{\{\ln(x+1)\}^2}{2}+a\ln(x+1)$

$f(e^{-a}-1)=\frac{a^2}{2}-a^2=-\frac{1}{2}$, $a^2=1$, $a=\pm1$ 인데

a는 양의 실수므로 $a=1$ 이다.

$\int_0^{e^2-1}\frac{\{\ln(x+1)+1\}\times\left[\frac{\{\ln(x+1)\}^2}{2}+\ln(x+1)\right]^3}{x+1}dx$ 에서

$\ln(x+1)\to t$ 로 치환하면 $\frac{1}{x+1}dx\to dt$ 이므로

$e^2-1 \quad 2$

$0 \quad 0$

$\int_0^2 (t+1)\times\left(\frac{t^2}{2}+t\right)^3 dt$ 이다. 여기서 한번 더

$\frac{t^2}{2}+t\to T$로 치환하면 $(t+1)dt\to dT$ 이므로

$0 \quad 0$

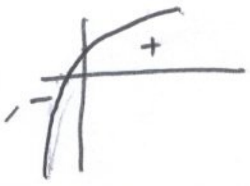
$2 \quad 4$

$\int_0^4 T^3 dT=\left[\frac{T^4}{4}\right]_0^4=4^3=64$ 이다.

$\therefore a=1$, $\int_0^{e^2-1}\frac{(\ln(x+1)+1)\{f(x)\}^3}{x+1}dx=64$

2.

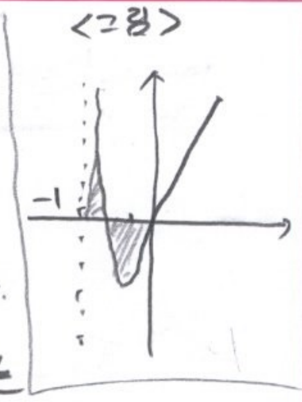
$f'(x)=\frac{\ln(x+1)+1}{x+1}$



에서

$x=e^{-1}-1$ 에서 극솟값을 가지므로

$f(x)$의 그래프는 <그림>과 같다.



$f(x)=\frac{\{\ln(x+1)\}^2}{2}+\ln(x+1)$ 이므로 구하려는 넓이는

$\int_{e^{-3}-1}^0 \left|\frac{\{\ln(x+1)\}^2}{2}+\ln(x+1)\right|dx$

$=\int_{e^{-3}-1}^{e^{-2}-1}\frac{\{\ln(x+1)\}^2}{2}+\ln(x+1)\,dx-\int_{e^{-2}-1}^0\frac{\{\ln(x+1)\}^2}{2}+\ln(x+1)dx$

($\ln(x+1)\to t$ 라 할때 $\frac{t^2}{2}+t=0$, $t=-2$, $x=e^{-2}-1$ 일때 $f(x)=0$)

여기서 $\ln(x+1)\to t$로 치환하면 $\frac{1}{x+1}dx\to dt$

$e^{-3}-1 \quad -3$

$e^{-2}-1 \quad -2$

$\Rightarrow dx\to e^t\cdot dt$ 이므로 ($x+1=e^t$)

위의 식은 $\int_{-3}^{-2}e^t\cdot\left(\frac{t^2}{2}+t\right)dt-\int_{-2}^0 e^t\cdot\left(\frac{t^2}{2}+t\right)dt$

$\int e^t\cdot\left(\frac{t^2}{2}+t\right)dt=\left[e^t\cdot\left(\frac{t^2}{2}+t\right)\right]-\int e^t\cdot(t+1)$

$=\frac{t^2}{2}\cdot e^t$

구하려는 값은 $\left[\frac{t^2}{2}\cdot e^t\right]_{-3}^{-2}-\left[\frac{t^2}{2}\cdot e^t\right]_{-2}^0=4e^{-2}-\frac{9}{2}e^{-3}$

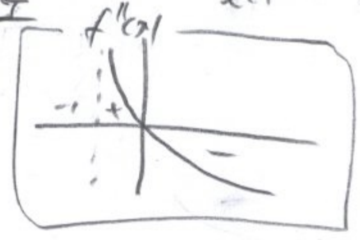
3.

$\frac{f\left(\frac{2}{x}\right)-f\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$ 와 $\frac{f\left(\frac{3}{x}\right)-f\left(\frac{2}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$ 가 있을 때,

$f(x)$는 미분가능 함수므로 평균값 정리를 쓸수있고 이를쓰면

각각 $f'(c)$와 $f'(d)$가 된다. $\left(\frac{1}{x}<c<\frac{2}{x}<d<\frac{3}{x}\right)$

$f'(x)=\frac{\ln(x+1)+1}{x+1}$, $f''(x)=\frac{\frac{1}{x+1}\cdot(x+1)-(\ln(x+1)+1)}{(x+1)^2}$



$=\frac{-\ln(x+1)}{(x+1)^2}$

$f''(x)$는 $x>0$에서 $f''(x)<0$ 이므로

$f'(x)$는 $x>0$에서 감소한다.

$x>0$ 일때 $\frac{1}{x}>0$ 이므로 $(0<c<d)$ 일때

$f'(c)>f'(d)$가 성립한다.

따라서 $\frac{f\left(\frac{2}{x}\right)-f\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}>\frac{f\left(\frac{3}{x}\right)-f\left(\frac{2}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$ 이고 양변에 $\frac{1}{x}$를 곱하고

정리하면 $2f\left(\frac{2}{x}\right)>f\left(\frac{1}{x}\right)+f\left(\frac{3}{x}\right)$ 이 성립한다.

이 줄 아래 답안 작성 시 무효 처리됨

한양대학교

답안지 (자연계)

답안지 바코드

300726

지원학과	
성 명	
수험번호	
생년월일 (예:980301)	

수 험 생 유 의 사 항

1. 답안지는 검정색 펜(볼펜, 연필, 샤프)으로 작성하십시오. (빨강색이나 파랑색 사용금지)
2. 답안지를 수정할 경우 지우개(연필, 샤프 사용 시)를 사용하거나 두 줄을 긋고(볼펜 사용 시) 그 위에 재 작성하십시오.
3. 답안과 관련 없는 표현이나 표시를 한 답안지는 "0"점 처리 됩니다.
4. 본 고사는 답안지 1장 이내에 답안을 작성하여야 합니다. 답안지 교체는 가능하지만 기존 답안지 제출은 불가합니다.

문제 1번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

1. $f'(x) = \frac{\ln(x+1)+a}{x+1}$ 따라서 $x = e^{-a}-1$ 일때 최솟값 $-\frac{1}{2}$을 얻는다

$f(x) = \int_0^x \frac{\ln(t+1)+a}{t+1}dt = \int_1^{x+1} \frac{\ln t + a}{t} = \left[\frac{1}{2}(\ln t)^2 + a\ln t\right]_1^{x+1}$

$= \frac{1}{2}(\ln(x+1))^2 + a\ln(x+1)$

$f(e^{-a}-1) = \frac{1}{2}(a^2) - a^2 = -\frac{1}{2}a^2 = -\frac{1}{2}$ $\quad a = 1 > 0$

따라서 $\int_0^{e^2-1} \frac{\{\ln(x+1)+1\}}{x+1}(f(x))^3 dx = \int_0^{e^2-1} f'(x)(f(x))^3 dx$ 임으로

$\left[\frac{1}{4}(f(x))^4\right]_0^{e^2-1} = \frac{1}{4}(f(e^2-1))^4 - \frac{1}{4}(f(0))^4$

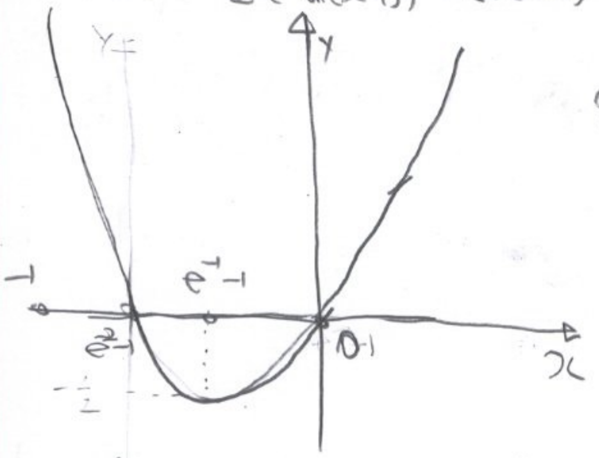
$f(e^2-1) = \frac{1}{2}\times(2)^2 + \ln e^2 = 2+2 = 4$

$f(0) = 0$ 임으로

$\frac{1}{4}(4)^4 - \frac{1}{4}(0)^4 = 64$

$a=1$, $\int_0^{e^2-1} \frac{\{\ln(x+1)+1\}}{x+1}(f(x))^3 dx = 64$

2. $f(x) = \frac{1}{2}(\ln(x+1))^2 + \ln(x+1) = \ln(x+1)\left(\frac{1}{2}(\ln(x+1))+1\right)$ 이다



임으로

$\int_{e^{-3}-1}^{e^{-2}-1} f(x)dx - \int_{e^{-2}-1}^{0} f(x)dx$ 이다

$\int_{e^{-3}-1}^{e^{-2}-1} f(x)dx = \int_{e^{-3}}^{e^{-2}} \frac{1}{2}(\ln(x))^2 + \ln(x)\,dx$ 으로

$= \left[\frac{1}{2}x(\ln x)^2 - x\ln x + x + x\ln x - x\right]_{e^{-3}}^{e^{-2}} = \left[\frac{1}{2}x(\ln x)^2\right]_{e^{-3}}^{e^{-2}}$

$= 2e^{-2} - \frac{9}{2}e^{-3}$ 이 되고

$\int_{e^{-2}-1}^{0} f(x)dx = \left[\frac{1}{2}x(\ln x)^2\right]_{e^{-2}}^{0} = -2e^{-2}$ 임으로

$\int_{e^{-3}-1}^{e^{-2}-1} f(x)dx - \int_{e^{-2}-1}^{0} f(x)dx = 2e^{-2} - \frac{9}{2}e^{-3} + 2e^{-2}$

$= 4e^{-2} - \frac{9}{2}e^{-3}$ 이 된다.

3. $f(\frac{2}{x}) - f(\frac{1}{x}) > f(\frac{3}{x}) - f(\frac{2}{x})$

$\frac{f(\frac{2}{x}) - f(\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} > \frac{f(\frac{3}{x}) - f(\frac{2}{x})}{\frac{1}{x}}$ $\quad (\frac{1}{x} > 0)$

$f'(A)$ $(\frac{1}{x} < A < \frac{2}{x}) > f'(B)$ $(\frac{1}{x} < B < \frac{2}{x})$

$f'(x) = \frac{\ln(x+1)+1}{x+1}$

$f''(x) = \frac{\frac{1}{x+1}(x+1) - (\ln(x+1)+1)}{(x+1)^2}$

$= \frac{-\ln(x+1)}{(x+1)^2} < 0$ $\quad (x > -1)$ 임으로

$f'(x)$는 감소함수 임으로

$f'(A) > f'(B)$ $(A < B)$가 성립된다.

문제 2번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

1. 원 C : $(x-r)^2+(y-r)^2=r^2$

직선 $y=ax$ 와 점 (r,r) 사이의 거리 $\frac{r-ra}{\sqrt{a^2+1}}$

∴ 선분의 길이 : $2\sqrt{r^2-\frac{r^2(1-a)^2}{a^2+1}}$

$= 2r\sqrt{\frac{2a}{a^2+1}}$

∴ $f(a) = 4r^2\times\frac{2a}{a^2+1}$

$\int_0^1 f(a)\,da = 4r^2\int_0^1 \frac{2a}{a^2+1}\,da$

$= 4r^2\left[\ln(a^2+1)\right]_0^1$

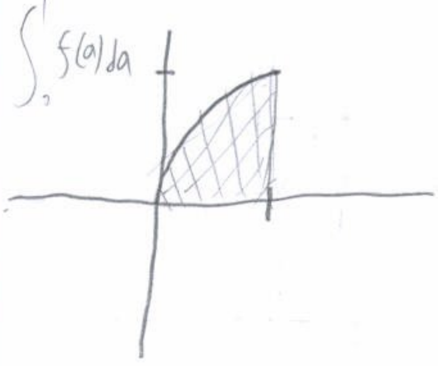
$= 4r^2\ln 2$

2.

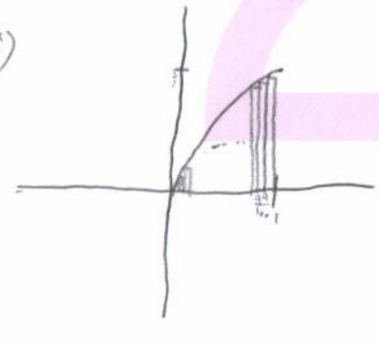
$f(a)=4r^2\times\frac{2a}{a^2+1}$, $f'(a)=8r^2\times\frac{1-a^2}{(a^2+1)^2}$ 이므로

$[0,1]$ 에서 $f(a)$는 증가 함수

$\int_0^1 f(a)\,da$



$\frac{1}{100}\sum_{k=1}^{100} f\left(\frac{100-k}{100}\right)$



그림으로 알 수 있듯이

$\int_0^1 f(a)\,da > \frac{1}{100}\sum_{k=1}^{100} f\left(\frac{100-k}{100}\right)$ 이다.

3. 직선 l : $x=\frac{y}{b}=\frac{z}{b}$ (t, bt, bt)

원뿔 D : $(x-c)^2+y^2=(1-z)^2$, $(0\le z\le 1)$

∴ $(t-c)^2+b^2t^2=(1-bt)^2$ $(0\le bt\le 1)$

을 만족하면 직선 l과 원뿔 D가 만난다.

정리하면 $t^2-2ct+c^2+2bt-1=0$

$t^2-2(c-b)t+c^2-1=0$

$(t-c+b)^2=b^2-2bc+1$

$t=c-b\pm\sqrt{b^2-2bc+1}$

$b^2-2bc+1\le 0$ 일 때

직선과 원뿔이 접하거나 만나지 않으므로 $b\ge c-\sqrt{c^2-1}$ 일 때

$g(b)=0$

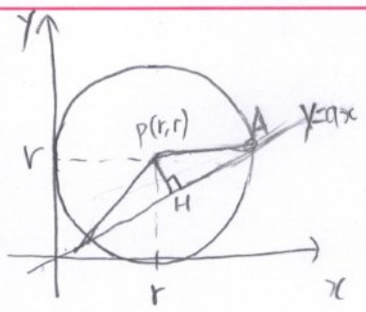
$0\le b< c-\sqrt{c^2-1}$ 일 때

$g(b)=2\sqrt{2b^2+1}\times\sqrt{b^2-2bc+1}$ 이다.

$b\ge 1$ 일 경우 $c\ge 1$ 이기 때문에 원뿔과 직선이 만나지 않는다.

문제 2번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

1.



P(r,r)에서 y=ax에 내린 수선의발을 H라 하고 C와 y=ax의 두교점중 하나를 A라고 하자.

$\overline{PH}=$(P에서 y=ax 까지의 최소거리) $=\dfrac{|ar-r|}{\sqrt{a^2+1}}$

$\overline{PA}=r$

직각삼각형 $\triangle PAH$에서 $\overline{PH}^2+\overline{AH}^2=\overline{PA}^2$ 이 성립하므로

$\overline{AH}^2=r^2-\dfrac{r^2(a-1)^2}{a^2+1}=\dfrac{2ar^2}{a^2+1}$

한편 $f(a)=(2\overline{AH})^2$ 이므로

$f(a)=\dfrac{8ar^2}{a^2+1}$

$\therefore \int_0^1 f(a)\,da=\left[4r^2\ln(a^2+1)\right]_0^1=4r^2\ln 2$

2. $f'(a)=\dfrac{1-a^2}{(a^2+1)^2}$ 은 구간 $[0,1]$에서 $f'(a)>0$ 이므로

$\dfrac{1}{100}\sum_{k=1}^{100} f\left(\dfrac{100-k}{100}\right)=\dfrac{1}{100}\sum_{k=0}^{99} f\left(\dfrac{k}{100}\right)$는 다음 색칠한부분의넓이와 같다.

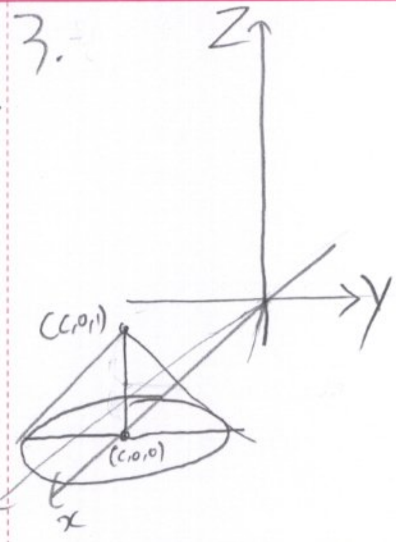
$\int_0^1 f(a)da$는 $[0,1]$에서 $f(a)$의 밑넓이이고

$\dfrac{1}{100}\sum_{k=0}^{99} f\left(\dfrac{k}{100}\right)$에 해당하는 넓이는

$[0,1]$에서 $f(a)$의 아래에 존재.

$\therefore \int_0^1 f(a)\,da > \dfrac{1}{100}\sum_{k=1}^{100} f\left(\dfrac{100-k}{100}\right)$

3.



$Z=p$ 인 D위의 점의 자취는 반지름이 $1-p$ 인 원이다. (단, $0\le p\le 1$)

∴ D의 방정식은

$(x-c)^2+y^2=(1-z)^2 \quad (0\le z\le 1)$

로 나타낼수 있다.

한편, 주어진 직선을 t로 매개화 하면 (t, bt, bt)로 나타나므로 이를 D에 대입한다.

$(t-c)^2+(bt)^2=(1-bt)^2$

$t^2+2(b-c)t+c^2-1=0$

i) $D/4=(b-c)^2-c^2+1\le 0$이면 D와 직선이 두점에서 만나지 않으므로

$c-\sqrt{c^2-1}\le b$ 일때 $g(b)=0 \quad (\because 0\le Z\le 1)$

ii) $D/4\ge 0$ 이면 D와 직선이 두점에서 만나고,

이때의 t값을 각각 α, β라고하면

$\alpha+\beta=2(c-b),\ \alpha\beta=c^2-1$

$\therefore |\alpha-\beta|=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}=\sqrt{4-8bc+4b^2}$

$(\alpha, b\alpha, b\alpha)$와 $(\beta, b\beta, b\beta)$ 사이의 거리는

$\sqrt{1^2+b^2+b^2}\,|\alpha-\beta|$ 이므로

$0<b\le c-\sqrt{c^2-1}$ 일때

$g(b)=\sqrt{2b^2+1}\sqrt{4-8bc+4b^2}$ 이다.

이 줄 위에 답안 작성 시 무효 처리됨

문제 2번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

2-1) f(a)를 구하려면 우선 (r, r)와 직선 y=ax 사이의 거리부터 구한다.

(r, r)에서 직선 y=ax 사이의 거리 : $\frac{|r-ar|}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{r(1-a)}{\sqrt{a^2+1}}$

$$f(a) = \left(2\sqrt{r^2-\frac{r^2(1-a)^2}{a^2+1}}\right)^2 = \left(2r\sqrt{1-\frac{(1-a)^2}{a^2+1}}\right)^2$$

$$= \left(2r\sqrt{\frac{a^2+1-a^2+2a-1}{a^2+1}}\right)^2 = \left(2r\sqrt{\frac{2a}{a^2+1}}\right)^2 = 4r^2\times\frac{2a}{a^2+1}$$

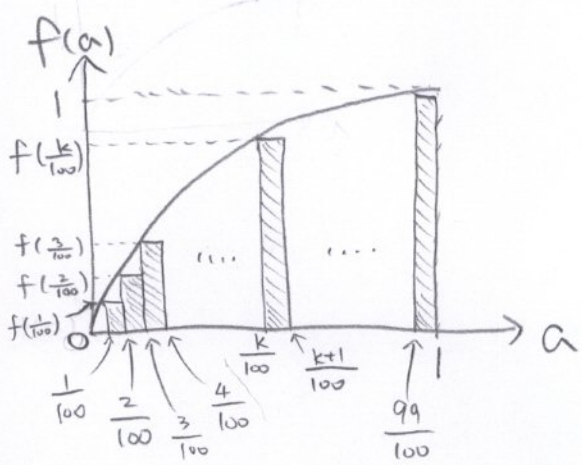
$$\int_0^1 f(a)\,da = 4r^2\int_0^1\frac{2a}{a^2+1}\,da = 4r^2\left[\ln(a^2+1)\right]_0^1$$

$$= 4r^2\ln 2$$

2-2). $f'(a) = 4r^2\times\frac{2(a^2+1)-2a\times 2a}{(a^2+1)^2} = 8r^2\times\frac{1-a^2}{(a^2+1)^2} \geq 0$

f'(a)=0 되는 a값은 오직 a=1 뿐이다.

그래서 f(a)는 [0, 1]에서 증가함수이다.



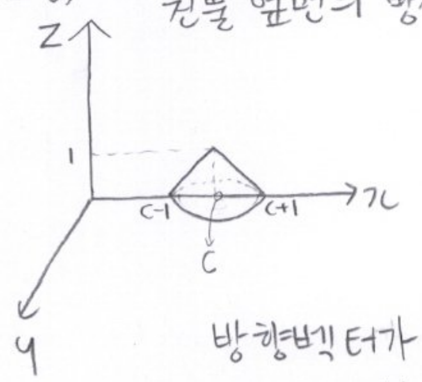
그래프에서 빗금친 직사각형 99개의 넓이의 합은 $\frac{1}{100}\sum_{k=0}^{99}f\left(\frac{k}{100}\right) = \frac{1}{100}\sum_{k=1}^{100}f\left(\frac{100-k}{100}\right)$ 와 같다.

그래프에 의하면,

$\int_0^1 f(a)\,da$ 의 값이 $\frac{1}{100}\sum_{k=1}^{100}f\left(\frac{100-k}{100}\right)$ 의 값보다 크다.

2-3) 원뿔 옆면의 방정식 : $(x-c)^2+y^2=(1-z)^2$

(단, $0\leq z\leq 1$)



방향벡터가 (1, b, b)이고 원점을 지나는 직선의 방정식

↳ $x=\frac{y}{b}=\frac{z}{b}$ / $x=t,\ y=bt,\ z=bt$

$(t-c)^2+b^2t^2=(1-bt)^2$

$(\cancel{b^2}+1)t^2-2ct+c^2=\cancel{b^2t^2}-2bt+1$

$t^2+2(b-c)t+(c^2-1)=0$ ⋯ ①

↳ 이 식이 성립하는 t의 두 실근을 α, β라 할때

$\alpha+\beta=2(c-b)$, $\alpha\beta=c^2-1$.

$(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=4(c-b)^2-4c^2+4=4b^2-8bc+4$.

$|\alpha-\beta|=2\sqrt{b^2-2bc+1}$

$g(b)=\sqrt{(|\alpha-\beta|)^2+(b|\alpha-\beta|)^2+(b|\alpha-\beta|)^2}$

$=|\alpha-\beta|\sqrt{2b^2+1} = 2\sqrt{(2b^2+1)(b^2-2bc+1)}$

단, ①식에서 $D\leq 0$ 일때 $g(b)=0$.

$D=b^2-2bc+1\leq 0$ 일때 $g(b)=0$

$b<c+\sqrt{c^2-1}$ 일때 $g(b)=0$

답: $b>c+\sqrt{c^2-1}$ 일때
$g(b)=2\sqrt{(2b^2+1)(b^2-2bc+1)}$
$b<c+\sqrt{c^2-1}$ 일때
$g(b)=0$

이 줄 아래 답안 작성 시 무효 처리됨