한양대학교 2017학년도 신입학전형 수시		
자 연 계	**논 술 예 시 답 안**	오전-1번

1. $f(x)=\int_0^x \frac{\ln(t+1)+a}{t+1}dt=\int_a^{\ln(x+1)+a} s\ ds=\left[\frac{1}{2}s^2\right]_a^{\ln(x+1)+a}=\frac{1}{2}(\ln(x+1)+a)^2-\frac{1}{2}a^2 \ge -\frac{1}{2}a^2$

이고, $x=e^{-a}-1$ 에서 최솟값 $-\frac{1}{2}a^2$을 갖는다. 따라서 $a=1$이고, $f(x)=\frac{1}{2}[\ln(x+1)]^2+\ln(x+1)$이다.

$f(x)$를 미분하면, $f'(x)=\ln(x+1)\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+1}=\frac{\ln(x+1)+1}{x+1}$이다.

정적분 $\int_0^{e^2-1}\frac{[\ln(x+1)+1][f(x)]^3}{x+1}dx$을 구하기 위하여, $f(x)=t$로 치환하여 적분하면,

$$\int_0^{e^2-1}\frac{[\ln(x+1)+1][f(x)]^3}{x+1}dx=\int_0^4 t^3dt=\left[\frac{1}{4}t^4\right]_0^4=4^3=64$$이다.

2. $f(x)$와 x축과의 교점을 구하면,

$$f(x)=0 \Rightarrow \frac{1}{2}(\ln(x+1))^2+\ln(x+1)=0 \Rightarrow \ln(x+1)=0 \text{ or } -2 \Rightarrow x=0 \text{ or } x=e^{-2}-1$$

따라서 구하고자하는 정적분은 다음과 같이 나눌 수 있다.

$$\int_{e^{-3}-1}^0 |f(x)|dx=\int_{e^{-3}-1}^{e^{-2}-1}f(x)dx-\int_{e^{-2}-1}^0 f(x)dx \quad \text{--------------} ①$$

우선 $f(x)$의 부정적분을 구하면,

$$\int f(x)dx=\int\left[\frac{1}{2}(\ln(x+1))^2+\ln(x+1)\right]dx=\frac{1}{2}\int(\ln(x+1))^2dx+\int\ln(x+1)dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[(x+1)(\ln(x+1))^2-\int(x+1)2\ln(x+1)\frac{1}{x+1}dx\right]+\int\ln(x+1)dx=\frac{1}{2}(x+1)(\ln(x+1))^2.$$

등식 ①의 오른쪽 첫 번째 적분을 구하면,

$$\int_{e^{-3}-1}^{e^{-2}-1}f(x)dx=\frac{1}{2}(x+1)\left[(\ln(x+1))^2\right]_{e^{-3}-1}^{e^{-2}-1}=\frac{1}{2}e^{-2}(-2)^2-\frac{1}{2}e^{-3}(-3)^2=2e^{-2}-\frac{9}{2}e^{-3}.$$

등식 ①의 오른쪽 두 번째 적분을 구하면,

$$\int_{e^{-2}-1}^0 f(x)dx=\left[\frac{1}{2}(x+1)[\ln(x+1)]^2\right]_{e^{-2}-1}^0=0-\frac{1}{2}e^{-2}\times(-2)^2=-2e^{-2}.$$

그러므로 구하는 정적분은 $\int_{e^{-3}-1}^0|f(x)|dx=4e^{-2}-\frac{9}{2}e^{-3}$ 이다.

3. $f'(x)=\frac{\ln(x+1)+1}{x+1}$이고, 양의 실수 x에 대하여 $f''(x)=\frac{-\ln(x+1)}{(x+1)^2}<0$ 이다.

그러므로 $f'(x)$는 감소함수이다. 평균값 정리에 의해 아래의 ①과 ②가 성립한다.

① $\frac{1}{x}$과 $\frac{2}{x}$사이에 c_1이 존재하여 $f'(c_1)=\dfrac{f(\frac{2}{x})-f(\frac{1}{x})}{\frac{2}{x}-\frac{1}{x}}=x\left[f(\frac{2}{x})-f(\frac{1}{x})\right]$을 만족한다.

② $\frac{2}{x}$와 $\frac{3}{x}$사이에 c_2가 존재하여 $f'(c_2)=\dfrac{f(\frac{3}{x})-f(\frac{2}{x})}{\frac{3}{x}-\frac{2}{x}}=x\left[f(\frac{3}{x})-f(\frac{2}{x})\right]$을 만족한다.

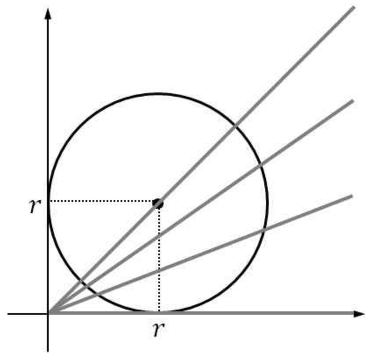
$x>0$에서 함수 $f'(x)$는 감소함수이고 $c_1<c_2$이므로, $f'(c_1)>f'(c_2)$이다.

따라서 $x\left[f(\frac{2}{x})-f(\frac{1}{x})\right]>x\left[f(\frac{3}{x})-f(\frac{2}{x})\right]$이고 $x>0$이므로, $f(\frac{2}{x})-f(\frac{1}{x})>f(\frac{3}{x})-f(\frac{2}{x})$이다.

그러므로 양의 실수 x에 대하여 부등식 $2f(\frac{2}{x})>f(\frac{1}{x})+f(\frac{3}{x})$이 성립한다.

자 연 계	한양대학교 2017학년도 신입학전형 수시 **논 술 예 시 답 안**	오전-2번

1.



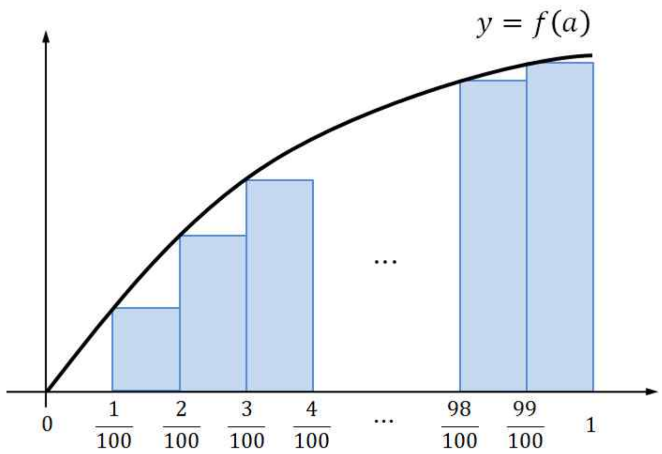
주어진 원의 방정식: $(x-r)^2+(y-r)^2=r^2$

$y=ax$와의 교점의 방정식 : $(x-r)^2+(ax-r)^2=r^2$, 즉 $(a^2+1)x^2-2r(a+1)x+r^2=0$

$$f(a)=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=(x_1-x_2)^2+(ax_1-ax_2)^2=(a^2+1)(x_1-x_2)^2=4r^2\frac{2a}{(a^2+1)}$$

$$\int_0^1 f(a)\,da=\int_0^1 4r^2\frac{2a}{a^2+1}\,da=\left[4r^2\ln(a^2+1)\right]_0^1=4r^2\ln 2$$

2.



$\frac{1}{100}\sum_{k=1}^{100} f(\frac{100-k}{100})=\sum_{k=0}^{99} f(\frac{k}{100})\frac{1}{100}$ 는 위 그림과 같이, 높이가 $f(\frac{k}{100})$, 밑변의 길이가 $\frac{1}{100}$인 사각형의 넓이들의 합이고,

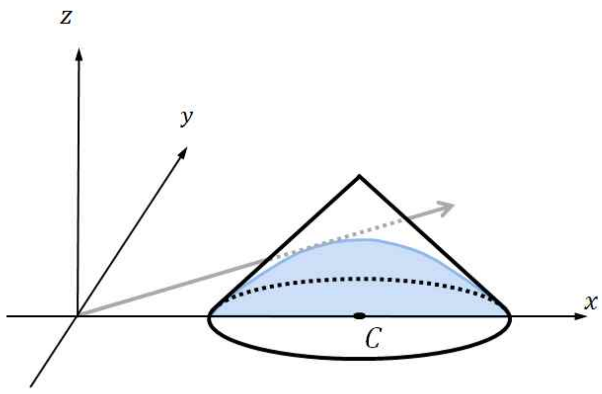
$\int_0^1 f(a)\,da$ 는 x축, $x=1$ 그리고 $y=f(a)$로 둘러싸인 영역의 넓이다.

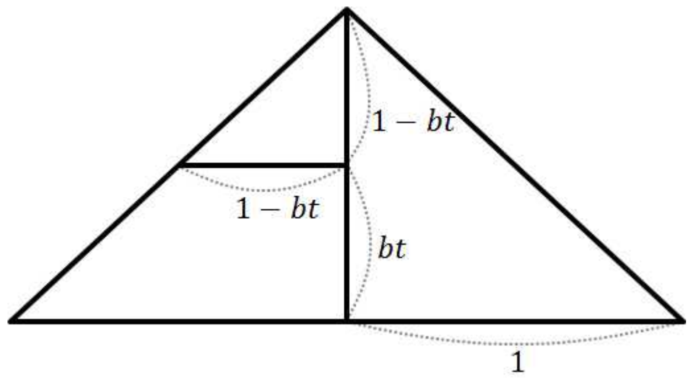
f는 $[0,1]$에서 증가함수이다. 따라서 $\int_0^1 f(a)\,da>\frac{1}{100}\sum_{k=1}^{100} f(\frac{100-k}{100})$가 성립한다.

($\because$ $f'(a)=8r^2\frac{1-a^2}{(a^2+1)^2}>0$ $(0<a<1)$ 또는

위 1의 그림과 같이 a값이 증가함에 따라 원과 직선과의 교선의 길이가 증가함을 그림을 통해 알 수 있다)

3.





주어진 직선 위의 점의 좌표는 $t(1,b,b)$로 나타내어지는데,
원뿔은 x좌표가 양인 부분에 있으므로 $t>0$ 이다.

직선이 원뿔의 표면과 만나는 점을 $t(1,b,b)$라 하고,
이 교점과 원뿔의 꼭지점 그리고 밑면의 중심점을 포함하는 평면을 생각하면,
그림의 삼각형으로부터 세 점의 위치관계를 다음과 같이 얻을 수 있다.
즉, 교점(t,bt,bt)으로부터 점$(c,0,bt)$까지의 거리의 제곱은,
$(t-c)^2+(bt-0)^2=(1-bt)^2$, 이를 t에 대한 2차식으로 정리하면 $t^2+2(b-c)t+c^2-1=0$.

t에 대한 위의 방정식이 근을 가질 조건을 판별식으로 구하면,
$(b-c)^2-(c^2-1)\geq 0$, 즉 $b\geq c+\sqrt{c^2-1}$ 또는 $b\leq c-\sqrt{c^2-1}$.

이 중 직선이 실제로 원뿔을 만나는 경우는 $b\leq c-\sqrt{c^2-1}$.
이 경우 해는 $t=-(b-c)\pm\sqrt{(b-c)^2-(c^2-1)}$, 즉 $t=-(b-c)\pm\sqrt{b^2-2bc+1}$ 이므로,
선분 길이의 제곱값은

$$\begin{aligned}(g(b))^2 &= (t_2-t_1)^2+(bt_2-bt_1)^2+(bt_2-bt_1)^2\\ &= (2b^2+1)(t_2-t_1)^2\\ &= (2b^2+1)\cdot 4\cdot(b^2-2bc+1)\\ &= 4(2b^2+1)(b^2-2bc+1)\end{aligned}$$

따라서 문제에 대한 답은,

$0\leq b<c-\sqrt{c^2-1}$ 일 때, $g(b)=2\sqrt{(2b^2+1)(b^2-2cb+1)}$

$b\geq c-\sqrt{c^2-1}$ 일 때, $g(b)=0$

한양대학교 2017학년도 신입학전형 수시 논술고사		
자 연 계	**출제 의도 및 평가 지침**	오전-1번

1. 출제 의도 및 문제 해설

고등학교 수학과 교육과정을 정상적으로 이수한 학생은 누구나 해결할 수 있는 문제를 고등학교 교과과정의 범위에서 출제하였다. 자연계 오전의 문제 1번은 정적분으로 함수가 주어졌을 때, 정적분과 미분과의 관계를 이용하여 주어진 정적분과 함수로 만들어진 곡선과 직선으로 둘러싸인 영역의 넓이를 구하고 평균값 정리를 통하여 얻어지는 부등식이 성립함을 보이는 문제이다. 이 문제는 고등학교 수학교과에서 중요하게 다루어지는 미분과 적분단원의 전형적인 문제로써, 미적분 기본정리와 평균값 정리를 올바로 이해하고 이를 통해 주어진 문제를 해결하는 능력을 평가하고자 출제하였다.

세부적으로 정적분으로 주어진 함수에 대하여 정적분과 최댓값의 정보를 이용하여 이 함수를 구할 수 있는지를 묻는 문항, 함수의 곡선과 직선들로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하는 문항과 평균값 정리를 활용하여 주어진 함수들의 부등식을 증명하는 문항으로 이루어져 있다. 그러므로 정적분에 대한 올바른 이해와 정적분을 이용하여 넓이를 구할 수 있는지를 평가하는 적분단원의 전형적인 문제와 평균값 정리를 제대로 활용할 수 있는지 측정하는 문제이다. 이를 통해 수학적 사고능력과 문제 해결능력을 키우고, 논리적 사고 능력과 응용 문제에 적용하는 능력을 측정할 수 있다.

2. 종합 평가 기준

문항	배점	세부 평가 기준	세부 배점
1	30	양수 a의 값을 구했는가?	15
		$f(x)$를 치환하여 정적분을 구했는가?	15
2	30	$f(x)$의 부정적분을 구했는가?	15
		구간을 나누어 정적분을 구했는가?	15
3	40	평균값 정리를 잘 적용했는가?	20
		$f'(x)$가 감소함수임을 보이고 평균값 정리에서 얻어진 식으로 부등식을 증명했는가?	20

한양대학교 2017학년도 신입학전형 수시 논술고사

자 연 계	출제 의도 및 평가 지침	오전-2번

1. 출제 의도 및 문제 해설

첫째 문항은 원과 직선의 두 교점 사이의 거리를 제곱한 함수를 구하고 이를 정적분하는 문제이다. 평면에서 직선의 기울기에 따라 두 교점 사이의 거리가 변화하는 상황을 이해하고 이를 수식으로 표현하는 능력을 측정하고자 했다. 상황을 이해했을 경우 실제 계산은 간단한 유리함수의 정적분을 이용할 수 있다.

둘째 문항은 첫째문항에서 구한 함수에 대하여 그것의 유한합과 정적분의 크기를 비교하는 문제이다. 정적분과 영역의 넓이 관계를 이해하는가를 평가하는 개념확인의 문제로, 실제 필요한 계산은 주어진 함수가 증가함을 보이기 위한 유리함수의 미분정도이다.

셋째 문항은 첫째 문항과 같은 취지의 문제이나 다만 그 대상을 공간좌표로 하여 공간직선과 공간도형의 두 교점 사이의 거리가 직선의 방향벡터에 따라 어떻게 변화하는지 이해하고 이를 수식으로 표현하는 문제이다. 답을 얻기 위해서는 공간직선의 방정식을 활용하는 것으로 충분하다. 다만, 계산과정에서 나타나는 이차다항식의 근이 기하적으로 어떤 의미를 가지는지 이해하는 것이 문제해결의 중요한 요소 중 하나이다.

기본적으로 본 문제는 주어진 기하적 상황으로부터 간단한 기하적 양을 수식으로 표현하는 문제이며, 문제 풀이의 과정에 고난이도의 계산이나 선행적 지식의 개입을 배제하였고, 교과서 예제수준의 문제를 유기적으로 연결하여 기본적 개념의 활용을 통한 종합적 문제해결 능력을 평가하는 의도로 출제되었다.

2. 종합 평가 기준

문항	배점	세부 평가 기준	세부 배점
1	30	$\int_0^1 f(a)da$ 의 값을 유도하였는가?	20
		함수 $f(a)$를 적절한 과정을 통해 유도하였는가?	10
2	30	부분합과 정적분의 넓이관계를 통해 대소비교가 이루어졌는가?	20
		f가 증가함수인 것의 타당한 근거를 제시하였는가?	10
3	40	$g(b)$의 값을 b의 범위에 따라 합당하게 유도하였는가?	20
		t에 대한 2차식유도에 있어 합당한 설명이 제시되었는가?	10
		t에 대한 이차식방정식의 두 근중 하나를 선택하는 것에 대한 합당한 기하적 설명이 제시되었는가?	10

3. 출제 근거

▶ 교과서:

- ► 미적분 II (천재교육, 이준열),
  - 세부단원: 치환적분법, 넓이, 함수의 몫의 미분법
  - p. 179, 194-196, 121
- ► 기하와 벡터 (교학사, 김창동),
  - 세부단원: 좌표공간에서의 직선의 방정식
  - p. 176