한양대학교

답안지 (자연계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지
		1/6

[문제 1-1]

이 타원을 타원의 중심이 원점이고 $\overline{AA'}$이 x축, $\overline{BB'}$이 y축 위에 있도록 좌표평면으로 옮기자. 그러면 $\overline{AA'}=6$, $\overline{BB'}=4$ 이므로 타원의 방정식은 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 이다. ∴ B와 이 타원위의 점 사이의 거리는 B의 좌표가 $(0,2)$이고 이 타원위의 한점을 (x,y)라 하면 $\sqrt{x^2+(y-2)^2}$ 이므로 $x^2+(y-2)^2$ 값이 최대인 점이 B로부터 가장 멀리 떨어져 있는 점이다.

$x^2+(y-2)^2 = 9\left(1-\frac{y^2}{4}\right)+(y-2)^2 = -\frac{5}{4}y^2-4y+13 = -\frac{5}{4}\left(y+\frac{8}{5}\right)^2+\frac{81}{5}$

∴ y좌표가 $-\frac{8}{5}$일 때가 B에서 가장 먼 타원위의 점이다.

그런데 수연이가 추측한 점을 보면 α에서 $\overline{AA'}$에 내린 수선의 발을 H라고 했을때 $\overline{\alpha H} = \overline{HF'} \times \frac{2}{\sqrt{5}} < \frac{2}{\sqrt{5}} < \frac{8}{5}$ 이다. ∴ α는 B에서 가장 먼 타원위의 점이 아니다.

∴ 수연이의 추측은 거짓이다.

한양대학교

답안지 (자연계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지
		2/6

[문제 1-2]

$\overline{AO}=a$, $\overline{BO}=b$라고 하자. 이 타원을 O가 원점, $\overline{AA'}$이 x축, $\overline{BB'}$이 y축위에 있도록 좌표평면으로 옮기면 이 타원의 방정식은 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 이다.

$\overline{BQ}=\overline{BB'}=2b$ 이므로 $\overline{QF'}=2b-a$ 이다.

∴ Q의 x좌표는 $\overline{F'O}=c$라고하고 Q에서 $\overline{AA'}$에 내린수선의발을 H라고 했을때

$\overline{OH}=\overline{OF'}+\overline{F'H}=c+c\times\frac{2b-a}{a}=\frac{2b}{a}c$ 이므로 $-\frac{2b}{a}c$ 이다.

Q의 y좌표는 $\overline{QH}=\overline{OB}\times\frac{(2b-a)}{a}=b\times\frac{(2b-a)}{a}$ 이므로 $-\frac{b}{a}(2b-a)$이다.

∴ $\frac{1}{a^2}\times\frac{4b^2}{a^2}c^2+\frac{1}{b^2}\times\frac{b^2}{a^2}(2b-a)^2=1$ 이다. ($\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$에 대입)

∴ $4b^2c^2+a^2(2b-a)^2=a^4$, $c^2=a^2-b^2$ 이므로

$4b^2(a^2-b^2)+a^2(2b-a)^2=a^4$. $\Rightarrow 4a^2b^2-4b^4+a^4-4a^3b+4a^2b^2=a^4$

∴ $2a^2b^2=b^4+a^3b$. ∴ $2a^2b=b^3+a^3$

∴ $(a-b)(a^2-b(a+b))=0$ $a\neq b$이므로 $a^2=ab+b^2$

∴ $\frac{a^2}{b^2}=\frac{a}{b}+1$ $\frac{a}{b}=t$라하면 $t^2=t+1$ ∴ $t^2-t-1=0$

∴ $t=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ($t>0$이므로) ∴ $\frac{\overline{AA'}}{\overline{BB'}}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

[문제 1-3]

$\overline{OA}=a$, $\overline{OB}=b$라하고 $(a>b)$ O를 원점, $\overline{AA'}$ 을 x축, $\overline{BB'}$ 을 y축위에 있도록 타원을 좌표평면으로 옮기자. 그러면 이 타원의 방정식은 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 이다.

B에서 이타원까지 거리는 $(0, b)$와 이타원위의 점 (x, y) 사이 거리이므로 $\sqrt{x^2+(y-b)^2}$ 이다. $\therefore x^2+(y-b)^2$이 최대일때가 B에서 가장멀리떨어진 점이 (x, y)이다.

$x^2+(y-b)^2 = a^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)+(y-b)^2 = \left(1-\frac{a^2}{b^2}\right)y^2-2by+a^2+b^2$

$\therefore$ y좌표가 $\frac{b^3}{b^2-a^2}$ 일때가 B와 가장 멀리 떨어진 점이다.

수연이의 추측이 참이 되는 타원이 존재한다 가정하면 이점은 $y=\frac{b}{c}(x+c)$ 위에 있어야 한다. $(c=\sqrt{a^2-b^2})$ $\therefore$ 존재한다 가정한다음에 생각하면 $x=\frac{c}{b}(y-b)$ 이므로

$\frac{c^2}{a^2b^2}(y-b)^2+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow c^2(y-b)^2+a^2y^2=a^2b^2 \Rightarrow c^2y^2-2bc^2y+b^2c^2+a^2y^2=a^2b^2$

$c^2=a^2-b^2$이므로 $(a^2-b^2)y^2-2b(a^2-b^2)y+b^2(a^2-b^2)+a^2y^2=a^2b^2$

$\therefore (2a^2-b^2)y^2-2b(a^2-b^2)y-b^4=0$ 여기서 $y=\frac{b^3}{b^2-a^2}$ 을 만족해야하므로

이를 대입하면 $\frac{(2a^2-b^2)}{(b^2-a^2)^2}b^6+b^4=0$. $\therefore (2a^2-b^2)b^2+(b^2-a^2)^2=0$

$\therefore a^4=0$. $a=0$ 이라는 결과가 나오므로 모순.

$a<b$ 일 때도 마찬가지이므로 수연이의 추측이 참이 되는 타원은 존재하지 않는다.

한양대학교

답안지 (자연계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지
		4/6

[문제 2-1]

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x f(\cos x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2}-x\right) f\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2}-x\right) f(\sin x)\,dx$$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} x f(\cos x)\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} x f(\sin x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2}-x\right) f(\sin x)\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\times\frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4}$$

5

한양대학교

답안지 (자연계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지
		5/6

[문제 2-2]

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right)dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1+\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan x}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan x}\right)dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1+\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\frac{2}{1+\tan x}\right)dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln 2\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)\,dx$$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln 2\,dx = \frac{1}{2}\ln 2\,[x]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8}\ln 2$$

6

한양대학교

답안지 (자연계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지
		6/6

[문제 2-3]

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(f(t) - \frac{\pi}{4}\right) \cos t \, dt = a$ 라고 하자.

그러면 $f(x) = \cos x - a$ $\quad \therefore a = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\cos t - \frac{\pi}{4} - a\right) \cos t \, dt$

$$\therefore a = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t \, dt - \left(\frac{\pi}{4} + a\right) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos t \, dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\cos 2t}{2} \, dt - \left(\frac{\pi}{4} + a\right) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos t \, dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[t + \frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \left(\frac{\pi}{4} + a\right)\left[\sin t\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}\right] - \left(\frac{\pi}{4} + a\right)\left[\sin\frac{\pi}{4}\right]$$

$$= \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} - \left(\frac{\pi}{4} + a\right) \times \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}a + \frac{(1-\sqrt{2})}{8}\pi + \frac{1}{4}$$

$$\therefore \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)a = \frac{(1-\sqrt{2})}{8}\pi + \frac{1}{4} \qquad \therefore a = \frac{2}{2+\sqrt{2}}\left(\frac{(1-\sqrt{2})}{8}\pi + \frac{1}{4}\right)$$

$$\therefore a = \frac{(4-3\sqrt{2})}{8}\pi + \frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

$$\therefore f(x) = \cos x + \frac{(4-3\sqrt{2})}{8}\pi + \frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

[문제 1-1]

타원의 방정식 → $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$

타원위의 임의의 한 점 $P(3\cos\theta, 2\sin\theta)$ $(0\le\theta\le2\pi)$, $B(0,2)$, $F'(-\sqrt5, 0)$.

직선 $\overleftrightarrow{BF'}$ 의 방정식 → $y=\frac{2}{\sqrt5}x+2$

$y^2=\frac{4}{5}x^2+\frac{8}{\sqrt5}x+4 \quad = 4\left(1-\frac{x^2}{9}\right)$

$\frac{56}{45}x^2+\frac{8}{\sqrt5}x=0$

$x\neq0$ 일때, $x=-\frac{45}{56}\cdot\frac{8}{\sqrt5}$

$=-\frac{9}{7}\sqrt5$,

$y=-\frac{9}{7}\sqrt5\cdot\frac{2}{\sqrt5}+2$

$=-\frac{4}{7}$

$\therefore Q\left(-\frac{9\sqrt5}{7}, -\frac{4}{7}\right)$

$\overline{BQ}^2=\left(\frac{9\sqrt5}{7}\right)^2+\left(\frac{18}{7}\right)^2$

$=\frac{81}{49}(5+4)$

$=\frac{729}{49}$

$\overline{BP}^2=(3\cos\theta)^2+(2\sin\theta-2)^2$

$=5\cos^2\theta-8\sin\theta+8$.

$=-5\sin^2\theta-8\sin\theta+13$

$=-5\left(\sin\theta+\frac{4}{5}\right)^2+13+\frac{16}{5}$

$=-5\left(\sin\theta+\frac{4}{5}\right)^2+\frac{81}{5}\le\frac{81}{5}$

$(\overline{BQ}^2)$와 $(\overline{BP}^2$의 최댓값$)$이 다르므로 거짓이다

한양대학교

답안지 (자연계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지
		2/6

[문제 1-2]

$\overline{AA'}=2a$, $\overline{BB'}=2b$ 라 하면,

$\overline{BF'}=\overline{BF}=a$, $\overline{QF'}=\overline{BQ}-\overline{BF'}=2b-a$, $\overline{QF}=2a-\overline{QF'}=3a-2b$ 가 된다

$\angle BF'F+\angle QF'F=\pi$ 이므로

$\cos\angle BF'F+\cos\angle QF'F=0$

$$\cos\angle BF'F=\frac{(\overline{BF'})^2+(\overline{FF'})^2-(\overline{BF})^2}{2\cdot\overline{BF'}\cdot\overline{FF'}}$$

$$=-\cos\angle QF'F$$

$$=-\frac{(\overline{QF'})^2+(\overline{FF'})^2-(\overline{QF})^2}{2\,\overline{QF'}\,\overline{FF'}}$$

$$\overline{BF'}\left\{(\overline{QF'})^2+(\overline{FF'})^2-(\overline{QF})^2\right\}=-\overline{QF'}\left((\overline{BF'})^2+(\overline{F'F})^2-(\overline{BF})^2\right)$$

$$a\left((2b-a)^2+(4a^2-4b^2)-(3a-2b)^2\right)=-(2b-a)\left(a^2+(4a^2-4b^2)-a^2\right)$$

$$a(-4a^2+8ab-4b^2)=-(2b-a)(4a^2-4b^2)$$

$\frac{a}{b}=x$ 라 하고, 위 식의 양 변에 $\frac{1}{b^3}$을 곱하면,

$$-4x^3+8x^2-4x=-(2-x)(4x^2-4)$$

$$=4x^3-8x^2-4x+8$$

$$8x^3-16x^2+8=0$$

$$x^3-2x^2+1=0$$

$$(x-1)(x^2-x-1)=0$$

$a\neq b$ 이므로 $x\neq 1$

$$\therefore x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

한양대학교

답안지 (자연계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지
		3/6

[문제 1-3]

타원의 방정식 → $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

타원위의 임의의 한 점 P.

$P(a\cos\theta,\ b\sin\theta)\ (0\le\theta\le 2\pi)$

$\overline{BP}^2=(a\cos\theta)^2+(b\sin\theta-b)^2$

$=(a^2-b^2)\cos^2\theta-2b^2\sin\theta+2b^2$

$=-(a^2-b^2)\sin^2\theta-2b^2\sin\theta+a^2+b^2$

$=-c^2\sin^2\theta-2b^2\sin\theta+a^2+b^2$

$(c^2=a^2-b^2,\ F'(-c,0))$

$=-c^2\left(\sin\theta+\frac{b^2}{c^2}\right)^2+\frac{b^4}{c^2}+a^2+b^2$

i) $\frac{b^2}{c^2}\ge 1$ 인 경우.

$\overline{BP}^2$이 최댓값을 가지려면 $\sin\theta=-1$,

$\rightarrow P(0,-b)$

존재하지 않는다.

ii) $\frac{b^2}{c^2}<1$ 인경우.

$\overline{BP}^2$이 최댓값을 가지려면 $\sin\theta=-\frac{b^2}{c^2}$

$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$

$=\frac{c^4-b^4}{c^4}=\frac{(c^2-b^2)a^2}{c^4}$

$P\left(\frac{-a^2\sqrt{c^2-b^2}}{c^2},\ -\frac{b^2}{c^2}\right)$

$(\overline{BP}\text{의 기울기})=\frac{b+\frac{b^3}{c^2}}{\frac{a^2\sqrt{c^2-b^2}}{c^2}}$

$=\frac{bc^2+b^3}{a^2\sqrt{c^2-b^2}}$

$=\frac{a^2b}{a^2\sqrt{a^2-2b^2}}=\frac{b}{\sqrt{a^2-2b^2}}$

$(\overline{F'B}\text{의 기울기})=\frac{b}{c}=\frac{b}{\sqrt{a^2-b^2}}$

$\overline{BP}$의 기울기와 $\overline{F'B}$의 기울기가 같아야 수연이의 추측이 참이 된다.

$(\overline{BP}\text{의 기울기})=(\overline{F'B}\text{의 기울기})$라고 가정하자

$\frac{b}{\sqrt{a^2-2b^2}}=\frac{b}{\sqrt{a^2-b^2}}$

$a^2-2b^2=a^2-b^2$

(모순)

따라서 존재하지 않는다.

한양대학교

답안지 (자연계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지
		4/6

[문제 2-1]

$x = \frac{\pi}{2} - t$ 라 할때

$dx = -dt$ 이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x f(\cos x)\, dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \left(\frac{\pi}{2}-t\right) f\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right)(-dt)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2}-t\right) f(\sin t)\, dt$$ 가 된다.

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} x f(\cos x)\, dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} x f(\sin x)\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2}-t\right) f(\sin t)\, dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} x f(\sin x)\, dx$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin t)\, dt$$

$$= \frac{\pi^2}{4}$$ //

[문제 2-2]

$x = \frac{\pi}{4} - t$ 라 할때,

$dx = -dt$ 이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)\,dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{0} \ln\left(1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\right)(-dt)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1+\frac{1-\tan t}{1+\tan t}\right)dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\frac{2}{1+\tan t}\right)dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\ln 2 - \ln(1+\tan t)\right)dt$$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln 2\,dt - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan t)\,dt$$

$$2 \times \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)\,dx = \left[t \ln 2\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{\pi}{4}\ln 2$$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)\,dx = \underline{\frac{\pi}{8}\ln 2} \; //$$

한양대학교

답안지 (자연계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지
		6/6

[문제 2-3]

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(f(t) - \frac{\pi}{4}\right)\cos t \, dt = a$ 라 하자. (a는 상수)

$f(x) = \cos x - a$

$$a = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(f(t) - \frac{\pi}{4}\right)\cos t \, dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\cos t - a - \frac{\pi}{4}\right)\cos t \, dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\cos^2 t - \left(a + \frac{\pi}{4}\right)\cos t\right) dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\cos 2t}{2}\, dt - \left[\left(a + \frac{\pi}{4}\right)\sin t\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \left[\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(a + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(a + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right)a = \frac{1-\sqrt{2}}{8}\pi + \frac{1}{4}$$

$$\frac{2+\sqrt{2}}{2}a = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{2}-1}{8}\pi.$$

$$a = \frac{2}{4(2+\sqrt{2})} - \frac{(\sqrt{2}-1)\cdot 2}{8(2+\sqrt{2})}\pi$$

$$= \frac{2-\sqrt{2}}{4} - \frac{3\sqrt{2}-4}{8}\pi.$$

$$\therefore f(x) = \cos x - \frac{2-\sqrt{2}}{4} + \frac{3\sqrt{2}-4}{8}\pi$$ //