한양대학교 2017학년도 신입학전형 수시 모의논술고사

자 연 계	**출제 의도 및 평가 지침**	1 번

1. 출제 의도 및 문제 해설

자연계열 [문제 1번]에서는 고교수학과정 중 ‘기하와 벡터’의 ‘평면곡선’ 단원 중, 타원을 다루고 있다. 타원 등의 이차곡선에 대한 충분한 이해를 바탕으로 여러 흥미로운 성질을 탐구하는데 필요한 지식과 기술을 갖추고 있는지를 평가하고, 이를 적절히 사용해 필요한 논증을 이끌어낼 수 있는지 묻고 있다.

2. 종합 평가 기준

문항	배점	세부 평가 기준	세부 배점
1	30	$\overline{\mathrm{BQ}}$ 를 정확히 구했는가?	20
		주어진 타원이 조건을 만족하는지 잘 판정했는가?	10
2	30	$\dfrac{\overline{\mathrm{AA'}}}{\overline{\mathrm{BB'}}}$ 를 정확히 구했는가?	30
3	40	$\overline{\mathrm{BP}}$ 의 최대값을 정확히 구했는가?	20
		위의 정보를 이용해 조건을 만족하는 타원의 존재여부를 잘 판정했는가?	20

3. 출제 근거

(가) 기하와 벡터 교과서 (좋은책신사고, 2015년),
평면곡선 - 이차곡선 – 타원 (p. 16–21)

(나) 기하와 벡터 교과서 (비상교육, 2015년),
평면곡선 - 이차곡선 – 타원 (p. 16–20)

한양대학교 2017학년도 신입학전형 수시 모의논술고사

자 연 계

출제 의도 및 평가 지침

2번

1. 출제 의도 및 문제 해설

고등학교 교육과정을 정상적으로 이수한 학생은 누구나 해결할 수 있는 문제를 고등학교 교과과정의 범위에서 출제하였다. 모의 논술 고사 자연계 문제 2번의 (1)은 정적분의 값이 주어졌을 때, 정적분의 성질과 치환 적분을 이용하여 적분값을 구하는 문제이고, (2)는 치환적분과 삼각함수의 덧셈정리를 사용하여 정적분의 값을 구하는 문제이다. (3)은 정적분의 형태로 주어진 함수를 구하는 문제로써 기본적인 정적분을 이용하여 적분을 제대로 할 수 있는지 물어보는 문제이다.

이 문제들은 고등학교 수학교과에서 중요하게 다루어지는 적분단원의 전형적인 문제이고, 이를 통해 학생들이 학교교육을 성실히 이수했는지를 평가하고자 출제되었다. 정적분의 값을 구하기 위하여 치환적분법이나 삼각함수의 여러 가지 성질을 이해하고 이를 이용하여 수학적 사고력을 통한 문제 해결능력과 논리적 사고력을 측정할 수 있다.

2. 종합 평가 기준

문항	배점	세부 평가 기준	세부 배점
(1)	30	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,[f(\cos x)+f(\sin x)]\,dx$의 값을 구하기 위해 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x f(\cos x)\,dx$에서 $x=\frac{\pi}{2}-t$ 로 치환하여 주어진 정적분을 변환하였는가?	15점
		정적분값을 제대로 구했는가?	15점
(2)	30	$x=\frac{\pi}{4}-t$ 로 치환하고 탄젠트 덧셈정리를 이용하여 주어진 정적분을 변환하였는가?	20점
		정적분값을 제대로 구했는가?	10점
(3)	40	$A=\int_0^{\frac{\pi}{4}} [f(t)-\frac{\pi}{4}]\cos t\,dt$ 로 놓고, 다시 $f(x)$를 A에 대입하였는가?	15점
		정적분을 올바로 구하여 함수 $f(x)$를 찾았는가?	25점

3. 출제 근거

▶ 교과서:

- ► 미적분 II (천재교육, 이준열),
  - 세부단원: 치환적분법, 삼각함수의 덧셈정리
  - p. 176-182, 92-96
- ► 미적분 II (동아출판, 우정호),
  - 세부단원: 정적분의 치환적분법, 삼각함수의 덧셈정리
  - p. 206-210, 96-104

▶ EBS교재:

- ► 수능특강 미적분 II: 정적분
  - p. 96-107

한양대학교 2017학년도 신입학전형 수시

자 연 계	모 의 논 술 예 시 답 안	1 번

1. 제시문(가)에 있는 그림의 타원을 점 O가 원점에, 점 F, F′이 x축 위에 오도록 좌표평면 위에 놓으면

타원의 방정식은 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 이고, $\mathrm{B}(0,2)$, $\mathrm{B}'(0,-2)$, $\mathrm{F}'(-\sqrt{5},0)$ 이다.

점 B와 초점 F′을 잇는 직선의 방정식은 $y=\dfrac{2}{\sqrt{5}}x+2$ 이다. 이로부터 $\mathrm{Q}\left(-\dfrac{9\sqrt{5}}{7},\ -\dfrac{4}{7}\right)$를 구하고,

따라서 $\overline{\mathrm{BQ}}=\sqrt{\left(0-\left(-\dfrac{9\sqrt{5}}{7}\right)\right)^2+\left(2-\left(-\dfrac{4}{7}\right)\right)^2}=\dfrac{27}{7}$ 이다.

$\overline{\mathrm{BQ}}=\dfrac{27}{7}<4=\overline{\mathrm{BB'}}$ 이므로, 이 타원의 경우 수연이의 추측은 참이 아니다.

2. 주어진 타원의 방정식을 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (0<b<a)$ 이라 하면,

$\mathrm{B}(0,b)$, $\mathrm{B}'(0,-b)$, $\mathrm{F}'\left(-\sqrt{a^2-b^2},0\right)$ 이다. 문제 1번과 같은 방법으로

$\mathrm{Q}\left(-\dfrac{2a^2\sqrt{a^2-b^2}}{2a^2-b^2},\ -\dfrac{b^3}{2a^2-b^2}\right)$를 구하고, 따라서 $\overline{\mathrm{BQ}}=\dfrac{2a^3}{2a^2-b^2}$ 를 얻는다.

이 때, $\overline{\mathrm{BQ}}=\overline{\mathrm{BB'}}$ 이면 $\dfrac{2a^3}{2a^2-b^2}=2b$ 이고, $\dfrac{\overline{\mathrm{AA'}}}{\overline{\mathrm{BB'}}}=\dfrac{a}{b}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ 이다.

3. 주어진 타원의 방정식을 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (0<b<a)$ 이라 하고, 이 타원 위의 한 점을 $\mathrm{P}(x,y)$

라 하면

$$\overline{\mathrm{BP}}=\sqrt{(x-0)^2+(y-b)^2}=\sqrt{a^2-\frac{a^2}{b^2}y^2+y^2-2by+b^2}=\sqrt{\frac{b^2-a^2}{b^2}\left(y-\frac{b^3}{b^2-a^2}\right)^2+\frac{a^4}{a^2-b^2}}$$

이고, 이 때 $-b\le y\le b$ 이다.

(1) $\dfrac{b^3}{b^2-a^2}\le -b\ \left(\dfrac{a}{b}\le\sqrt{2}\right)$ 이면, P의 y좌표가 $-b$인 경우에만, $\overline{\mathrm{BP}}$는 최댓값 $2b$를 갖는다.

한편 문제 2번에서 구한 Q의 y좌표는 $-\dfrac{b^3}{2a^2-b^2}$ 이고, $-\dfrac{b^3}{2a^2-b^2}\neq -b$ 이므로, 이 경우 수연이의 추측은 참이 아니다.

(2) $\dfrac{b^3}{b^2-a^2}>-b\ \left(\dfrac{a}{b}>\sqrt{2}\right)$ 이면, P의 y좌표가 $\dfrac{b^3}{b^2-a^2}$ 인 경우에만, $\overline{\mathrm{BP}}$는 최댓값 $\sqrt{\dfrac{a^4}{a^2-b^2}}$ 를 갖는다. 한편 문제 2번에서 구한 Q의 y좌표는 $-\dfrac{b^3}{2a^2-b^2}$ 이고 $-\dfrac{b^3}{2a^2-b^2}\neq\dfrac{b^3}{b^2-a^2}$ 이므로, 이 경우 역시 수연이의 추측은 참이 아니다.

한양대학교 2017학년도 신입학전형 수시

자 연 계	모 의 논 술 예 시 답 안	2 번

(1) $x=\frac{\pi}{2}-t$ 로 치환하면, $dx=-dt$ 이다. 이를 이용하면 정적분 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} xf(\cos x)dx$의 값을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} xf(\cos x)dx &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (\frac{\pi}{2}-t)f(\cos(\frac{\pi}{2}-t))(-dt)\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\frac{\pi}{2}-t)f(\sin t)dt\\ &= \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin t)dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} tf(\sin t)dt\end{aligned}$$

위의 식으로부터 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} xf(\cos x)dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin t)dt = \frac{\pi}{2}\times\frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4}$이다.

(2) $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)dx$ 라고 하자.

정적분 I에서 $x=\frac{\pi}{4}-t$ 로 치환하면, $dx=-dt$ 이다.

탄젠트 덧셈공식을 사용하여, $\tan x = \tan(\frac{\pi}{4}-t) = \dfrac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan t}{1+\tan\frac{\pi}{4}\cdot\tan t} = \dfrac{1-\tan t}{1+\tan t}$을 얻는다.

그러면 $$\begin{aligned}I &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^0 \ln(1+\frac{1-\tan t}{1+\tan t})(-dt)\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\frac{2}{1+\tan t}dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} [\ln 2-\ln(1+\tan t)]dt = \frac{\pi}{4}\ln 2 - I\end{aligned}$$

이다. 따라서 $I=\frac{\pi}{8}\ln 2$ 이다.

(3) $f(x)=\cos x-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(f(t)-\frac{\pi}{4}\right)\cos t\,dt$ 에서 $A=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(f(t)-\frac{\pi}{4}\right)\cos t\,dt$ 라고 하자.

그러면 $f(x)=\cos x - A$ 이므로,

$$\begin{aligned}A &= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(f(t)-\frac{\pi}{4}\right)\cos t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\cos t - A - \frac{\pi}{4}\right)\cos t\,dt\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 t\,dt - (A+\frac{\pi}{4})\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2t+1}{2}dt - (A+\frac{\pi}{4})\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos t\,dt\\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin 2t + t\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - (A+\frac{\pi}{4})[\sin t]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}) - (A+\frac{\pi}{4})\frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

이다. 따라서 $A=\frac{2-\sqrt{2}}{4}-\frac{\pi}{8}(3\sqrt{2}-4)$이므로, $f(x)=\cos x-\frac{2-\sqrt{2}}{4}+\frac{\pi}{8}(3\sqrt{2}-4)$이다.