[문제 1-1]

$f(x) = f(x+\theta)$,(그전에 $\theta > 0$ 이라고 하자. 아니면 θ가 음수도 가능하므로 최솟값이 없다)

$\frac{1}{2-\sin x}$, $\frac{1}{2-\cos x}$ 이 각 2π를 주기로 가지므로 $f(x) = f(x+2\pi)$ 라는 것을

알수 있다. ①

$f(\frac{\pi}{4}) = 0 = f(\frac{\pi}{4}+\theta)$

$= \frac{1}{2-\sin(\frac{\pi}{4}+\theta)} - \frac{1}{2-\cos(\frac{\pi}{4}+\theta)}$ $f(\frac{\pi}{4}+\theta)$ 가 0 일려면

$\sin(\frac{\pi}{4}+\theta) = \cos(\frac{\pi}{4}+\theta)$

$\therefore \theta$는 $m\pi$ (m은 자연수) 임을 알 수 있다.

1) $m=1$일때

$f(x+\pi) = \frac{1}{2-\sin(\pi+x)} - \frac{1}{2-\cos(\pi+x)}$

$= \frac{1}{2+\sin x} - \frac{1}{2+\cos x} \neq f(x)$

2) $m=2$ 일때

①에 의해 $\theta = 2\pi$ 일때 성립한다는 것을 알 수 있다

$\therefore \theta = 2\pi$

「θ의 범위가 주어지지 않았으므로

정확히는 $\theta = 0, -2\pi, -4\pi \cdots$ 도 될 수 있으므로

최솟값은 없다.」

[문제 1-2]

$f(x) = g(x)$

$$\frac{1}{2-\sin x} - \frac{1}{2-\cos x} = \frac{2}{4-\sin^2 x} - \frac{2}{4-\cos^2 x}$$

$$\frac{1}{2-\sin x} - \frac{2}{4-\sin^2 x} = \frac{1}{2-\cos x} - \frac{2}{4-\cos^2 x}$$

$$\frac{\sin x}{4-\sin^2 x} = \frac{\cos x}{4-\cos^2 x}$$

$4\sin x - \sin x\cos^2 x = 4\cos x - \cos x\sin^2 x$ $(4-\sin^2 x \neq 0,\ 4-\cos^2 x \neq 0)$

$4(\sin x - \cos x) + \cos x\sin x(\sin x - \cos x) = 0$

$(4 + \cos x\sin x)(\sin x - \cos x) = 0$

$|\cos x| \leq 1$ $|\sin x| \leq 1$ 이므로 $4 + \cos x\sin x \neq 0$

$\therefore \sin x = \cos x$

$\therefore x = \frac{\pi}{4} + n\pi$ (n은 정수)

한양대학교

답안지 (자연계열)

수험번호	성 명	페이지
		3/8

[문제 1-3]

$\sin x = t$ 라고 치환 하라 $(-1 \le t \le 1)$

그럼 $4 - \sin^2 x = 4 - t^2$ $\quad 4 - \cos^2 x = 3 + t^2$

$$g(x) = h(t) = \frac{2}{4-t^2} - \frac{2}{3+t^2}$$

$$= 2\{(4-t^2)^{-1} - (3+t^2)^{-1}\}$$

$$h'(t) = 2\{-(4-t^2)^{-2} \cdot (-2t) + (3+t^2)^{-2}\, 2t\}$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{2t}{(4-t^2)^2} + \frac{2t}{(3+t^2)^2}\right)$$

$$= 4 \cdot t \cdot \left(\frac{1}{(4-t^2)^2} + \frac{1}{(3+t^2)^2}\right)$$

$\frac{1}{(4-t^2)^2} + \frac{1}{(3+t^2)^2} > 0$ 이므로

t	-1		0		1
$h(t)$	$\frac{1}{6}$		$-\frac{1}{6}$		$\frac{1}{6}$
$h'(t)$		$-$	0	$+$	

$\frac{2}{3} - \frac{2}{4}$

$\frac{8}{12} - \frac{6}{12}$

$\therefore$ $h(t)$ 는 $t=0$ 일 때 최솟값 $-\frac{1}{6}$

$t = \pm 1$ 일 때 최댓값 $\frac{1}{6}$

즉, $g(x)$ 의 최솟값 : $-\frac{1}{6}$

최댓값 : $\frac{1}{6}$

수험번호	성 명	페이지
		4/8

[문제 1-4] 문 1-2의 결과를 이용하면

$$g(x)-f(x) = 2\cdot\frac{(\sin x-\cos x)}{(4-\sin^2 x)(4-\cos^2 x)} - \frac{\sin x-\cos x}{(2-\sin x)(2-\cos x)}$$

$$= (\sin x-\cos x)\left\{\frac{2}{(4-\sin^2 x)(4-\cos^2 x)} - \frac{(2+\sin x)(2+\cos x)}{(4-\sin^2 x)(4-\cos^2 x)}\right)$$

$$= (\sin x-\cos x)\cdot\frac{1}{(4-\sin^2 x)(4-\cos^2 x)}\left\{2-(2+\sin x)(2+\cos x)\right\}$$

$$= (\cos x-\sin x)\ \frac{1}{(4-\sin^2 x)(4-\cos^2 x)}\left\{(2+\sin x)(2+\cos x)-2\right\}$$

$x \in [0, \frac{\pi}{4}]$에서 $\cos x-\sin x \geq 0$ (등호는 $x=\frac{\pi}{4}$일 때 성립)

$$\frac{1}{(4-\sin^2 x)(4-\cos^2 x)} > 0$$

$(2+\sin x) > 2 \quad (2+\cos x) > 2$ 이므로

$(2+\sin x)(2+\cos x)-2 > 0$

$x \in [0, \frac{\pi}{4}]$에서 $f(x) \leq g(x)$

그리고 등호는 $x=\frac{\pi}{4}$일때만 성립하므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,dx < \int_0^{\frac{\pi}{4}} g(x)\,dx$$

[문제 2-1]

$b=a$ 일때

$f(2a) = \frac{1}{2017} \cdot (f(a))^2 \geq 0$

모든 임의의 실수 $(2a)$에 대해 $f(2a) \geq 0$ 이므로

즉, 모든 실수 x에 대해 $f(x) \geq 0$

$f(x)$가 $x=0$ 에서 연속이라 하자

임의의 실수 m, n에 대해 $f(m+n) = \frac{f(m)f(n)}{2017}$

$n=0$을 대입하면, $f(m) = \frac{f(m)f(0)}{2017}$

1) $f(m)=0$ 일때

$f(x)=0$ 으로 상수함수이므로 모든 실수 a에 대하여

$x=a$에서 연속이다.

2) $f(0)=2017$ 일때

$\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0-} f(x) = f(0) = 2017$ -- ①

$f(m+n) = \frac{f(m)f(n)}{2017}$ $m=a$라 하면 $f(a+n) = \frac{f(a)f(n)}{2017}$

$\lim_{n \to 0+} f(a+n) = \lim_{n \to 0+} \frac{f(a)f(n)}{2017} = f(a) \lim_{n \to 0+} \frac{f(n)}{2017}$ 이 값은 ①에 의해 $f(a)$, 즉

$f(x)$의 $x=a$에서의 우극한이랑 $f(a)$는 같다. .. ②

같은 원리로 $\lim_{n \to 0-} f(a+n) = \lim_{n \to 0-} \frac{f(a)f(n)}{2017} = f(a)$ -- ③

②, ③에 의해 $x=0$에서 연속이면 모든실수 a에 대하여

$x=a$에서 연속이다.

[문제 2-2]

$f(m+n) = \frac{f(m)f(n)}{2017}$ (임의의 실수 m, n)

$x=0$ 에서 미분가능하다고 하자.

1) [2-1] 에서 구한 바와 같이

$f(x)=0$ 일때,

상수함수이므로 모든 실수 a에 대하여 $x=a$에서 미분가능하다.

2)

$f(0)=2017$ 일때

$$f(m+n) = \frac{f(m)f(n)}{2017}$$

$$f(m+n)-f(m) = \frac{f(m)\{f(n)-2017\}}{2017}$$

$$= \frac{f(m)\{f(n)-f(0)\}}{2017}$$

$$\frac{f(m+n)-f(m)}{n} = \frac{f(m)}{2017} \cdot \frac{f(n)-f(0)}{n} \quad (n \neq 0) \quad \cdots ①$$

6

$f'(0)=k$ 라하면

$$\lim_{n\to 0} \frac{f(m)}{2017} = \frac{f(m)}{2017}, \quad \lim_{n\to 0} \frac{f(n)-f(0)}{n} = k.$$

두극한값 다 수렴하므로

$$\frac{f(m)}{2017} \cdot k = \lim_{n\to 0} \frac{f(m)}{2017} \cdot \frac{f(n)-f(0)}{n}$$

$$= \lim_{n\to 0} \frac{f(m+n)-f(m)}{n} \quad (①에 의해)$$

$m=a$ 일때 $\quad \frac{f(a)}{2017} \cdot k = \lim_{n\to 0} \frac{f(a+n)-f(a)}{n}$

우변은 $f'(a)$ 이므로 임의의 실수 a에 대해 $f'(a)$가 존재한다.

즉 모든 실수 a에 대하여 $f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하다.

한양대학교

답안지 (자연계열)

수험번호	성　　명	페이지
		7/8

[문제 2-3]

$f(m)=a \quad f(n)=b$ 라하자 $(a, b>0)$

$$f(m+n)=\frac{f(m)\cdot f(n)}{2017}$$

$$f^{-1}(f(m+n)) = m+n = f^{-1}(a)+f^{-1}(b)$$

$$= f^{-1}\left(\frac{f(m)\cdot f(n)}{2017}\right) = f^{-1}\left(\frac{ab}{2017}\right)$$

$$\therefore f^{-1}(a)+f^{-1}(b) = f^{-1}\left(\frac{ab}{2017}\right)$$

7

한양대학교 | 답안지 (자연계열)

수험번호	성 명	페이지
		8/8

[문제 2-4]

$f(x)$가 $x=0$에서 미분 가능하므로 모든 실수 a에 대하여

$x=a$에서 미분 가능하다.

$f'(0)=k$ $(k\neq 0)$ 이라 하자.

전 문제들에서 구한 결과에 따라

$f(0)=2017$ $\quad (f^{-1})'(2017)=\frac{1}{k}$

$$f^{-1}\left(\frac{mn}{2017}\right)=f^{-1}(m)+f^{-1}(n) \quad (\text{임의의 실수 } m,n)$$

$$\frac{f^{-1}\left(\frac{mn}{2017}\right)-f^{-1}(n)}{m-2017}=\frac{f^{-1}(m)-f^{-1}(2017)}{m-2017}$$

$$\frac{n}{2017}\cdot\frac{f^{-1}\left(\frac{mn}{2017}\right)-f^{-1}(n)}{n\cdot\frac{m-2017}{2017}}=\frac{f^{-1}(m)-f^{-1}(2017)}{m-2017}$$

$$\lim_{m\to 2017}\frac{n}{2017}\cdot\frac{f^{-1}\left(\frac{mn}{2017}\right)-f^{-1}(n)}{n\cdot\frac{m-2017}{2017}}=\lim_{m\to 2017}\frac{f^{-1}(m)-f^{-1}(2017)}{m-2017}$$ (좌변이 수렴함은 우변이 수렴함을 통해 알 수 있다.)

$$\frac{n}{2017}\lim_{m\to 2017}\frac{f^{-1}\left(\frac{mn}{2017}\right)-f^{-1}(n)}{n\cdot\frac{m-2017}{2017}}=\frac{1}{k}$$ 여기서 $n=a$를 대입한다

$$\lim_{m\to 2017}\frac{f^{-1}\left(\frac{ma}{2017}\right)-f^{-1}(a)}{a\cdot\frac{m-2017}{2017}}=\frac{2017}{a}\cdot\frac{1}{k}$$

$$(f^{-1})'(a)=\frac{2017}{a}\cdot\frac{1}{k}$$

$\therefore$ 모든 양의 실수 a에 대해 $(f^{-1})'(a)$가 존재하므로

$x=a$에서 $f^{-1}(x)$는 미분가능하다

한양대학교

답안지 (자연계열)

수험번호	성명	페이지
		1/8

[문제 1-1] $(2-\sin x)$, $(2-\cos x)$는 0이 아니므로 $f(x)$는 모든 값에서 정의된다.

$f(x) = \dfrac{\sin x - \cos x}{(2-\sin x)(2-\cos x)}$ 이다. $f(x)=0$을 만족시키는 x를 구해보면

$\sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = 0$ 에서 $\frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi, \frac{9}{4}\pi, \cdots$ 등이 있다.

이들의 간격은 모두 π이므로 양수 θ의 가능한 값으로는 $\pi, 2\pi, 3\pi, \cdots$ 등이 있다.

그런데 $f(0) = \frac{1}{2} - \frac{1}{1} = -\frac{1}{2}$, $f(\pi) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ 이므로 $\theta=\pi$일 때 문제의 조건이 만족하지 않는다.

반면, 모든 실수 x에 대해 $\sin(x+2\pi)=\sin x$, $\cos(x+2\pi)=\cos x$ 이므로 $f(x+2\pi) = \dfrac{1}{2-\sin(x+2\pi)} - \dfrac{1}{2-\cos(x+2\pi)} = \dfrac{1}{2-\sin x} - \dfrac{1}{2-\cos x} = f(x)$ 를 만족한다.

위에 의해 $f(x)=f(x+\theta)$를 만족시키는 최솟값 θ는 2π임이 증명된다.

한양대학교

답안지 (자연계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지
		2/8

[문제 1-2]

$f(x) = g(x)$ 에서 $\dfrac{1}{2-\sin x} - \dfrac{1}{2-\cos x} = \dfrac{2}{4-\sin^2 x} - \dfrac{2}{4-\cos^2 x}$

$\therefore \dfrac{1}{2-\sin x} - \dfrac{2}{4-\sin^2 x} = \dfrac{1}{2-\cos x} - \dfrac{2}{4-\cos^2 x}$ 이며 이를

통분하여 정리하면 $\dfrac{\sin x}{4-\sin^2 x} = \dfrac{\cos x}{4-\cos^2 x}$ 이다.

$0 \le \sin^2 x \le 1$, $0 \le \cos^2 x \le 1$ 이므로 $(4-\sin^2 x)$와 $(4-\cos^2 x)$는 0이 아니며

따라서 양변에 $(4-\sin^2 x)(4-\cos^2 x)$를 곱해주면 $\sin x(4-\cos^2 x) = \cos x(4-\sin^2 x)$ 이다. 정리하면

$4\sin x - \sin x\cos^2 x = 4\cos x - \sin^2 x\cos x$

$4(\sin x - \cos x) + \sin x\cos x(\sin x - \cos x) = (4+\sin x\cos x)(\sin x - \cos x) = 0$ 이다.

그런데 $-1 \le \sin x \le 1$, $-1 \le \cos x \le 1$ 에서 $-1 \le \sin x\cos x \le 1$ 이므로

$(4+\sin x\cos x) \ne 0$ 이다.

$\therefore \sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = 0$

$\sin x = 0$ 의 해는 $x = n\pi$ (n은 정수) 이므로

$f(x) = g(x)$를 만족시키는 x는 $x = n\pi + \dfrac{\pi}{4}$ (n은 정수) 이다.

한양대학교

답안지 (자연계열)

수험번호	성명	페이지
		3/8

[문제 1-3]

$$g(x) = \frac{2}{4-\sin^2 x} - \frac{2}{4-\cos^2 x} = \frac{2}{4-\sin^2 x} - \frac{2}{4-(1-\sin^2 x)} = \frac{2}{4-\sin^2 x} - \frac{2}{3+\sin^2 x}$$

$\sin^2 x = t$ 로 치환하면

$$g(x) = \frac{2}{4-t} - \frac{2}{3+t} \quad (0 \le t \le 1,\ t = \sin^2 x)$$

그런데 함수 $h(t) = \frac{2}{4-t}$ 는 $0 \le t \le 1$에서 증가함수이며 $k(t) = -\frac{2}{3+t}$ 역시 $0 \le t \le 1$ 에서 증가함수이므로 $g(x)$의 값은 t가 증가함에 따라 증가한다.

$\therefore$ $t = 1$일 때 $g(x)$는 최댓값 $\frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ 을 가지며

$t = 0$ 일 때 $g(x)$는 최솟값 $\frac{1}{2} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{6}$ 을 가진도.

$\therefore$ 최댓값 $\frac{1}{6}$, 최솟값 $-\frac{1}{6}$

한양대학교

답안지 (자연계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지
		4/8

[문제 1-4]

$$g(x) - f(x) = \left(\frac{2}{4-\sin^2 x} - \frac{1}{2-\sin x}\right) - \left(\frac{2}{4-\cos^2 x} - \frac{1}{2-\cos x}\right)$$

$$= \frac{-\sin x}{4-\sin^2 x} + \frac{\cos x}{4-\cos^2 x}$$

$$= \frac{(4+\sin x\cos x)(\cos x - \sin x)}{(4-\sin^2 x)(4-\cos^2 x)}$$ 이다.

그런데 $0 < x < \frac{\pi}{4}$에서 $(4-\sin^2 x)$, $(4-\cos^2 x)$, $(4+\sin x\cos x) > 0$이며

$(\cos x - \sin x) = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) > 0$이다

$\therefore$ $0 < x < \frac{\pi}{4}$에서 $g(x) > f(x)$

$\therefore$ $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx < \int_0^{\frac{\pi}{4}} g(x)dx$ 가 성립한다.

4

한양대학교 답안지 (자연계열)

수험번호	성 명	페이지
		5/8

[문제 2-1]

$f(x) = f(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}) = \dfrac{f(\frac{x}{2})^2}{2017} \geq 0$ 이다.

$f(0) = \dfrac{(f(0))^2}{2017}$ 으로부터 $f(0)=0$ 또는 $f(0)=2017$을 얻을 수 있다.

i) $f(0)=0$인 경우

$f(x) = f(x+0) = \dfrac{f(x)\cdot f(0)}{2017} = 0$ 이다. 즉, $f(x)$는 $f(x)=0$인 상수 함수이어

$f(x)$는 모든 실수 a에 대하여 $x=a$에서 연속이다.

ii) $f(0)=2017$인 경우

$f(x)$가 $x=0$에서 연속이라고 가정하자. 그러면 $\lim_{b\to 0} f(b) = f(0) = 2017$ 이다.

이제 임의의 실수 a를 생각하자. 이때

$\lim_{b\to 0}(f(a+b)-f(a)) = \lim_{b\to 0}\left(f(a)\cdot\left(\dfrac{f(b)}{2017}-1\right)\right) = f(a)\cdot\lim_{b\to 0}\left(\dfrac{f(b)}{2017}-1\right)$

$= 0$ 이다. 즉, $\lim_{b\to 0} f(a+b) = f(a)$이므로 $f(x)$는 임의의 실수

a에 대하여 $x=a$에서 연속이다.

i), ii)에 의해 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이면 모든 실수 a에 대하여

$x=a$에서 연속이다.

[문제 2-2]

i) $f(0)=0$일 때 ; [문제 2-1]에 의해 $f(x)=0$이다.
따라서 $f(x)$는 모든 실수 a에 대하여 $x=a$에서 미분 가능하다.

ii) $f(0)=2017$일 때

$f(x)$가 $x=0$에서 미분 가능하므로 $\lim_{b\to0}\frac{f(b)-f(0)}{b}$의 값이 존재하며

그 값은 $f'(0)$이다. 이제 임의의 실수 a를 생각하자. 이때

$$\lim_{b\to0}\frac{f(a+b)-f(a)}{b}=\lim_{b\to0}\frac{\frac{f(a)f(b)}{2017}-f(a)}{b}=\lim_{b\to0}\frac{f(a)}{2017}\left(\frac{f(b)-2017}{b}\right)$$

$$=f(a)\cdot\lim_{b\to0}\frac{f(b)-2017}{b}$$ 이다. 그런데 $\lim_{b\to0}\frac{f(b)-2017}{b}=f'(0)$이므로

$$\lim_{b\to0}\frac{f(a+b)-f(a)}{b}=f(a)f'(0)$$

∴ i), ii)에 의해 $f(x)$가 $x=0$에서 미분 가능하면 모든 실수 a에 대하여 $x=a$에서 미분 가능함이 증명된다.

6

[문제 2-3]

함수 $f(x)$의 역함수 $f^{-1}(x)$가 존재하므로

$f^{-1}(a) = p$, $f^{-1}(b) = q$ 라 둘 수 있다. 이때 $f(p) = a$, $f(q) = b$ 이다.

$$\therefore f(p+q) = \frac{f(p)\cdot f(q)}{2017} = \frac{a\cdot b}{2017}$$

$$f^{-1}\left(\frac{ab}{2017}\right) = p+q$$

$\therefore f^{-1}\left(\dfrac{ab}{2017}\right) = f^{-1}(a) + f^{-1}(b)$가 성립한다.

7

[문제 2-4]

$f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하므로 [문제 2-2]에 의해 모든 실수 a에 대하여 $x=a$에서 미분가능하다. 이제 임의의 실수 a에 대해 $f(a)\neq 0$임을 보이자.

어떤 실수 t가 있어 $f(t)=0$이라고 가정하자. 이때 임의의 실수 x에 대해 $f(x+t)=\dfrac{f(x)f(t)}{2017}=0$이므로 $f(x)$는 $f(x)=0$인 상수함수이다. 이 때 $f'(0)=0$이 되는데 이는 조건에 모순이다. 따라서 임의의 실수 a에 대해 $f(a)\neq 0$이 성립한다.

또한 [문제 2-2]에서 $f'(a)=f(a)\cdot f'(0)$임을 보였으므로 임의의 실수 a에 대해 $f'(a)\neq 0$이다. 이제 $f^{-1}(x)$가 모든 양의 실수 a에 대하여 $x=a$에서 미분 가능함을 보이자.

임의의 실수 a를 생각하자. 이때 $a+h\geq 0$을 만족하는 임의의 실수 h에 대하여 실수 p, q가 존재해 $f(p)=a+h$, $f(q)=a$를 만족한다.

역함수 $f^{-1}(x)$가 존재하기 위해서는 $f(x)$가 일대일대응이어야 하므로 $h\neq 0$일 때 $p\neq q$이며, $\lim_{h\to 0} f(p)=f(q)$이므로 $\lim_{h\to 0} p=q$이다.

$$\therefore \lim_{h\to 0}\frac{f^{-1}(a+h)-f^{-1}(a)}{(a+h)-a}=\lim_{p\to q}\frac{p-q}{f(p)-f(q)}=\lim_{p\to q}\frac{1}{\dfrac{f(p)-f(q)}{p-q}}$$

$=\dfrac{1}{f'(q)}$이다. 따라서 $f^{-1}(x)$는 모든 양의 실수 a에 대해 $x=a$에서 미분 가능하다.

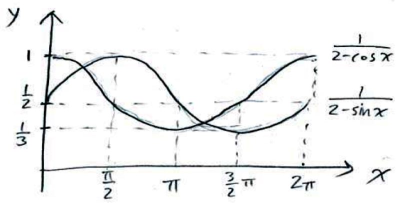
8

[문제 1-1]

* $\sin x$, $\cos x$는 모두 주기가 2π이므로 $\theta = 2n\pi$ (n은 정수) 꼴이면 $f(x) = f(x+\theta)$

즉, $\theta = -2\pi, -4\pi, \cdots$ 등이 모두 가능하며 $\lim_{n\to-\infty} \theta = -\infty$ 이므로 최솟값은 없다.

$\theta > 0$ 인 경우만 생각할 경우, $\theta = 2\pi$일 경우 $f(x) = f(x+\theta)$를 만족하고,



그래프에서 $\theta < 2\pi$일 때 $f(x) = f(x+\theta)$를 만족하는 θ가 존재하지 않으므로 θ 최솟값은 2π

1

[문제 1-2]

$f(x) = g(x)$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2-\sin x} - \frac{1}{2-\cos x} = \frac{2}{4-\sin^2 x} - \frac{2}{4-\cos^2 x}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2-\sin x} - \frac{2}{4-\sin^2 x} = \frac{1}{2-\cos x} - \frac{2}{4-\cos^2 x}$

$\Leftrightarrow \frac{\cancel{2}+\sin x-\cancel{2}}{4-\sin^2 x} = \frac{\cancel{2}+\cos x-\cancel{2}}{4-\cos^2 x}$

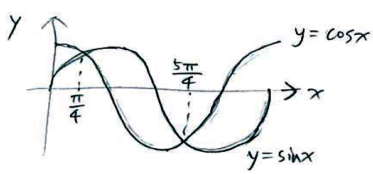
$\Leftrightarrow \frac{\sin x}{3+\cos^2 x} = \frac{\cos x}{3+\sin^2 x}$ $3+\sin^2 x \neq 0$, $3+\cos^2 x \neq 0$ 이므로

$\Leftrightarrow 3\sin x + \sin^3 x = 3\cos x + \cos^3 x$

$f(t) = 3t + t^3 \rightarrow f'(t) = 3t^2 + 3 > 0$ $\therefore f(t)$는 $-1 \leq t \leq 1$에서 증가함수

즉, $a < b$인 두 실수 a, b에 대해 $f(a) < f(b)$

$f(\sin x) = f(\cos x)$ 이기 위해선 $\sin x = \cos x$



근은 $x = \frac{\pi}{4} + 2n\pi$, $x = \frac{5}{4}\pi + 2n\pi$

이를 종합하면 $x = \frac{\pi}{4} + n\pi$ (n은 정수)

수험번호	성 명	페이지
		3/8

[문제 1-3]

$$g(x)=\frac{2}{4-\sin^2 x}-\frac{2}{4-\cos^2 x}=\frac{2}{4-\sin^2 x}-\frac{2}{3+\sin^2 x}$$ $\sin^2 x = t$로 치환 $\rightarrow 0 \le t \le 1$

$$h(t)=\frac{2}{4-t}-\frac{2}{3+t} \qquad h'(t)=\frac{2}{(t-4)^2}+\frac{2}{(t+3)^2}>0$$

$\therefore h(t)$는 $\begin{cases} t=1 \text{일 때 최대} \\ t=0 \text{일 때 최소} \end{cases}$

최댓값 $h(1)=\frac{1}{6}$ 최솟값 $h(0)=-\frac{1}{6}$

3

[문제 1-4]

$$g(x) - f(x) = \frac{2}{4-\sin^2 x} - \frac{2}{4-\cos^2 x} - \frac{1}{2-\sin x} + \frac{1}{2-\cos x}$$

$$= \frac{\cos x}{4-\cos^2 x} - \frac{\sin x}{4-\sin^2 x}$$

$$F(t) = \frac{t}{4-t^2} \qquad F'(t) = \frac{4-t^2+2t}{(4-t^2)^2} = \frac{-(t-1)^2+3}{(4-t^2)^2}$$

$\therefore$ $0 \le t \le 1$ 범위 내에서 $F'(t) > 0$

$0 \le x \le \frac{\pi}{4}$ 이면 $0 \le \sin x \le \cos x \le 1$ 이므로 $F(\sin x) \le F(\cos x)$

$\therefore$ $F(\cos x) - F(\sin x) = \frac{\cos x}{4-\cos^2 x} - \frac{\sin x}{4-\sin^2 x} \ge 0$ 이고, 등호가 항상 성립하지 않으므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\cos x}{4-\cos^2 x} - \frac{\sin x}{4-\sin^2 x} \right) dx > 0$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{4}} \{g(x) - f(x)\} dx > 0 \quad \Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,dx < \int_0^{\frac{\pi}{4}} g(x)\,dx$$

[문제 2-1]

$f(a+b) = \dfrac{f(a)f(b)}{2017}$ $\quad a=b=\frac{x}{2}$ 대입 $\rightarrow f(x) = \dfrac{\{f(\frac{x}{2})\}^2}{2017} \geq 0$

$a=0,\ b=0$ 대입 $\quad f(0) = \dfrac{\{f(0)\}^2}{2017} \quad f(0) = 0$ or 2017

i) $f(0) = 0 \rightarrow a=x,\ b=0$ 대입 $\quad f(x) = \dfrac{f(x)\,f(0)}{2017} = 0 \quad \therefore f(x)=0$ 인 상수함수

$\therefore$ 모든 실수 a에 대해 $x=a$에서 연속

ii) $f(0)=2017 \rightarrow \lim_{h\to 0} f(h) = f(0) \quad \lim_{h\to 0} f(a+h) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(a)f(h)}{2017} = \dfrac{f(a)f(0)}{2017} = f(a)$

$\therefore \lim_{h\to 0} f(a+h) = f(a)$ 이므로 $x=a$에서 연속

5

[문제 2-2]

i) $f(0)=0 \rightarrow f(x)=0$ 인 상수함수이므로 모든 실수 a에 대하여 $f'(a)=0$ 이고,
모든 실수에 대하여 미분 가능임을 알 수 있다.

ii) $f(0)=2017 \rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=f'(0)$ 만족

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(a)f(h)}{2017}-f(a)}{h}=\frac{f(a)}{2017}\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-2017}{h}=\frac{f(a)}{2017}\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\frac{f(a)}{2017}f'(0)$$

∴ 모든 실수에 대하여 $f'(a)$ 존재 → 모든 실수에서 미분 가능

6

[문제 2-3]

$f(a+b) = \frac{f(a)f(b)}{2017}$ a에 $f^{-1}(a)$, b에 $f^{-1}(b)$ 대입

$f(f^{-1}(a)+f^{-1}(b)) = \frac{f(f^{-1}(a))f(f^{-1}(b))}{2017} = \frac{ab}{2017}$

양변에 f^{-1} 연산을 해주면,

$f^{-1}(f(f^{-1}(a)+f^{-1}(b))) = f^{-1}(\frac{ab}{2017})$ $\Leftrightarrow$ $f^{-1}(a)+f^{-1}(b) = f^{-1}(\frac{ab}{2017})$

7

[문제 2-4]

$f(0)=0 \rightarrow f(x)=0$ 인 상수함수가 되어 $f'(0)=0$ → 문제조건과 모순

$\therefore f(0)=2017 \rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=f'(0)$ 존재

문제 2에 의해 $f'(a)=\frac{f(a)}{2017}f'(0)$

$f(x)=0$ 인 x가 존재하지 않음을 보이자. $f(x)=0$인 x가 있다고 가정할 경우

$f(a+b)=\frac{f(a)f(b)}{2017}$ $a=x,\ b=-x$ 대입 $\rightarrow f(0)=\frac{f(x)f(-x)}{2017}=0$ 이므로 모순

$\therefore f(x)\neq 0$ $\therefore f'(x)=\frac{f(x)}{2017}f'(0)\neq 0$ $f'(f^{-1}(x))=\frac{x}{2017}f'(0)\neq 0$

$\ast\ f(f^{-1}(x))=x \xrightarrow{\text{미분}} f'(f^{-1}(x))\{f^{-1}(x)\}'=1$ $\{f^{-1}(x)\}'=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}=\frac{2017}{f'(0)\cdot x}$

이므로 모든 양의 실수 a에 대해 $x=a$에서 미분계수가 존재하므로 $x=a$에서 미분 가능

$\ast$ - 우변 미분 가능하므로 좌변도 미분 가능

8