

한양대학교 2017학년도 신입학전형 수시 모의논술고사

자연계

출제 의도 및 평가 지침

1번

1. 출제 의도 및 문제 해설

고등학교 수학교과를 정상화하기 위하여 철저하게 교과서를 중심으로 출제하였으며, 정상적인 수학교과를 이수한 수험생이면 충분히 해결할 수 있는 문제를 출제하였다. 삼각함수의 성질과 삼각함수의 도함수의 성질을 잘 이해하고 있는가를 평가하는 문제이다.

2. 종합 평가 기준

문항	배점	세부 평가 기준		세부 배점
1	20	삼각함수 성질	함수 $f(x)$ 의 주기	10점
			최소주기임을 보였는가?	10점
2	30	방정식 $\sin x - \cos x = 0$ 을 유도하였는가?		20점
		방정식의 해를 모두 구하였는가?		10점
3	30	도함수 $g'(x)$ 형태를 올바르게 구하였는가?		10점
		극점들을 찾았는가?		10점
		극점들중 어디서 최대값 최소값을 갖는지 확인하였는가?		10점
4	20	부등식 $f(x) < g(x)$ 임을 보였는가? * 2번 문제와 연관되어있음		20점

3. 출제 근거

수학 I : 부등식

수학 II : 삼각함수 정의와 그래프, 삼각함수 미분, 함수의 미분과 극대 극소

한양대학교 2017학년도 신입학전형 수시 모의논술고사

자연계

출제 의도 및 평가 지침

2번

1. 출제 의도 및 문제 해설

고등학교 수학교과를 정상화하기 위하여 철저히 교과서를 중심으로 출제하였으며, 정상적인 수학교과를 이수한 수험생이면 충분히 풀 수 있는 문제를 출제하였다. 함수의 연속과 미분의 정의를 잘 이해하고 있는지, 역함수와 원함수와의 관계, 미분법을 이해하고 있는지를 판단하고자 출제한 문제이다.

2. 종합 평가 기준

문항	배점	세부 평가 기준	세부 배점
1	30	$f(x) \geq 0$ 임을 보였는가?	10
		함수 $f(x)$ 가 임의의 실수 a 에 대하여 $x = a$ 에서 연속임을 두 가지 경우로 나누어 잘 보였는가?	20
2	20	미분의 정의를 이용하여 미분 가능함을 보였는가?	20
3	20	역함수의 관계와 함수 $f(x)$ 의 성질을 이용하여 잘 증명하였는가?	20
4	30	역함수 미분법과 미분의 정의를 이용하여 미분 가능함을 보였는가?	30

3. 출제 근거

(가) 함수의 연속 - 고등학교 미적분과 통계기본 (금성출판사, 2014년), 26

(나) 역함수의 미분법 - 고등학교 미적분II (금성출판사, 2014년), 118~119

$$1. f(x) = \frac{1}{2 - \sin x} - \frac{1}{2 - \cos x}$$

함수 $f(x)$ 에서

$\sin(x) = \sin(x + 2\pi)$, $\cos(x) = \cos(x + 2\pi)$ 로 부터 $f(x) = f(x + 2\pi)$ 임을 알 수 있다.

$\theta = 2\pi$ 가 최소임을 보이자.

우선 $f(x) = 0$ 인 되는 x 를 구하여 보면 (그래프개형에서 x 축과 만나는 점을 모두 구해보면)

$$f(x) = \frac{1}{2 - \sin x} - \frac{1}{2 - \cos x} = \frac{\sin x - \cos x}{(2 - \sin x)(2 - \cos x)} = 0 \text{ 에서}$$

분모는 항상 0 보다 크므로 분자 $\sin x - \cos x = 0$ 인 해를 구하자.

$$\sin x = \cos x \text{ 을 만족하는 } x \text{ 는 } \frac{\pi}{4} \pm n\pi, n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$$

$$f(x) = 0 \text{ 인 되는 } x \text{ 는 } \dots, -\frac{11\pi}{4}, -\frac{7\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, \dots$$

가능성 있는 주기는 π 와 2π 이다.

모든 x 에 대해서 $f(x) = f(x + 2\pi)$ 이 만족됨을 보였으므로

주기가 π 가 아님을 보이면 된다.

주기 θ 가 $\theta = \pi$ 이라면

$$\theta = \pi \text{ 인 경우는 } f(x + \pi) = \frac{1}{2 + \sin x} - \frac{1}{2 + \cos x}$$

모든 x 에 대해서

$$f(x) = \frac{\sin x - \cos x}{(2 - \sin x)(2 - \cos x)} = \frac{-\sin x + \cos x}{(2 + \sin x)(2 + \cos x)} = f(x + \pi) \text{ 를 만족해야 한다.}$$

$$\frac{\sin x - \cos x}{(2 - \sin x)(2 - \cos x)} = \frac{-\sin x + \cos x}{(2 + \sin x)(2 + \cos x)} \text{ 를 정리하면}$$

$$\frac{(\sin x - \cos x)\{(2 - \sin x)(2 - \cos x) + (2 + \sin x)(2 + \cos x)\}}{(2 - \sin x)(2 - \cos x)(2 + \sin x)(2 + \cos x)} = 0 \text{ 는 모든 } x \text{ 에 대해서 만족하지 않는다.}$$

이유는 분모는 항상 0 보다 크고

분자가 $(\sin x - \cos x)\{(2 - \sin x)(2 - \cos x) + (2 + \sin x)(2 + \cos x)\}$ 에서

모든 x 에 대해서 $(2 - \sin x)(2 - \cos x) + (2 + \sin x)(2 + \cos x) > 0$ 이므로

모든 x 에 대해서 $f(x) = f(x + \pi)$ 이 만족되지 않는다.

따라서 주기가 π 일 수 없다.

[별해]

도함수 $f'(x) = \frac{\cos x}{(2 - \sin x)^2} + \frac{\sin x}{(2 - \cos x)^2}$ 이므로 $-\frac{7\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$ 에서

$f(x)$ 의 기울기를 고려하면

$$\begin{aligned} f'(\pi/4) &= \frac{\cos(\pi/4)}{(2 - \sin(\pi/4))^2} + \frac{\sin(\pi/4)}{(2 - \cos(\pi/4))^2} \\ &= \frac{\cos(-7\pi/4)}{(2 - \sin(-7\pi/4))^2} + \frac{\sin(-7\pi/4)}{(2 - \cos(-7\pi/4))^2} = f'(-7\pi/4) > 0 \text{ 이고} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(5\pi/4) &= \frac{\cos(5\pi/4)}{(2 - \sin(5\pi/4))^2} + \frac{\sin(5\pi/4)}{(2 - \cos(5\pi/4))^2} \\ &= \frac{\cos(-3\pi/4)}{(2 - \sin(-3\pi/4))^2} + \frac{\sin(-3\pi/4)}{(2 - \cos(-3\pi/4))^2} = f'(-3\pi/4) < 0 \text{ 이므로} \end{aligned}$$

정리하면, 그래프가 x 축과 만나는 점에서의 기울기가 같아지게 되는

$f(x) = f(x+\theta) = 0$ 이고 $f'(x) = f'(x+\theta)$ 를 만족하는 최소의 θ 는

2π 보다 작은 값에서는 존재하지 않는다는 것을 알 수 있다.

2π 보다 작은 값에서 모든 실수 x 에 대해 $f(x) = f(x+\theta)$ 를 만족시키는 θ 가 존재하지 않음을 알 수 있다.

최소주기는 2π 이다.

2. 방정식 $f(x) = g(x)$ 을 만족하는 해 x 를 모두 구하시오.

$$f(x) = \frac{1}{2 - \sin x} - \frac{1}{2 - \cos x} = \frac{2}{4 - \sin^2 x} - \frac{2}{4 - \cos^2 x} = g(x)$$

$$\frac{(2 + \sin x)(4 - \cos^2 x) - (4 - \sin^2 x)(2 + \cos x) - 2(4 - \cos^2 x) + 2(4 - \sin^2 x)}{(4 - \sin^2 x)(4 - \cos^2 x)} = 0$$

분모는 0 이 아니므로

$$(2 + \sin x)(4 - \cos^2 x) - (4 - \sin^2 x)(2 + \cos x) - 2(4 - \cos^2 x) + 2(4 - \sin^2 x) = 0$$

을 만족하는 x 를 구하면 된다.

$$\text{분자 : } 4\sin x - \sin x \cos^2 x - 3\cos x - \cos^3 x = 0$$

$$\Rightarrow (\sin x - \cos x)(4 + \sin x \cos x) = 0$$

$$\sin x - \cos x = 0 \text{ 를 만족하는 } x \text{ 는 } \pm n \cdot \pi + \frac{\pi}{4}, n = 0, 1, 2, \dots$$

3. 함수 $g(x)$ 의 최댓값과 최솟값을 구하시오.

$$g'(x) = 4\sin x \cos x \left(\frac{1}{(4 - \sin^2 x)^2} + \frac{1}{(4 - \cos^2 x)^2} \right) = 0 \text{ 의 해를 구하면}$$

$$\left(\frac{1}{(4 - \sin^2 x)^2} + \frac{1}{(4 - \cos^2 x)^2} \right) > 0 \text{ 이므로 } \sin x \cos x = 0 \text{ 을 만족하는 } x \text{ 들이 극점이 된다.}$$

$$\sin x \cos x = 0 \text{ 을 만족하는 } x \text{ 는 } \pm n \frac{\pi}{2}, n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\text{최댓값은 } n \text{ 이 홀수 일 때, } g(x) = \frac{1}{6}$$

$$\text{최솟값은 } n \text{ 이 0 과 짝수 일 때, } g(x) = -\frac{1}{6}$$

4. 부등식 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx < \int_0^{\frac{\pi}{4}} g(x) dx$ 이 만족됨을 설명하시오.

문제 1-2에서

$$f(x) - g(x) = \frac{(\sin x - \cos x)(4 + \sin x \cos x)}{(4 - \sin^2 x)(4 - \cos^2 x)} \text{ 이므로}$$

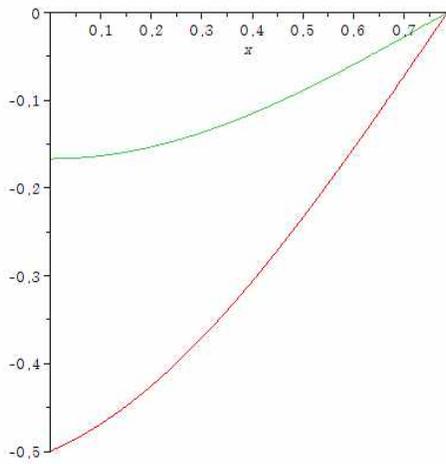
분모는 항상 0보다 크고

분자 $(\sin x - \cos x)(4 + \sin x \cos x)$ 는 구간 $[0, \frac{\pi}{4})$ 에서 0보다 작고 $x = \frac{\pi}{4}$ 에서 0 이다.

따라서 구간 $[0, \frac{\pi}{4})$ 에서 $f(x) - g(x) < 0$ 이므로, $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \{f(x) - g(x)\} dx < 0$ 이고

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx < \int_0^{\frac{\pi}{4}} g(x) dx \text{ 이 성립한다.}$$

혹은 그림으로 설명



1. 우선 $f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2017}f\left(\frac{x}{2}\right)^2 \geq 0$ 이다. 한편, $f(0) = \frac{1}{2017}f(0)^2$ 이므로 $f(0) = 0$ 또는 2017이다. 만약 $f(0) = 0$ 이면, 모든 실수 x 에 대하여

$$f(x) = f(x+0) = \frac{f(x)f(0)}{2017} = 0 \text{이다.}$$

즉, 함수 $f(x) = 0$ (상수함수)으로 연속함수이다. 만약 $f(0) = 2017$ 이고 함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 연속이라면, 즉 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 2017$ 이라면,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(a+x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(a)f(x)}{2017} = f(a)$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 임의의 실수 $x=a$ 에서 연속이다.

2. 1번에서 볼 수 있듯이 만약 $f(0) = 0$ 이면, 함수 $f(x) = 0$ (상수함수)으로 미분가능함수이다. 만약 $f(0) \neq 0$ 이면

$f(0) = 2017$ 이고, 함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 미분 가능하므로

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - 2017}{h}$$

가 존재한다. 또한 임의의 실수 a 에 대하여

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a)f(h)/2017 - f(a)}{h} \\ &= \frac{f(a)}{2017} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - 2017}{h} \\ &= \frac{f(a)}{2017} f'(0) \end{aligned}$$

역시 존재한다. 따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 미분 가능하다.

3. $f^{-1}(a) = c, f^{-1}(b) = d$ 라 하면 $f^{-1}(a) + f^{-1}(b) = c + d$ 이다. 한편 $f(c) = a, f(d) = b$ 이므로

$$\frac{ab}{2017} = \frac{f(c)f(d)}{2017} = f(c+d)$$

이다. 따라서

$$f^{-1}\left(\frac{ab}{2017}\right) = c + d = f^{-1}(a) + f^{-1}(b)$$

이다.

4. 함수 $f(x)$ 의 역함수 $f^{-1}(x)$ 를 $g(x)$ 라 하자. 함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 미분 가능하면, 역함수 미분법에 의해 함수 $g(x)$ 는 $f(0)=2017$ 에서 미분가능하고

$$g'(2017) = \frac{1}{f'(0)}$$

이다. 한편

$$g'(2017) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(2017+h) - g(2017)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(2017+h)}{h} \quad \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} g'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(a) + g(2017 + 2017h/a) - g(a)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(2017 + 2017h/a)}{h} \\ &= \frac{2017}{a} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(2017 + 2017h/a)}{2017h/a} \\ &= \frac{2017}{a} g'(2017) \end{aligned}$$

역시 존재한다. 따라서 함수 $g(x) = f^{-1}(x)$ 는 $x=a$ 에서 미분 가능하다.

별해> 역함수 미분법과 2번의 결과에 의해서 $f(c)=a$ 인 c 에 대하여

$$\begin{aligned} g'(a) &= \frac{1}{f'(c)} \\ &= \frac{1}{\frac{f(c)}{2017} f'(0)} \\ &= \frac{2017}{af'(0)} \end{aligned}$$

따라서 함수 $g(x) = f^{-1}(x)$ 는 양의실수 a 에 대하여 $x=a$ 에서 미분 가능하다.