한양대학교

답안지 (자연계)
답안지 바코드
315483

지원학과	
성 명	
수험번호	
생년월일 (예:980301)	

수험생 유의사항
1. 답안지는 검정색 펜(볼펜, 연필, 샤프)으로 작성하십시오. (빨강색이나 파랑색 사용금지)
2. 답안지를 수정할 경우 지우개(연필, 샤프 사용 시)를 사용하거나 두 줄을 긋고(볼펜 사용 시) 그 위에 재 작성하십시오.
3. 답안과 관련 없는 표현이나 표시를 한 답안지는 "0"점 처리 됩니다.
4. 본 고사는 답안지 1장 이내에 답안을 작성하여야 합니다. 답안지 교체는 가능하지만 기존 답안지 제출은 불가합니다.

문제 1번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

1. $h(t)=\frac{1}{t+2}+\ln(t+1)-\ln(t+2)$ $(t>0)$ 이라고 할때

$h'(t)=\frac{-1}{(t+2)^2}+\frac{1}{t+1}-\frac{1}{t+2}$

$=\frac{1}{(t+1)(t+2)^2}>0$. 즉 $h(t)$는 $t>0$ 일때 증가함수이다.

$\lim_{t\to\infty}h(t)=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{t+2}+\ln\frac{t+1}{t+2}\right)$ 에서

$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t+2}=0$ 이고 $\lim_{t\to\infty}\ln\frac{t+1}{t+2}=0$ 이므로 $\lim_{t\to\infty}h(t)=0$,

그리고 $\lim_{t\to0+}h(t)=\frac{1}{2}-\ln 2<0$ 이므로

$h(x)$는 $t>0$ 일때 증가함수이면서 x축을 점근선으로 갖는 함수이다.

따라서 $h(t)<0$ 이므로

$\frac{1}{t+2}+\ln(t+1)-\ln(t+2)<0$ 이다. //

2. $[0,\infty)$ 에서 $f(x)=\left(\frac{2x+1}{2x+2}\right)^{x+\frac{1}{2}}$

$\ln f(x)=\left(x+\frac{1}{2}\right)\{\ln(2x+1)-\ln(2x+2)\}$ $(\because f(x)>0)$

$\frac{f'(x)}{f(x)}=\ln\frac{2x+1}{2x+2}+\frac{1}{2x+2}$

여기서 문제 1에서 $\frac{1}{t+2}+\ln(t+1)-\ln(t+2)<0$ 인데

t에 $2x$를 대입하고 정리하면

$\ln\frac{2x+1}{2x+2}+\frac{1}{2x+2}<0$ 이므로 $f'(x)<0$ 이된다.

즉 $f(x)$는 $[0,\infty)$ 에서 감소함수이므로 $f(0)\geq f(x)$가 된다.

이때 $f(0)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 이므로

$f(x)$의 최댓값은 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 이다. //

3. $\frac{f'(x)}{f(x)}=\ln\frac{2x+1}{2x+2}+\frac{1}{2x+2}$ 에서

양변을 x에 대하여 미분하면

$\frac{f''(x)f(x)-\{f'(x)\}^2}{\{f(x)\}^2}=\frac{2}{2x+1}-\frac{2}{2x+2}-\frac{2}{(2x+2)^2}$

$=\frac{2}{(2x+1)(2x+2)^2}$

이때 $x\geq0$ 이므로 (우변)>0 이고, $\{f(x)\}^2>0$ 이므로

따라서 $f''(x)f(x)>\{f'(x)\}^2$ 이 성립하게 된다.

이 줄 아래 답안 작성 시 무효 처리됨

한양대학교

답안지 (자연계)

답안지 바코드
315470

지원학과	
성 명	
수험번호	
생년월일 (예:980301)	

수험생 유의사항

1. 답안지는 검정색 펜(볼펜, 연필, 샤프)으로 작성하십시오. (빨강색이나 파랑색 사용금지)
2. 답안지를 수정할 경우 지우개(연필, 샤프 사용 시)를 사용하거나 두 줄을 긋고(볼펜 사용 시) 그 위에 재 작성하십시오.
3. 답안과 관련 없는 표현이나 표시를 한 답안지는 "0"점 처리 됩니다.
4. 본 고사는 답안지 1장 이내에 답안을 작성하여야 합니다. 답안지 교체는 가능하지만 기존 답안지 제출은 불가합니다.

문제 1번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

1. $\frac{1}{t+2}+\ln(t+1)-\ln(t+2)=g(t)$ 라고 하면,

$$g'(t)=\frac{-1}{(t+2)^2}+\frac{1}{t+1}-\frac{1}{t+2}$$

$$=\frac{1}{(t+1)(t+2)^2}$$ 이며, $t>0$ 에서 $g'(t)>0$ 이다.

따라서 함수 $g(t)$는 증가함수이다. …㉠

한편, $g(t)=\frac{\ln\left(\frac{t+1}{t+2}\right)}{t+2}$ 이므로 $\lim_{t\to\infty}g(t)=\lim_{t\to\infty}\frac{\ln\left(\frac{t+1}{t+2}\right)}{t+2}=0$

…㉡

∴ ㉠과 ㉡으로부터 $g(t)<0$ 이다.

2. $f(x)=\left(\frac{2x+1}{2x+2}\right)^{x+\frac{1}{2}}$ 에서 양변에 자연로그를 취하면

$\ln f(x)=\left(x+\frac{1}{2}\right)\cdot\ln\left(\frac{2x+1}{2x+2}\right)$ 이다. 양변을 x에 대해 미분하면

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\ln\left(\frac{2x+1}{2x+2}\right)+\left(x+\frac{1}{2}\right)\frac{\frac{2(2x+2)-(2x+1)\cdot 2}{(2x+2)^2}}{\frac{2x+1}{2x+2}}$$

이며, 이를 정리하면

$$f'(x)=f(x)\cdot\left\{\frac{1}{2x+2}+\ln(2x+1)-\ln(2x+2)\right\}$$

$=f(x)\cdot g(2x)$ 를 얻는다. …㉢

(단, $g(x)=\frac{1}{x+2}+\ln(x+1)-\ln(x+2)$)

한편 $f(x)$는 $[0,\infty)$에서 $f(x)>0$이고, 1번에 의해 $g(2x)<0$ 이므로 $f'(x)<0$ 이다.

∴ 따라서 $f(x)$는 감소함수이므로 $[0,\infty)$에서 정의된 $f(x)$의 최솟값은 $f(0)=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 이다.

3. $f''(x)f(x)-(f'(x))^2>0$ 임을 보이자.

㉢에서 $f'(x)=f(x)\cdot g(2x)$, 양변을 x에 대해 미분하면

$$f''(x)=f'(x)g(2x)+2f(x)g'(2x)$$

$=f(x)\cdot(g(2x))^2+2f(x)\cdot g'(2x)$ 이므로 …㉣

$f''(x)\cdot f(x)-(f'(x))^2$ 은 ㉢과 ㉣에 의해

$$=\left\{f(x)\cdot(g(2x))^2+2f(x)\cdot g'(2x)\right\}\cdot f(x)-\left\{f(x)\cdot g(2x)\right\}^2$$

$$=(f(x))^2\cdot\left\{(g(2x))^2+2g'(2x)-(g(2x))^2\right\}$$

$$=2\cdot(f(x))^2\cdot g'(2x)$$

이때 $g'(2x)=\frac{1}{(2x+1)(2x+2)^2}$ 이므로

∴ $2(f(x))^2\cdot g'(2x)>0$ $(x\geq 0)$ 이다.

한양대학교 HANYANG UNIVERSITY 1939

답안지 (자연계)

답안지 바코드
315624

지원학과	
성 명	
수험번호	
생년월일 (예:980301)	

수험생 유의사항

1. 답안지는 검정색 펜(볼펜, 연필, 샤프)으로 작성하십시오. (빨강색이나 파랑색 사용금지)
2. 답안지를 수정할 경우 지우개(연필, 샤프 사용 시)를 사용하거나 두 줄을 긋고(볼펜 사용 시) 그 위에 재 작성하십시오.
3. 답안과 관련 없는 표현이나 표시를 한 답안지는 "0"점 처리 됩니다.
4. 본 고사는 답안지 1장 이내에 답안을 작성하여야 합니다. 답안지 교체는 가능하지만 기존 답안지 제출은 불가합니다.

문제 1번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

1 - 1]

$t>0$ 에 대하여

$g(t) = \frac{1}{t+2} + \ln(t+1) - \ln(t+2)$ 라 하자

이때 $\lim_{x\to 0+} g(t) = \frac{1}{2} - \ln 2$ 인데

$e < 4$ 이고 따라서 $\sqrt{e} < 2$ 이므로

$\frac{1}{2} < \ln 2$ 이다 $\therefore \lim_{x\to 0+} g(t) < 0$ 이다.

이때 $(t>0)$ 에서 $g(t)$는 미분가능하므로

$$g'(t) = \frac{-1}{(t+2)^2} + \frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+2}$$

$$= \frac{-(t+1) + (t+2)^2 - (t+1)(t+2)}{(t+2)^2 \cdot (t+1)} = \frac{1}{(t+2)^2(t+1)} > 0$$

$g'(t) > 0$ 이고 $\lim_{x\to 0+} g(0) < 0$ 인데 $\lim_{x\to\infty} g(t)$는

$\lim_{x\to\infty} \left\{\frac{1}{t+2} + \ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)\right\} = 0$ 이므로

$t>0$ 일때 $g(t) < 0$ 이다

($\because$ $g'(t) > 0$ 이므로 $x_1 > x_2 > 0$ 일때 $g(x_1) > g(x_2)$

인데 $g(x) < \lim_{x\to\infty} g(x)$ ($\forall\, x>0$) 이므로
$\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$)

■

1 - 2] 구간 $[0, \infty)$ 에서 $f(x) > 0$ 이다

따라서 양변에 자연로그를 취하면

$$\ln f(x) = \left(x+\frac{1}{2}\right)\{\ln(2x+1) - \ln(2x+2)\}$$

또한 함수 $\ln f(x)$는 $(x>0)$ 에서 미분 가능하므로

양변을 미분 해주면

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \{\ln(2x+1) - \ln(2x+2)\} +$$

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)\left\{\frac{2}{2x+1} - \frac{2}{2x+2}\right\}$$ 이다

위 미분한 식을 정리하면

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln\left(\frac{2x+1}{2x+2}\right) + 1 - \frac{2x+1}{2} \cdot \frac{1}{x+1}$$

$$= \ln\left(\frac{2x+1}{2x+2}\right) + \frac{\cancel{2x}+2 - \cancel{2x}-1}{2x+2}$$

$$= \ln\left(\frac{2x+1}{2x+2}\right) + \frac{1}{2x+2}$$ 이다.

이때 문제 1 에서

$g(t) = \frac{1}{t+2} + \ln\left(\frac{t+1}{t+2}\right)$ 에 t 대신 $2x$를 넣으면

$g(2x) = \frac{1}{2x+2} + \ln\left(\frac{2x+1}{2x+2}\right)$ 인데 $t>0$ 이면 $2x>0$ 이므로

$\frac{1}{2x+2} + \ln\left(\frac{2x+1}{2x+2}\right) < 0$ 이고 $\frac{f'(x)}{f(x)} < 0$ 이다.

그런데 $f(x) > 0$ 이므로 $f'(x) < 0$ 이고 $f(x)$는

$[0, \infty)$ 에서 ~~감소함수~~ 이다.

$\therefore f(0) \geq f(x)$ 이고 $f(x)$의 최댓값은 $f(0)$ 이므로

$f(0) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 이다. $\therefore$ 최댓값 ; $\frac{1}{\sqrt{2}}$

1 - 3] 위 문제 [1-2], [1-3] 에서

$\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln\left(\frac{2x+1}{2x+2}\right) + \frac{1}{2x+2} = g(2x)$ 이다.

이때 위식은 다시 $(x>0)$ 에서 미분 가능한 식이다.

따라서 양변을 미분하면

$$\frac{f''(x)\cdot f(x) - \{f'(x)\}^2}{\{f(x)\}^2} = 2\cdot g'(2x)$$ 이다.

$\therefore f''(x)\cdot f(x) - \{f'(x)\}^2 = 2\cdot\{f(x)\}^2 \cdot g'(2x)$ 이다.

이때 $g'(2x)$는 $x>0$ 에서 $g'(2x) > 0$ 이고

$2\cdot\{f(x)\}^2 > 0$ 이므로

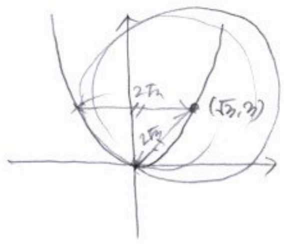
$f''(x)\cdot f(x) - \{f'(x)\}^2 > 0$ 이다.

$\therefore f''(x)\cdot f(x) > \{f'(x)\}^2$

■

문제 2번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

1.



$(x-\sqrt{3})^2+(y-3)^2=12$ 와 $y=x^2$ 의 교점은 두 식을 연립해보면

$(x-\sqrt{3})^2+(x^2-3)^2-12$

$=x^4-5x^2-2\sqrt{3}x$

$=x(x+\sqrt{3})(x^2-\sqrt{3}x-2)$

$=0$ 이다.

즉, $x=0$ or $-\sqrt{3}$ or $x^2-\sqrt{3}x-2=0$ 일 때 $y=x^2$ 위의 점이 $P(\sqrt{3},3)$ 과의 거리가 $2\sqrt{3}$ 이 된다.

$x^2-\sqrt{3}x-2=(x-\frac{\sqrt{3}}{2})^2-\frac{11}{4}=0$ 이므로

$x=\frac{\sqrt{3}}{2}\pm\frac{\sqrt{11}}{2}$ 일때 $x^2-\sqrt{3}x-2=0$ 이다.

$\therefore$ A 위의 점 $(0,0)$, $(-\sqrt{3},3)$, $(\frac{\sqrt{3}+\sqrt{11}}{2}, \frac{14+2\sqrt{33}}{2})$, $(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{11}}{2}, \frac{14-2\sqrt{33}}{2})$ 이 $P(\sqrt{3},3)$ 과의 거리가 $2\sqrt{3}$인 점들이다.

2. $P(a,a^2)$을 중심으로 하는 원을 $(x-a)^2+(y-a^2)^2=r^2$, 도형 A는 $y=x^2$ 이라 하면 교점은 $(x-a)^2+(x^2-a^2)^2=r^2$을 만족시킨다.

$N_p=2$이려면 $g(x)=(x-a)^2+(x^2-a^2)^2$ 라 할때

$y=g(x)$와 $y=r^2$ 의 교점이 최대 2개여야만 한다.

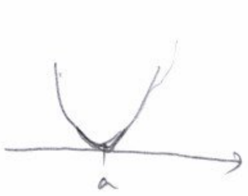
$g(x)=(x-a)^2\{1+(x+a)^2\}$ 이고

$g'(x)=2(x-a)+2(x^2-a^2)\cdot 2x$

$=2(x-a)\{1+2x(x+a)\}$

$=2(x-a)(2x^2+2ax+1)$ 이다.

즉,



$g(x)$는 $x=a$일 때 접하고 $g(x)\geq 0$이므로

$y=r^2$이 최대 2개려면

$x\to a-$ 에서 감소하고

$x\to a+$ 에서 증가하는 것 외에는

증감 변화가 없어야 한다

$\therefore$ $2x^2+2ax+1\geq 0$ 이어야 하므로 $D/4=a^2-2\cdot 1\leq 0$ 이다.

$\therefore$ $-\sqrt{2}\leq a\leq\sqrt{2}$

3. $x^3-3xy-y^3-1=(x^3-y^3)-3xy-1$

$=(x-y)^3+3xy(x-y)-3xy-1$

$=\{(x-y)^3-1^3\}+3xy(x-y-1)$

$=(x-y-1)\{(x-y)^2+(x-y)+1\}+3xy(x-y-1)$

$=(x-y-1)(x^2+xy+y^2+x-y+1)$

$=0$ 이므로

$x-y-1=0$ or $x^2+xy+y^2+x-y+1=0$ 이다.

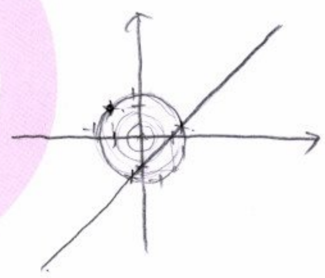
$x^2+xy+y^2+x-y+1=(x+\frac{1}{2}y)^2+(x+\frac{1}{2}y)+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}y^2-\frac{3}{2}y+\frac{3}{4}$

$=(x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}(y-1)^2$

$=0$ 이므로

$y=1$, $x=-1$ 이다.

즉, $x^3-3xy-y^3-1=0$ 은 $y=x-1$ or $(-1,1)$을 의미하고 그래프는 아래 그림과 같다.



즉, $(0,0)$을 중심으로 하는 원을 그릴 때 교점이 최대인 순간은 $(-1,1)$을 지날 때로 $N_p=3$ 이다.

$\therefore$ $N_p=3$, $r=\sqrt{2}$

문제 2번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

1. $y=x^2$ 위의 점 $P(\sqrt{3}, 3)$ 과의 거리가 $2\sqrt{3}$

(a, a^2), $(\sqrt{3}, 3)$ 사이의 거리가 $2\sqrt{3}$ $\quad (2\sqrt{3})^2 = (a-\sqrt{3})^2 + (a^2-3)^2$

$12 = a^4 - 6a^2 + 9 + a^2 - 2\sqrt{3}a + 3 \Rightarrow a^4 - 5a^2 - 2\sqrt{3}a = 0$

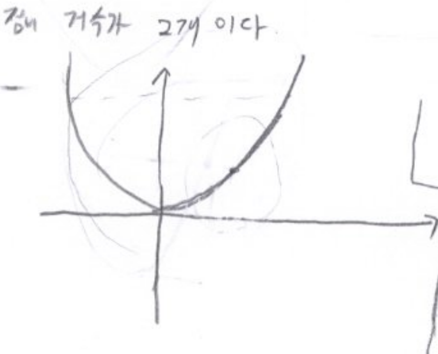
$a(a^3 - 5a - 2\sqrt{3}) = 0 \quad a=0$ or $a^3 - 5a - 2\sqrt{3} = 0$

$(a+\sqrt{3}) \cdot a \times (a^2 - \sqrt{3}a - 2) = a \times (a+\sqrt{3}) \times \left(a - \frac{\sqrt{3}+\sqrt{11}}{2}\right) \times \left(a - \frac{\sqrt{3}-\sqrt{11}}{2}\right)$

즉 가능한 a의 값은 $0, -\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}+\sqrt{11}}{2}, \frac{\sqrt{3}-\sqrt{11}}{2}$

A의 점은 $(0, 0), (-\sqrt{3}, 3), \left(\frac{\sqrt{3}+\sqrt{11}}{2}, \frac{7+\sqrt{33}}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{11}}{2}, \frac{7-\sqrt{33}}{2}\right)$ 이다

2. 점 P가 도형 A 위에 있고 $N_p = 2$ 이다. 즉 반지름 r이 양수일때 만나는 점의 개수가 2개 이다.



$(x-a)^2 + (y-a^2)^2 = r^2$

$(x-a)^2 + (x^2-a^2)^2 = r^2$

$x^4 - 2a^2x^2 + a^4 + x^2 - 2ax + a^2 = r^2$

$x^4 - (2a^2-1)x^2 - 2ax + a^4 + a^2 = r^2$

$x^4 - (2a^2-1)x^2 - 2ax + a^4 + a^2 = f(x)$ 라 하면

$f(a)=0$, $f(x)>0$ (단 $x \neq a$)

$f'(x) = 4x^3 - (4a^2-2)x - 2a = 2(2x^3 - (2a^2-1)x - a)$

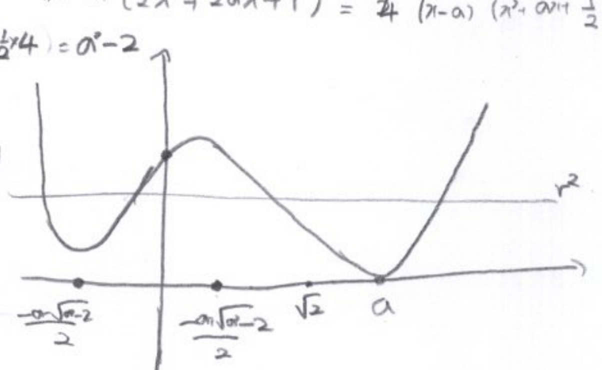
$= 2(x-a)(2x^2 + 2ax + 1) = 4(x-a)(x^2 + ax + \frac{1}{2})$

판별식 D로 구하면 $a^2 - \frac{1}{2} \times 4 = a^2 - 2$

$a^2 - 2 > 0$ 일때 극값이 3개

$a > \sqrt{2}$

$\frac{-a+\sqrt{a^2-2}}{2} < a$ 이다

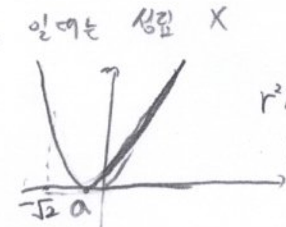


r^2은 양수의 모든 범위에서 가능 교점이 최대 4개 이므로

$\therefore N_p = 4$ 이다 $\therefore a^2 > 2$ 일때는 성립 X

$a^2 < 2$ 일때 $x=a$ 에서만 극값

$a^2 = 2$ 일때 ,,



$r^2 > 0$ 인 모든 범위에서 교점이 2개

$\therefore N_p = 2$

a의 값 또는 범위는 $-\sqrt{2} \le a \le \sqrt{2}$ 이다

3. 도형 A는 $x^3 - 3xy - y^3 - 1 = 0$

$(0, 0)$을 지남.

$x^3 - y^3 - 1 - 3xy = x^3 + (-y)^3 + (-1)^3 - 3 \cdot x \cdot (-y) \cdot (-1)$

$= (x-y-1)(x^2+y^2+1+xy-y+x)$ $\quad (\because a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca))$

$= (x-y-1) \times \frac{1}{2} \times (x^2+2xy+y^2 + x^2+2x+1 + y^2-2y+1)$

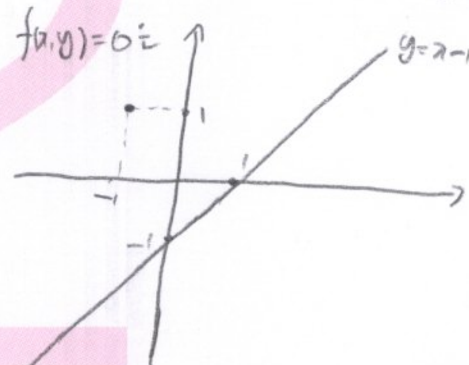
$= \frac{1}{2} \times (x-y-1)((x+y)^2 + (x+1)^2 + (y-1)^2) = 0$

$(x+y)^2 + (x+1)^2 + (y-1)^2 \ge 0$ → $(-1, 1)$ 일때만 $(x+y)^2 + (x+1)^2 + (y-1)^2 = 0$

or

$x - y - 1 = 0$ $\quad y = x-1$ 일때 성립

$\therefore f(x,y)=0$ 은

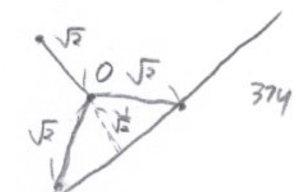


이다 $0 < r < \frac{1}{\sqrt{2}}$ 0개

$\frac{1}{\sqrt{2}} = r$ $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ 에서 1개

$\frac{1}{\sqrt{2}} < r < \sqrt{2}$ 2개

$r = \sqrt{2}$ 3개



$\sqrt{2} < r$ 2개

$\therefore N_p = 3$ 이때 r의 값 또는 범위는 $r = \sqrt{2}$.

문제 2번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

1.

$y=x^2$ 과 P를 중심으로 하고 반지름이 $2\sqrt{3}$인 원의 교점을 구하자.

$$\begin{cases} y=x^2 \\ (x-\sqrt{3})^2+(y-3)^2=12 \end{cases}$$

$(x-\sqrt{3})^2+(x^2-3)^2=12$

$x^2-2\sqrt{3}x+3+x^4-6x^2+9=12$

$x^4-5x^2-2\sqrt{3}x=0$

$x(x+\sqrt{3})(x^2-\sqrt{3}x-2)=0$

$\therefore$ 교점: $(0,0)$, $(-\sqrt{3},3)$, $\left(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{11}}{2}, \frac{7-\sqrt{33}}{2}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{3}+\sqrt{11}}{2}, \frac{7+\sqrt{33}}{2}\right)$

2.

$P(a,a^2)$에 대하여 n의 최댓값이 2가 되어야 한다.

도형 A는 y축 대칭이므로 $a\geq 0$인 a에 대해서만 생각하기로 하자.

방정식 $\begin{cases} y=x^2 \\ (x-a)^2+(y-a^2)^2=r^2 \end{cases}$에서 모든 양수 r에 대해 근의 순서쌍 (x,y)의 개수가 최대 2개면 된다.

정리하면, $(x-a)^2+(x^2-a^2)^2=r^2$

$h(x)=(x-a)^2+(x^2-a^2)^2$ 이라고 두자.

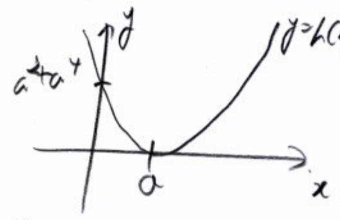
$h(x)=(x-a)^2\{1+(x+a)^2\}$

$h'(x)=2(x-a)(x^2+2ax+a^2+1)+(x-a)^2\cdot 2(x+a)$

$=2(x-a)(2x^2+2ax+1)$

i) $a^2-2\leq 0$ 일때, 모든 실수 x에 대해 $2x^2+2ax+1\geq 0$ 이므로 $x<a$에서 $h'(x)\leq 0$
$x\geq a$에서 $h'(x)\geq 0$ 이다.

$\therefore h(x)$는 $x=a$에서 극솟값을 가지며, 개형은 다음과 같다.



이때, 모든 양수 r에 대해 $h(x)=r^2$의 근의 개수가 2개이다.

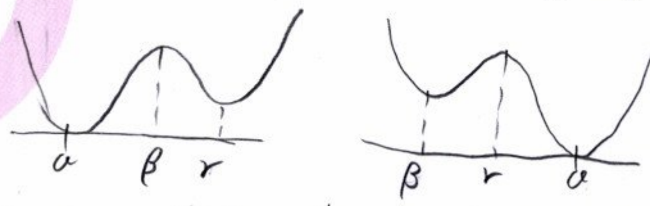
$\therefore a^2-2\leq 0$은 원하는 범위이다.

ii) $a^2-2>0$ 일때, $\underset{F(x)}{2x^2+2ax+1}=0$는 서로다른 두실근을 갖는다.

그 근을 각각 β, γ $(\beta<\gamma)$라고 할때,

$F(a)=4a^2+1>0$ 이므로 $a<\beta<\gamma$ 또는 $\beta<\gamma<a$ 이다.

두 경우의 함수 $h(x)$의 개형을 각각 그리자.



모든 양수 r에 대해 $h(x)=r^2$의 근이 최대 4개 이므로 불가능.

$\therefore 0\leq a\leq\sqrt{2}$ 인데, 도형 A는 y축 대칭 이므로 대칭적으로,

답: $-\sqrt{2}\leq a\leq\sqrt{2}$ 이다.

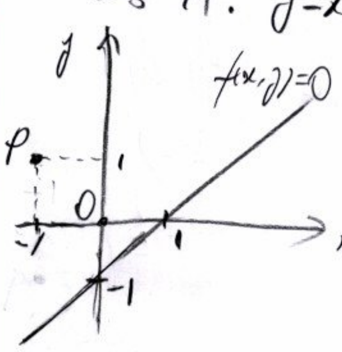
3.

$x^3-3xy-y^3-1=(x-y-1)\{x^2+(y+1)x+y^2-y+1\}=0$

그런데, 방정식 $x^2+(y+1)x+y^2-y+1=0$ 에서 판별식 $D=(y+1)^2-4(y^2-y+1)$
$=-3(y-1)^2\leq 0$

즉, 점 $P(-1,1)$을 나타낸다.

$\therefore$ 도형 A: $y=x-1$ 또는 $P(-1,1)$



이제, 원점 O를 중심으로 하는 반지름 r인 원에 대해 생각하자.

i) $0<r<\frac{1}{\sqrt{2}}$ 이면, $n=0$

ii) $r=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 이면, $n=1$

iii) $\frac{1}{\sqrt{2}}<r<\sqrt{2}$ 이면, $n=2$

iv) $r=\sqrt{2}$ 이면 $n=3$

v) $r>\sqrt{2}$ 이면 $n=2$

$\therefore N_p=3$ 이고, 그때의 $r=\sqrt{2}$ 이다.