

**한양대학교 2017학년도 신입학전형 수시
논술예시답안**

자연계

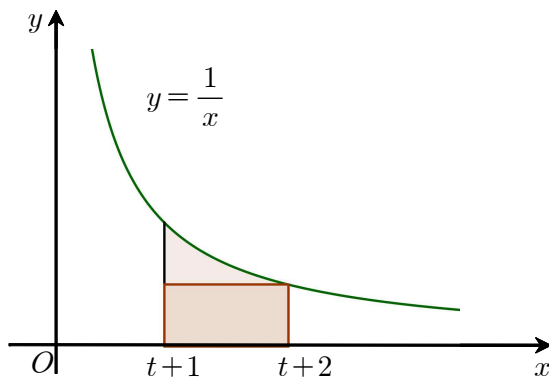
오후(2)-1번

1. 양의 실수 t 에 대하여

$$\frac{1}{t+2} + \ln(t+1) - \ln(t+2) = \int_{t+1}^{t+2} \left(\frac{1}{t+2} - \frac{1}{x} \right) dx$$

이다. 이때 함수 $\frac{1}{t+2} - \frac{1}{x}$ 는 구간 $[t+1, t+2]$ 에서 0보다 작거나 같기 때문에

적분값은 0보다 작다. 즉 $\int_{t+1}^{t+2} \left(\frac{1}{t+2} - \frac{1}{x} \right) dx < 0$ 이다.



2. 함수 $f(x) = \left(\frac{2x+1}{2x+2} \right)^{x+\frac{1}{2}}$ 의 양변에 로그를 취하면,

$$\ln f(x) = \left(x + \frac{1}{2} \right) \{ \ln(2x+1) - \ln(2x+2) \}$$

이다. 양변을 미분하면,

$$\begin{aligned} \frac{f'(x)}{f(x)} &= \left(x + \frac{1}{2} \right) \left\{ \frac{2}{2x+1} - \frac{2}{2x+2} \right\} + \ln(2x+1) - \ln(2x+2) \\ &= \frac{1}{2(x+1)} + \ln(2x+1) - \ln(2x+2) \\ &= \int_{2x+1}^{2x+2} \left(\frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{t} \right) dt \end{aligned}$$

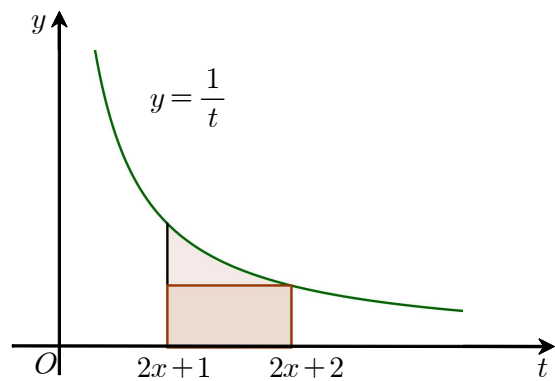
위의 식에서 피적분 함수 $h(t) = \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{t}$ 는

구간 $[2x+1, 2x+2]$ 에서 0보다 작거나 같기 때문에,

$\frac{f'(x)}{f(x)} < 0$ 을 얻는다. 그리고 실수 $x \geq 0$ 에 대하여 $f(x) > 0$ 이므로,

$f'(x) < 0$ 이다. 즉, $f(x)$ 는 감소함수이다.

따라서 $f(x) \leq f(0) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 이므로, 최댓값은 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 이다.



3. $x \geq 0$ 에 대하여 $g(x) = \ln f(x)$ 라 하자. 양변을 x 에 대하여 미분하면,

$$g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{2(x+1)} + \ln(2x+1) - \ln(2x+2) \quad \text{----- ①}$$

이다. 다시 ①의 양변을 미분하면,

$$g''(x) = \frac{f''(x)f(x) - [f'(x)]^2}{[f(x)]^2}$$

이다. 이때, 실수 $x \geq 0$ 에 대하여 $f(x) > 0$ 이므로,

$f''(x)f(x) > [f'(x)]^2$ 이기 위한 필요충분조건은 $g''(x) > 0$ 이다.

$$g''(x) = -\frac{1}{2(x+1)^2} + \frac{1}{x+\frac{1}{2}} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x+\frac{1}{2}} - \frac{1}{x+1} \left(1 + \frac{1}{2(x+1)} \right) > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x + \frac{1}{2}} > \frac{1}{x+1} \left(1 + \frac{1}{2(x+1)} \right)$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 > \left(x + \frac{1}{2}\right) \left(x + \frac{3}{2}\right) \text{ ----- } \textcircled{2}$$

모든 실수 $x \geq 0$ 에 대하여 부등식 ②가 성립하므로,
부등식 $f''(x)f(x) > \{f'(x)\}^2$ 이 성립한다.

**한양대학교 2017학년도 신입학전형 수시
논술예시답안**

자연계

오후(2)-2번

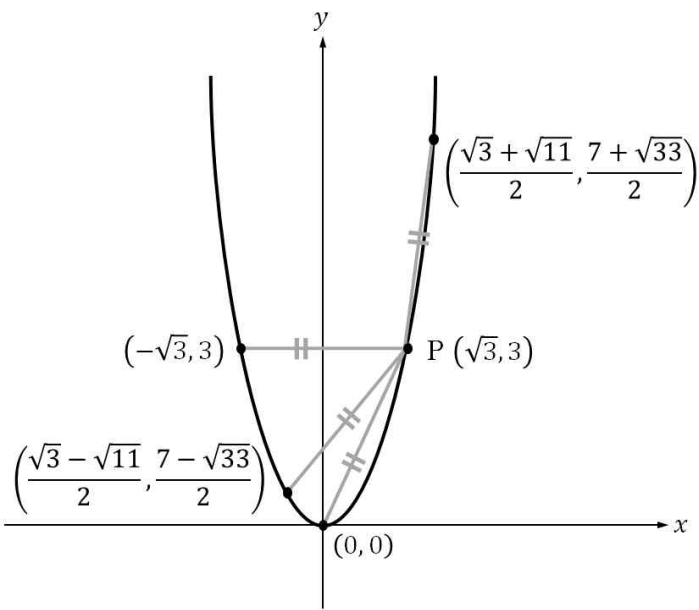
1.

포물선 A 의 한 점을 $Q(x, x^2)$ 이라고 하면 $\overline{PQ} = \sqrt{(x - \sqrt{3})^2 + (x^2 - 3)^2}$ 이다.

$$\overline{PQ} = 2\sqrt{3} \text{ 이면 } (x - \sqrt{3})^2 + (x^2 - 3)^2 = 12 \text{ 이고, 이를 정리하면 } x(x + \sqrt{3}) \left(x - \frac{\sqrt{3} + \sqrt{11}}{2} \right) \left(x - \frac{\sqrt{3} - \sqrt{11}}{2} \right) = 0$$

이므로, $\overline{PQ} = 2\sqrt{3}$ 인 A 의 점 Q 는 모두 4개이고 각각의 좌표는

$$(0, 0), (-\sqrt{3}, 3), \left(\frac{\sqrt{3} + \sqrt{11}}{2}, \frac{7 + \sqrt{33}}{2} \right), \left(\frac{\sqrt{3} - \sqrt{11}}{2}, \frac{7 - \sqrt{33}}{2} \right) \text{ 이다. (아래 그림 참조.)}$$



2.

점 $P(a, a^2)$ 와 포물선 A 의 임의의 점 $Q(x, x^2)$ 와의 거리는 $\sqrt{(x-a)^2 + (x^2 - a^2)^2}$ 이다.

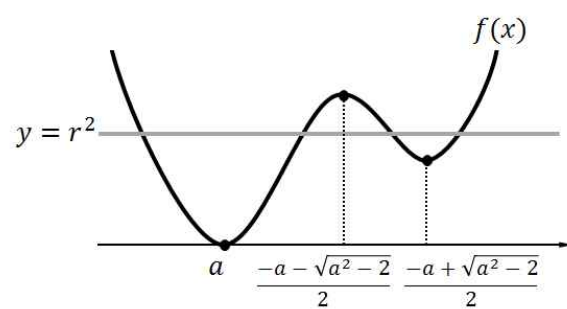
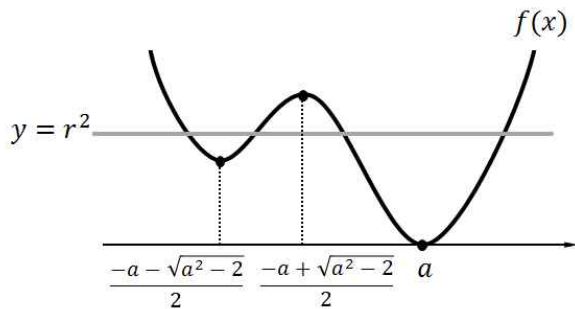
$f(x) = (x-a)^2 + (x^2 - a^2)^2$ 이라 하면, 양의 실수 r 에 대해, 점 P 와 거리 r 인 A 의 점들의 개수는 곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = r^2$ 의 교점의 개수와 일치한다.

곡선 $y = f(x)$ 의 개형을 알아보기 위해 $f'(x) = 0$ 의 실근의 개수를 구해보자.

$$f'(x) = 2(x-a) + 2(x^2 - a^2)2x = 2(x-a)(2x^2 + 2ax + 1) \text{ 이므로, } 2x^2 + 2ax + 1 \text{의 판별식 } D/4 = a^2 - 2 \text{에 대하여}$$

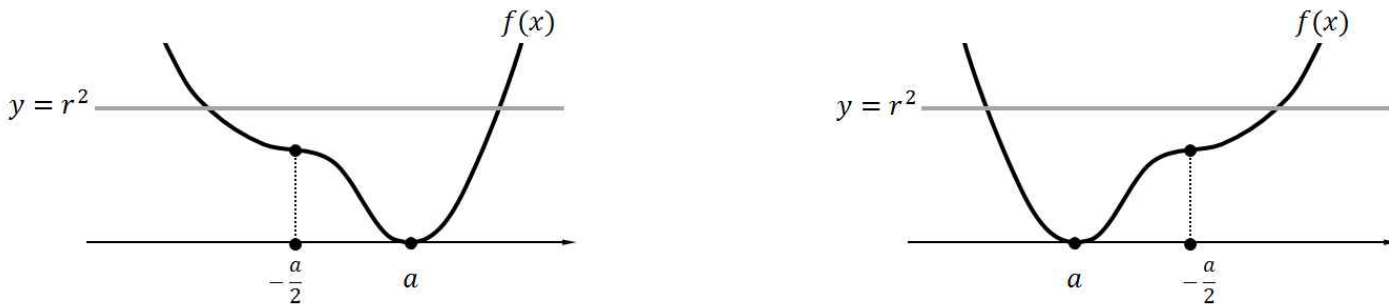
① $D/4 > 0$ (즉, $a < -\sqrt{2}$ 또는 $a > \sqrt{2}$) 이면, $f'(x) = 0$ 의 실근은 $a, \frac{-a - \sqrt{a^2 - 2}}{2}, \frac{-a + \sqrt{a^2 - 2}}{2}$ 이다.

따라서 $f(x)$ 의 그래프는 다음 중 하나이다.



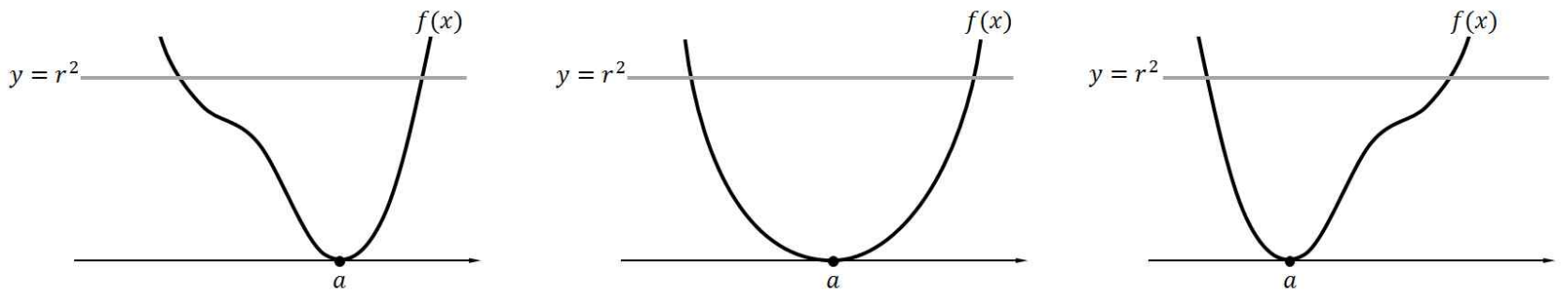
이고, 이 경우 양의 실수 r 에 대해 $y = f(x)$ 와 $y = r^2$ 의 교점은 최대 4개 이므로 $N_p = 4$ 이다.

② $D/4 = 0$ (즉, $a = \pm\sqrt{2}$) 이면, $f'(x)=0$ 의 실근은 $a, -\frac{a}{2}$ 이다. 따라서 $f(x)$ 의 그래프는 다음 중 하나이다



이고 이 경우 양의 실수 r 에 대해 $y = f(x)$ 와 $y = r^2$ 의 교점은 항상 2개 이므로 $N_p = 2$ 이다.

③ $D/4 < 0$ (즉, $-\sqrt{2} < a < \sqrt{2}$)이면, $f'(x)=0$ 의 실근은 a 뿐이다. 따라서 $f(x)$ 의 그래프는 다음 중 하나이다.



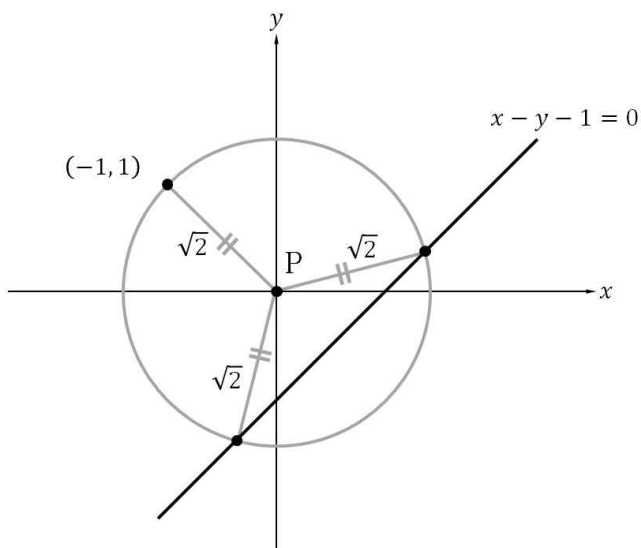
이고 이 경우 역시 양의 실수 r 에 대해 $y = f(x)$ 와 $y = r^2$ 의 교점은 항상 2개 이므로 $N_p = 2$ 이다.

②, ③의 경우에만 $N_p = 2$ 이므로, 구하는 a 값의 범위는 $-\sqrt{2} \leq a \leq \sqrt{2}$ 이다.

3.

$$\begin{aligned} x^3 - 3xy - y^3 - 1 &= x^3 - y^3 - 3xy - 1 = (x-y)^3 + 3xy(x-y) - 3xy - 1 = (x-y)^3 - 1 + 3xy(x-y-1) \\ &= (x-y-1)((x-y)^2 + (x-y) + 1) + 3xy(x-y-1) = (x-y-1)(x^2 - 2xy + y^2 + x - y + 1 + 3xy) \\ &= \frac{1}{2}(x-y-1)(x^2 + 2xy + y^2 + x^2 + 2x + 1 + y^2 - 2y + 1) = \frac{1}{2}(x-y-1)((x+y)^2 + (x+1)^2 + (y-1)^2) \end{aligned}$$

이므로 집합 A 는 직선 $x-y-1=0$ 과 한 점 $(-1,1)$ 로 이루어져 있다.



위 그림으로부터 점 P 에 대한 집합 A 의 N_p 는 3이고 이때 반지름 r 은 $\sqrt{2}$ 이다.

한양대학교 2017학년도 신입학전형 수시 논술고사

자연계

출제 의도 및 평가 지침

오후(2)-1번

1. 출제 의도 및 문제 해설

고등학교 수학과 교육과정을 정상적으로 이수한 학생은 누구나 해결할 수 있는 문제를 고등학교 교과과정의 범위에서 출제하였다. 특히, 수학의 개념, 원리, 법칙을 정확히 이해하고 수학적 사고력을 바탕으로 논리적으로 문제를 해결할 수 있는 능력을 측정하는데 주안점을 두고 출제를 하였다. 개념과 원리의 이해와 수리적 사고력은 사회 구성원들이 민주 사회를 구현하기 위한 토대가 될 뿐 만 아니라 국가 경쟁력을 갖추는데 필수적인 요소라 할 수 있다.

자연계 오후2의 문제 1번은 지수함수의 도함수를 구하기 위하여 로그함수를 취하고 미분하는 방법과 이를 통해 함수의 증감을 판정할 수 있는 능력을 측정하는 문제이다. 이 문제는 미적분 II의 지수함수, 로그함수 및 미분법의 이해 및 활용능력을 측정하는 문제로서, 로그함수와 미분법을 활용하여 문제를 해결할 수 있는 능력을 측정하고자 하였다. 이 문제를 통해 지수함수와 로그함수의 활용과 미분법에의 응용을 통해 주어진 부등식의 성립여부를 판별하는 능력을 평가할 수 있다.

세부적으로는 주어진 부등식을 증명하기 위해 식을 적분의 형태로 표현하거나 평균값 정리를 적용할 수 있는지 묻는 문항과 지수 함수의 최댓값을 구하기 위하여 로그함수의 이해를 바탕으로 함수의 증감여부를 판정하는 문항과 2계 도함수의 활용능력을 측정하는 문항으로 이루어져 있다. 이는 지수함수의 미분법의 이해를 통해 주어진 문제를 해결하는 논리적 사고능력과 응용문제에 적용하는 능력을 측정할 수 있다.

2. 종합 평가 기준

문항	배점	세부 평가 기준	세부 배점
1	20	부등식 $\frac{1}{t+2} + \ln(t+1) - \ln(t+2) < 0$ 을 보이기 위하여 적분으로 바꾸거나 평균값 정리를 활용할 수 있는가?	20
2	40	함수 $f(x)$ 의 증감을 알아보기 위해 로그함수를 취한 후 미분을 올바르게 했는가?	20
		$f(x)$ 의 최댓값을 구했는가?	20
3	40	$\ln f(x)$ 의 2계 도함수를 올바르게 구했는가?	20
		$f''(x)f(x) > [f(x)]^2$ 이 실수 $x \geq 0$ 에서 성립함을 보였는가?	20

한양대학교 2017학년도 신입학전형 수시 논술고사

자연계

출제 의도 및 평가 지침

오후(2)-2번

1. 출제 의도 및 문제 해설

자연계열 오후(2)-2번 문제는 고교수학과정 중 “기하와 벡터-평면곡선-이차곡선” 단원의 포물선의 방정식과, “미적분II-미분법-도함수의 활용” 단원의 함수의 그래프를 주요 내용으로 하고 있다. 미분법 등의 중요한 도구들을 적절히 활용해서 좌표평면에 있는 포물선 등의 도형들이 갖고 있는 성질들을 분석, 규명하고, 정확한 논증을 통해 원하는 결과를 도출할 수 있는지를 묻고 있다. 다음 3개의 소문항으로 구성되어 있다.

문항 1. 좌표평면에서 한 점과 일정 거리에 있는 포물선에 속한 점을 구하기.

문항 2. 포물선 위의 한 점이 같은 거리에 있는 점들을 오직 2개 갖게 될 조건을 구하기.

문항 3. 방정식으로 주어진 도형 위의 점들 중 주어진 한 점과 같은 거리에 있는 점들의 최대 개수를 구하기.

2. 종합 평가 기준

문항	배점	세부 평가 기준	세부 배점
1	20	좌표평면에서 주어진 조건을 만족하는 두 점사이의 거리에 대한 식을 정확히 세웠는가?	10
		점 $(\sqrt{3}, 3)$ 과 거리가 $2\sqrt{3}$ 인 포물선 위의 점들을 모두 구했는가?	10
2	40	점 $P(a, a^2)$ 과 포물선 위의 임의의 점 $Q(x, x^2)$ 사이의 거리에 대한 식 $\sqrt{f(x)}$ 를 구했는가?	10
		함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 개형을 a 의 범위에 따라 정확히 분석했는가?	10
		함수 $y = f(x)$ 의 그래프를 통해 조건을 만족시키는 a 값의 범위를 구했는가?	20
2	40	주어진 방정식이 나타내는 도형이 직선 $x - y - 1 = 0$ 을 포함하고 있음을 보였는가?	10
		주어진 방정식이 나타내는 도형의 개형을 분석하고, 원점 P에 대한 N_P 와 이때 반지름의 길이를 구했는가?	30

3. 출제 근거

이 문제는 고등학교에서 고교과정의 수학을 정상적으로 이수한 학생들은 충분히 해결할 수 있는 문제들로 구성되었으며, 교과서 기하와 벡터와 미적분II의 주요내용과 다루고 있다. 3개의 소문항은 교과서의 내용과 다음과 같이 연계되며, 모든 교과서에서 공통으로 다루는 내용만으로 구성되어 있다.

교과서 기하와 벡터 (좋은책신사고 황선욱 외 10인) - 평면곡선 - 이차곡선 - 포물선 p. 12-15

교과서 미적분II (지학사 신항균 외 11인) - 미분법 - 도함수의 활용 - 함수의 그래프 p. 130-137

교과서 기하와 벡터 (좋은책신사고 황선욱 외 10인) - 평면벡터 - 평면벡터의 성분과 내적 - 직선과 원의 방정식 p. 81-86