한양대학교

답안지 (자연계)

답안지 바코드

308968

지원학과	
성 명	
수험번호	
생년월일 (예:980301)	

수험생 유의사항

1. 답안지는 검정색 펜(볼펜, 연필, 샤프)으로 작성하십시오. (빨강색이나 파랑색 사용금지)
2. 답안지를 수정할 경우 지우개(연필, 샤프 사용 시)를 사용하거나 두 줄을 긋고(볼펜 사용 시) 그 위에 재 작성하십시오.
3. 답안과 관련 없는 표현이나 표시를 한 답안지는 "0"점 처리 됩니다.
4. 본 고사는 답안지 1장 이내에 답안을 작성하여야 합니다. 답안지 교체는 가능하지만 기존 답안지 제출은 불가합니다.

문제 1번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

1.

<가>식에 $x=8$, $y=8$을 대입하면 다음과 같다.

$$g(0) = (g(8))^2 + (f(8))^2$$
$$= 1$$

그리고 $x=0$, $y=0$을 대입하면 다음과 같다

$$g(0) = (g(0))^2 + (f(0))^2$$
$$1 = 1 + (f(0))^2$$
$$\therefore f(0) = 0$$

그러므로 $f(0)=0$, $g(0)=0$ 이다.

2.

<가>에 의해

$g(0-x) = g(-x) = g(x)$ 이고

$g(x-8) = f(x)$ 이다.

따라서 $g(-y) = f(-y+8)$ 이다.

그리고 $g(x+y-8) = g(x+y)g(8) + f(x+y)f(8)$
$= f(x+y)$

이때

$$g(x+y-8) = g(x)g(-y+8) + f(x)f(-y+8)$$
$$= g(x)g(y-8) + f(x)g(-y) \quad (\because f(-y+8) = g(-y))$$
$$= g(x)f(y) + f(x)g(y)$$

$$\therefore f(x+y) = f(x)g(y) + g(x)f(y)$$

3.

$$g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{g(x)g(-h) + f(x)f(-h) - g(x)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{g(x)(g(h)-1)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{f(x)f(-h)}{h} \quad (\because g(x) = g(-x))$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{g(x)(g(h)-g(0))}{h} - \lim_{-h\to 0} \frac{f(x)(f(-h)-f(0))}{-h} \quad (\because f(0)=0)$$
$$= g(x)g'(0) - f(x)f'(0)$$
$$= -\frac{\pi}{16} f(x)$$

$$\therefore \int_0^8 f(x)(g(x))^2 e^{g(x)+1}\,dx$$

에서 $g(x) = t$ 라고 하면 $g'(x) = -\frac{\pi}{16}f(x) = \frac{dt}{dx}$ 이므로

$$\int_0^8 f(x)(g(x))^2 e^{g(x)+1}\,dx$$
$$= \int_1^0 t^2 e^{t+1}\left(-\frac{16}{\pi}\right) dt$$
$$= \frac{16}{\pi}\int_0^1 t^2 e^{t+1}\,dt$$
$$= \frac{16}{\pi}\left(\left[t^2e^{t+1}\right]_0^1 - \int_0^1 2te^{t+1}\,dt\right)$$
$$= \frac{16}{\pi}\left(e^2 - \left[2te^{t+1}\right]_0^1 + \int_0^1 2e^{t+1}\,dt\right)$$
$$= \frac{16}{\pi}\left(e^2 - 2e^2 + \left[2e^{t+1}\right]_0^1\right)$$
$$= \frac{16}{\pi}\left(-e^2 + 2e^2 - 2e\right)$$
$$= \frac{16}{\pi}\left(e^2 - 2e\right)$$

한양대학교

답안지 (자연계)

답안지 바코드
310148

지원학과	
성 명	
수험번호	
생년월일 (예:980301)	

문제 1번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

1. 〈가〉에 $x=8$, $y=0$ 을 대입하면

$g(8) = g(8)g(0) + f(8)f(0)$

$0 = 0 \times g(x) + 1 \times f(0)$ 이므로

$f(0) = 0$

〈가〉에 $x = y = 8$ 을 대입하면

$g(8-8) = g(8)g(8) + f(8)f(8)$

$g(0) = 0^2 + 1^2$

$= 1$

따라서 $f(0)=0$, $g(0)=1$ 이다.

2. 〈가〉식에 $x=y$를 대입하면 $g(0)=1$ 이므로

$1 = \{g(x)\}^2 + \{f(x)\}^2$

〈가〉식에 $x=0$ 을 대입하면

$g(-y) = g(y)$

〈가〉식에 $x=8$ 을 대입하면

$g(8-x) = f(y) = g(y-8)$

$\Rightarrow f(x+y) = g(x+y-8)$

$= g(x-(8-y))$

$= g(x)g(8-y) + f(x)f(8-y)$

$= g(x)f(y) + f(x)g(y)$ $\quad (\because f(8-y) = g(y))$

3. 〈가〉식에 $y=-h$를 대입하고 변형하자

$g(x+h) - g(x) = g(x)g(-h) + f(x)f(-h) - g(x)$, h를 나누고

$h \to 0$ 으로 보내자

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{g(h)-g(0)}{h} \times g(x) - \lim_{h\to 0} \frac{f(-h)-0}{-h} \times f(x)$$

$$g'(x) = g'(0)g(x) - f'(0)f(x)$$

$$= -\frac{\pi}{16} f(x)$$

$$\int_0^8 f(x)\{g(x)\}^2 e^{g(x)+1}\,dx$$

$$= \int_2^1 \frac{16}{-\pi}(t-1)^2 e^t\,dt$$

$$= \frac{16}{\pi}\int_1^2 (t-1)^2 e^t$$

$$= \frac{16}{\pi}\int_0^1 t^2 e^{t+1}\,dt$$

$$= \frac{16}{\pi}(e^2 - 2e) \quad (\because ※)$$

$\left(\begin{array}{l} 1+g(x)=t \text{ 로 치환} \\ g'(x)dx = dt \\ \quad = -\frac{\pi}{16} f(x)dx \end{array} \right)$

$$※ \int_0^1 t^2 e^{t+1}\,dt = \left[t^2 e^{t+1}\right]_0^1 - \int_0^1 2t e^{t+1}\,dt$$

$$= e^2 - \left[2te^{t+1}\right]_0^1 + \int_0^1 2e^{t+1}\,dt$$

$$= e^2 - 2e^2 + \left[2e^{t+1}\right]_0^1$$

$$= e^2 - 2e$$

한양대학교

답안지 (자연계)

답안지 바코드
310260

지원학과	
성 명	
수험번호	
생년월일 (예:980301)	

수 험 생 유 의 사 항
1. 답안지는 검정색 펜(볼펜, 연필, 샤프)으로 작성하십시오. (빨강색이나 파랑색 사용금지)
2. 답안지를 수정할 경우 지우개(연필, 샤프 사용 시)를 사용하거나 두 줄을 긋고(볼펜 사용 시) 그 위에 재 작성하십시오.
3. 답안과 관련 없는 표현이나 표시를 한 답안지는 "0"점 처리 됩니다.
4. 본 고사는 답안지 1장 이내에 답안을 작성하여야 합니다. 답안지 교체는 가능하지만 기존 답안지 제출은 불가합니다.

문제 1번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

1. $g(x-y) = g(x)g(y) + f(x)f(y)$ ← $x=8, y=8$ 대입

$g(0) = g(8)g(8) + f(8)\times f(8)$ ← $g(8)=0, f(8)=1$

$= 0\times 0 + 1\times 1 = 1$

$x=0$, $y=0$ 대입

$\boxed{\therefore g(0) = 1}$

$g(0) = g(0)\times g(0) + f(0)\times f(0)$

$\therefore \{f(0)\}^2 = 1-1 = 0$

$\therefore f(0) = 0$

2. $g(x-y) = g(x)g(y) + f(x)f(y)$ — $y=8$ 일 때

$g(x-8) = g(x)\times g(8) + f(x)\times f(8) = f(x)$

$x=8$일 때 $g(8-y) = g(8)g(y) + f(8)f(y) = f(y)$

$g(x-8) = f(x)$, $g(-y+8) = f(y)$, $f(-y+8) = g(8-(-y+8)) = g(y)$

$x=a$, $y=-b+8$

$g(a+b-8) = g(a)g(-b+8) + f(a)f(-b+8)$

$f(a+b) = g(a)f(b) + f(a)g(b)$

$\therefore f(x+y) = f(x)g(y) + g(x)f(y)$

3. $g(x-y) = g(x)g(y) + f(x)f(y)$

$g(x-y) - g(x) = g(x)\{g(y)-1\} + f(x)f(y)$

$\lim_{y\to 0} \frac{g(x-y)-g(x)}{-y} = \lim_{y\to 0} \frac{g(x)\{g(y)-1\} + f(x)f(y)}{-y}$

$g'(x) = -g(x)\lim_{y\to 0}\frac{g(y)-g(0)}{y} - f(x)\lim_{y\to 0}\frac{f(y)-f(0)}{y}$

$= -g(x)\times g'(0) - f(x)\times f'(0)$

$= -\frac{\pi}{16} f(x)$

$\therefore f(x) = -\frac{16}{\pi} g'(x)$

$\int_0^8 f(x)\{g(x)\}^2 e^{g(x)+1}dx$

$g(x) = t$ 라 할 때, $g'(x) = \frac{dt}{dx}$

$= \int_0^8 -\frac{16}{\pi} g'(x)\{g(x)\}^2 e^{g(x)+1}dx$

$= \int_1^0 -\frac{16}{\pi}\times t^2 e^{t+1} dt$

$= \frac{16}{\pi}\int_0^1 t^2 e^{t+1} dt$

$= \frac{16}{\pi}\left[t^2 e^{t+1}\right]_0^1 - \frac{16}{\pi}\int_0^1 2te^{t+1} dt$

$= \frac{16}{\pi}(e^2-0) - \frac{16}{\pi}\left[2te^{t+1}\right]_0^1 + \frac{16}{\pi}\int_0^1 2e^{t+1} dt$

$= \frac{16}{\pi}e^2 - \frac{16}{\pi}(2e^2-0) + \frac{16}{\pi}\left[2e^{t+1}\right]_0^1$

$= -\frac{16}{\pi}e^2 + \frac{16}{\pi}\times(2e^2-2e)$

$= \boxed{\frac{16}{\pi}e^2 - \frac{32}{\pi}e}$

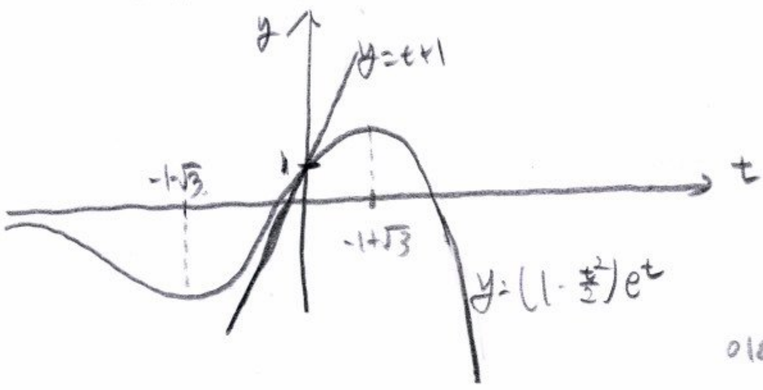
문제 2번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

1. $f(t) = (1-\frac{t^2}{2})e^t$

$f'(t) = -\frac{1}{2}(t^2+2t-2)e^t$

$f''(t) = -\frac{1}{2}(t^2+4t)e^t$

$f(t)$ 는 $t=-1-\sqrt{3}$ 에서 극소, $t=-1+\sqrt{3}$ 에서 극대를 가지는 함수로 그 개형은



이다.

또한 $t=0, -4$ 에서 변곡점을 가지고 $t=0$에서의 접선이 $y=t+1$ 임을 알수있다.

따라서 $t+1$ 과 $(1-\frac{t^2}{2})e^t$ 의 대소는 $t=0$을 경계로 바뀐다는 것을 알수 있고

$t>0$ 일때 $t+1 > (1-\frac{t^2}{2})e^t$ 임을 알수있다.

2. $P_{2n-1}(x) = 1+x+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$ 에서 $P_{2n-1}(x)$는 $2n$개의 항을 가지며 각각의 항을 a_t ($0<t\le 2n$ 인 정수) 이라고 해보자.

만약 $x<0$ 이라면 a_t들중에서 짝수번째 항 즉 a_{2k} ($1\le k\le n$ 인 정수) 들은 모두 음수가 될것이다.

또한 $|a_{2k-1}| < |a_{2k}|$ 이면 이들의 합인 $P_{2n-1}(x)$ 또한 음수가 될것이다.

$$a_{2k-1} = \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}$$

$$a_{2k} = \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

$$\left|\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}\right| > \left|\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}\right|$$ 이 되려면

$|x| > n$이 되어야 하고 이때 $x<0$ 이면 $P_{2n-1}(x)$ 가 음수가 된다.

따라서 $P_{2n-1}(-2n)$ 에서 $|-2n|>n$, $-2n<0$ 이므로 $P_{2n-1}(-2n) < 0$ 이다.

$P_{2n-1}(0) = 1$ 이기 때문에

$\therefore P_{2n-1}(-2n) < P_{2n-1}(0)$

3. $(P_{2n}(x))' = P_{2n-1}(x)$ 이다.

위에서 증명한 대로 $P_{2n-1}(x)$ 에서

$x<-n$ 에선 $P_{2n-1}(x) < 0$

$x>-n$ 에선 $P_{2n-1}(x) > 0$ 이 된다.

따라서 $P_{2n}(x)$는 $x=-n$ 에서 극솟값을 가짐을 알 수 있다.

이때, $P_{2n}(-n) = P_{2n-1}(-n) + \frac{(-n)^{2n}}{(2n)!}$

$= \frac{(-n)^{2n}}{(2n)!}$, $\frac{(-n)^{2n}}{(2n)!} > 0$

따라서 $P_{2n}(x)$ 의 극솟값이 0 보다 크므로 $P_{2n}(x)$는 실근이 존재하지 않는다.

문제 2번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

2-1) $f(t) = e^t(1-\frac{t^2}{2}) - t - 1$ 이라고 하고, $f'(t) = \underbrace{e^t(1-\frac{t^2}{2}-t)}_{g(t)} - 1$

이고, $g'(t) = e^t(1-\frac{t^2}{2}-t-t-1) = e^t(-\frac{t^2}{2}-2t)$ 이므로

$g(t)$는 $t=-4$에서 극소, $t=0$에서 극대 인데 $g(0)=0$ 이고 $t>0$ 에서

$g(t)$가 감소하므로, $f'(t)$는 $t>0$ 에서는 음수이다.

한편 $f(0) = 0$ 이므로 $t>0$에서 $f(t)$는 항상 음수이다.

∴ 답는 모든 양의 실수.

2-2) $P_{2n-1}(x) = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$ 이므로

$P(0)=1$ 이다.

$P_{2n-1}(-2n) = 1-2n+\frac{(-2n)^2}{2!}+\cdots+\frac{(-2n)^{2n-1}}{(2n-1)!}$

모든 자연수 n에 대하여 $I_n = \frac{(-2n)^{2n-2}}{(2n-2)!}+\frac{(-2n)^{2n-1}}{(2n-1)!} = \frac{(-2n)^{2n-2}}{(2n-2)!}\left(1-\frac{2n}{2n-1}\right)$

<0 이고, $P_{2n-1}(-2n) = 1-2n+\sum_{n=1}^{n} I_n < 1-2n < 1 = P(0)$

이므로 $P_{2n-1}(-2n) < P_{2n-1}(0)$ 이다.

2-3) $P_{2n}(x) = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ 이므로, $P_{2n}'(x) = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = P_{2n-1}(x)$ 이다. 또한 $P_n'(x) = P_{n-1}(x)$ 임을 안다.

$n=1$ 일 때 $P_2(x) = \frac{x^2}{2}+x+1 \geq \frac{1}{2}$ 이므로 $P_3(x)$는 증가 함수이다.

한편, $P_{2n-1}(0) > 0 > P_{2n-1}(-2n)$ by 2-2) 에서 중간값 정리에 의해

$P_{2n-1}(x) = 0$은 구간 $(-2n, 0)$ 에서 적어도 하나의 실근을 갖는다 ... ※

이제 $n=k$일 때 가정하면 $P_{2k}(x) = 0$의 실근이 없다.

따라서 $P_{2k+1}(x)$는 증가하기만 하는 다항식이며, 따라서 ※에 의하여

$P_{2k+1}(x) = 0$은 구간 $(-2k-2, 0)$ 에서 "단 하나의" 실근을 갖는다.

이 실근을 $C_{k+1} \in (-2k-2, 0)$ 으로 두면,

$P_{2k+2}(C_{k+1})$가 다항식 $P_{2k+2}(x)$의 최솟값이다.

$0 < P_{2k+2}(C_{k}) < 1$ 이므로, $n=k+1$일 때도 명제는 성립한다.

~~∴ 모든 실수~~ ∴ 실근은 없다.

2-3)

이 줄 위에 답안 작성 시 무효 처리됨

문제 2번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

#1. $(1+t)-(1-\frac{t^2}{2})e^{t}=f(t)$ $\quad f(t)>0$

$f'(t)=1-(-t)e^{t}-(1-\frac{t^2}{2})e^{t}$

$=1-e^{t}(-t+(1-\frac{t^2}{2}))$

$=1-e^{t}(-\frac{t^2}{2}-t+1)$ $\quad t=0$ 일때 $f'(0)=0$

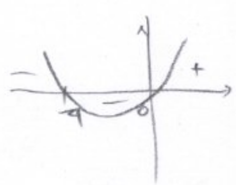
$=1-e^{t}(-\frac{1}{2})(t^2+2t-2)$

$=1+\frac{e^{t}}{2}(t^2+2t-2)$

$f'(t)=0$ 이 되는 t.

$f''(t)=\frac{e^{t}}{2}(t^2+2t-2)+\frac{e^{t}}{2}(2t+2)$

$=\frac{e^{t}}{2}(t^2+4t)$



$f'(t)$는 $t>0$ 에서 증가함.

$f(0)=1-1=0$ 이므로 $f(t)$는 $t>0$ 에서 모두 $f(t)>0$ 임

$\therefore t>0$ //

#2. $P_{2n-1}(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$

$P_{2n-1}(0)=1$

$n=1$ 이라면. $P_1(0)=1$ $\quad P_1(-2)=1-2=-1$

$P_1(0)>P_1(-2)$

$n=k$ 일때 $P_{2k-1}(0)>P_{2k-1}(-2n)$ 이라고 가정하면

$n=k+1$ 일때 $P_{2k+1}(0)>P_{2k-1}(-2n)+\underbrace{\frac{(-2n)^{2k}}{(2k)!}+\frac{(-2n)^{2k+1}}{(2k+1)!}}$

$\frac{(2k+1)!(-2n)^{2k}+(2k)!(-2n)^{2k+1}}{(2k)!(2k+1)!}=\frac{(-2n)^{2k}(2k)!(2k+1-2n)}{(2k)!(2k+1)!}$

$=\frac{(-2(k+1))^{2k}(2k)!(-1)}{(2k)!(2k+1)!}$ $(\because n=k+1)<0$ $\quad \therefore P_{2n-1}(0)>P_{2n-1}(-2n)$ //

#3.

$P_{2n}(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}$

$P_{2n}'(x)=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1}$

i) $x>0$ 일때

$P_{2n}'(x)$는 $x>0$인 모든 x에 대하여

$P_{2n}'(x)>0$

$x>0$ 일때 $P_{2n}(x)$는 증가함수

$P_{2n}(0)=1$

ii) $x<0$ 일때

#2에서 $P_{2n-1}(0)>P_{2n-1}(-2n)$ (n은 자연수)가 참이므로

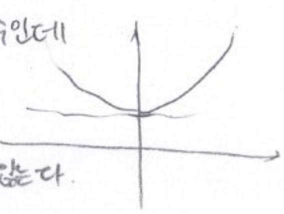
$n=k$ 일때 성립하고 $n=k+1$ 일때 위 식이 성립함

$P_{2n-1}(0)>P_{2n-1}(-2n)$ 이고 $P_{2n+1}(0)>P_{2n-1}(-2n)$

이므로 $P_{2n}(0)>P_{2n}(-2n)$ 이다

$\therefore x<0$ 일때 $P_{2n}(x)$ 는 감소함수이다

$\therefore x<0$ 일때 감소함수, $x>0$일때 증가함수인데



$P_{2n}(0)=1$ 이므로

$\therefore P_{2n}(x)=0$ 의 실근은 존재하지 않는다.

이 줄 아래 답안 작성 시 무효 처리됨