한양대학교 2017학년도 신입학전형 수시		
자 연 계	**논 술 예 시 답 안**	오후(1)-1번

1. (가)에서 $x=y=8$라면 $g(0)=g(8-8)=g(8)^2+f(8)^2=1$.

   한편 $x=y=0$이면 $1=g(0)=g(0)^2+f(0)^2=1+f(0)^2$이므로 $f(0)=0$이다.

2. 먼저 $g(8-x)=g(8)g(x)+f(8)f(x)=f(x)$이고

   $f(8-x)=g(8-(8-x))=g(x)$이므로

$$\begin{aligned} f(x+y)=g(8-(x+y)) &= g((8-x)-y) \\ &= g(8-x)g(y)+f(8-x)f(y) \\ &= f(x)g(y)+g(x)f(y). \end{aligned}$$

3. 먼저 $\dfrac{\pi}{16}=f'(0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)}{h}$ 이고

   $0=g'(0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(h)-g(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(h)-1}{h}$ 이므로 모든 실수 x에 대하여

$$\begin{aligned} g'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{g(x)g(-h)+f(x)f(-h)-g(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{g(x)(g(-h)-1)+f(x)f(-h)}{h}=-g'(0)g(x)-f'(0)f(x)=-\frac{\pi}{16}f(x) \end{aligned}$$

   이다. 즉 함수 $g(x)$는 모든 실수에서 미분가능함수이다.

   한편 $g(x)=t$라 치환하면 $\dfrac{d}{dt}g(x)=g'(x)\dfrac{dx}{dt}=-\dfrac{\pi}{16}f(x)\dfrac{dx}{dt}=1$이고 $g(0)=1, g(8)=0$이므로

$$\int_0^8 f(x)g(x)^2e^{g(x)+1}dx=\frac{16}{\pi}\int_0^1 t^2e^{t+1}dt=\frac{16}{\pi}\left[(t^2-2t+2)e^{t+1}\right]_0^1=\frac{16}{\pi}(e^2-2e).$$

   위의 식에서 두 번째 등호는 다음 부정적분으로 알 수 있다.

$$\int t^2e^{t+1}dt=t^2e^{t+1}-2\int te^{t+1}dt=t^2e^{t+1}-2\left(te^{t+1}-\int e^{t+1}dt\right)=(t^2-2t+2)e^{t+1}.$$

한양대학교 2017학년도 신입학전형 수시

자 연 계	**논 술 예 시 답 안**	오후(1)-2번

1. 양의 실수 t에 대하여 $f(t)=(1+t)-\left(1-\dfrac{t^2}{2}\right)e^t$이라 하자. 양변을 t에 대하여 미분하면,

$f'(t)=1-(-t+1-\dfrac{t^2}{2})e^t > 1-(1-t)e^t = g(t)$를 얻는다.

임의의 양의 실수 t에 대하여 $g'(t)=e^t-(1-t)e^t=te^t > 0$,

$\Rightarrow$ $g(t)$는 증가함수이고, $g(0)=1-(1-0)e^0=0$이다.

$\Rightarrow$ 임의의 양의 실수 t에 대하여 $g(t)>g(0)=0$

$\Rightarrow$ $f'(t)>g(t)=1-(1-t)e^t>g(0)=0$

$\Rightarrow$ $f(t)$는 증가함수이고, $f(0)=1-(1-0)e^0=0$ 이다.

$\Rightarrow$ 임의의 양의 실수 t에 대하여 $f(t)>0$

그러므로 모든 양의 실수 t에 대하여 $1+t>\left(1-\dfrac{t^2}{2}\right)e^t$이므로, 부등식을 만족하는 t의 범위는 $(0,\infty)$이다.

그러므로 모든 양의 실수 t에 대하여 $1+t>\left(1-\dfrac{t^2}{2}\right)e^t$이므로, 부등식을 만족하는 t의 범위는 $(0,\infty)$이다.

[별해1] $f'(t)=1-(-t+1-\dfrac{t^2}{2})e^t$이고, $f''(t)=(\dfrac{t^2}{2}+2t)e^t>0$이다.

양의 실수범위에서 $f'(t)$는 증가함수이므로, 양의 실수 t에 대하여 $f'(t)>f'(0)=0$이 성립한다.

따라서 양의 실수범위에서 $f(t)$도 역시 증가함수이고, 양의 실수 t에 대하여 $f(t)>f(0)=0$이 성립한다.

$1+t>\left(1-\dfrac{t^2}{2}\right)e^t$이 성립한다.

[별해2] $f(t)=\left(1-\dfrac{t^2}{2}\right)e^t$, $g(t)=1+t$라 하자.

$f'(t)=-\dfrac{1}{2}(t^2+2t-2)e^t$이고, $f'(t)=0 \Leftrightarrow t=-1\pm\sqrt{3}$ 이다.

$f''(t)=-\dfrac{1}{2}(t^2+4t)e^t$ 이고, $f''(t)=0 \Leftrightarrow t=0,-4$이다. (변곡점은 $t=0,4$에서 나타난다.)

$t=0$일 때, $(0,1)$에서의 접선의 방정식은 $y=1+f'(0)t=1+t$이므로,

양의 실수 t에 대하여 $g(t)>f(t)$이 성립한다.

2. 다항식 $p_{2n-1}(x)$에 $x=0$을 대입하면, $p_{2n-1}(0)=1>0$ --------------- ㉠

다항식 $p_{2n-1}(x)$에 $x=-2n$을 대입하여 $p_{2n-1}(-2n)$을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} p_{2n-1}(-2n) &= \sum_{k=0}^{2n-1}\frac{(-2n)^k}{k!} = [1+(-2n)]+\left[\frac{(-2n)^2}{2!}+\frac{(-2n)^3}{3!}\right] \\ &\quad +\cdots+\left[\frac{(-2n)^{2k-2}}{(2k-2)!}+\frac{(-2n)^{2k-1}}{(2k-1)!}\right]+\cdots+\left[\frac{(-2n)^{2n-2}}{(2n-2)!}+\frac{(-2n)^{2n-1}}{(2n-1)!}\right] \\ &= \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{(-2n)^{2k-2}}{(2k-2)!}+\frac{(-2n)^{2k-1}}{(2k-1)!}\right] \end{aligned}$$

임의의 $1\le k\le n$ 에 대하여,

$$\frac{(-2n)^{2k-2}}{(2k-2)!}+\frac{(-2n)^{2k-1}}{(2k-1)!}=\frac{(-2n)^{2k-2}(2k-1-2n)}{(2k-1)!}=\frac{(-2n)^{2k-2}(2k-2n-1)}{(2k-1)!} < 0$$

$\Rightarrow \quad p_{2n-1}(-2n) = \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{(-2n)^{2k-2}}{(2k-2)!} + \frac{(-2n)^{2k-1}}{(2k-1)!}\right] < 0$ ------------ ㉡

$\therefore$ 식 ㉠과 ㉡에 의해, $p_{2n-1}(0) > p_{2n-1}(-2n)$이다.

3. $x \geq 0$인 경우와 $x < 0$인 경우로 나누어 생각하자.

(i) $x \geq 0$인 경우는 $p_{2n}(x) \geq 1 > 0$ 이므로, $p_{2n}(x) = 0$을 만족하는 $x \geq 0$인 실수는 없다.

(ii) $x < 0$인 경우; 모든 자연수 n에 대하여 $p_{2n}(x) > 0$ 임을 보이면 모든 음의 실수 x에서는 $p_{2n}(x) \neq 0$이다.

따라서 (i)과 (ii)에 의해, $p_{2n}(x) = 0$을 만족하는 실수 x는 존재하지 않는다.

(ii)의 경우를 수학적 귀납법을 이용하여 증명하자.

$n = 1$인 경우; $p_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} = (1 + \frac{x}{2})^2 + \frac{x^2}{4} > 0$이다.

$n = k-1$인 경우; $p_{2k-2}(x) > 0$이 성립함을 가정하자.

등식 $p_{2k}{}'(x) = p_{2k-1}(x)$이 성립하고, 문제 (2)번에서 $p_{2k-1}(0) > 0$과 $p_{2k-1}(-2k) < 0$임을 알 수 있다.

$p_{2k-1}(x)$는 연속함수이므로, 중간값 정리에 의해 $p_{2k-1}(t) = 0$인 t가 $-2k$ 과 0 사이에 적어도 하나 존재한다. 즉,

$$0 = p_{2k-1}(t) = \sum_{m=0}^{2k-1}\frac{t^m}{m!} = \sum_{m=0}^{2k-2}\frac{t^m}{m!} + \frac{t^{2k-1}}{(2k-1)!} \text{ --------------- } (*)$$

귀납법 가정에 의해, $0 < p_{2k-2}(x) = p_{2k-1}{}'(x)$이므로 $p_{2k-1}(x)$는 증가함수이다.

따라서 $p_{2k-1}(t) = 0$인 t가 $-2k$ 와 0 사이에 하나만 존재한다. 실수 $t < 0$ 이므로,

$$p_{2k}{}''(t) = p_{2k-1}{}'(t) = p_{2k-2}(t) = \sum_{m=0}^{2k-2}\frac{t^m}{m!} = -\frac{t^{2k-1}}{(2k-1)!} > 0 \quad \text{--------- ㉢}$$

위의 식 ㉢에서 4번째 등식은 식 $(*)$에 의해서 성립한다.

그러므로 다항식 $p_{2k}(x)$는 $x = t$에서 극솟값(최솟값)을 갖고, $t \neq 0$ 이므로,

$$p_{2k}(x) \geq p_{2k}(t) = \sum_{m=0}^{2k}\frac{t^m}{m!} = \sum_{m=0}^{2k-1}\frac{t^m}{m!} + \frac{t^{2k}}{(2k)!} = \frac{t^{2k}}{(2k)!} > 0$$

위의 등식에서 3번째 등식은 식 $(*)$에 의해서 성립한다. 그러므로 $p_{2n}(x)$는 실근을 갖지 않는다.

한양대학교 2017학년도 신입학전형 수시 논술고사

자 연 계	출제 의도 및 평가 지침	오후(1)-1번

1. 출제 의도 및 문제 해설

자연계 오후(1) 문제 1번의 첫 번째 문항은 두 연속함수 $f(x), g(x)$가 만족하는 성질로부터 특정한 실수에서의 함숫값을 구할 수 있는지를, 두 번째 문항은 두 함수가 가지고 있는 대칭성을 파악하여 새로운 성질을 파악할 수 있는지를 묻고 있다. 세 번째 문항은 단순하게 보면 치환적분과 부분적분을 이용하여 정적분을 구하는 문제라 할 수 있다. 다만 정적분을 계산하기 위해서는 정확한 미분의 정의를 바탕으로 주어진 함수의 성질을 이용하여 구체적으로 도함수를 계산해야 하는 문제이다. 주어진 조건들을 활용하여 새로운 성질을 찾아낼 수 있는 논리적 사고력이 있는지, 미분과 적분을 통합적으로 적용할 수 있는지를 파악하고자 하는데 출제의도가 있다.

2. 종합 평가 기준

문항	배점	세부 평가 기준	세부 배점
1	20	제시문 (가),(나)의 성질을 이용하여 $g(0)$을 잘 구했는가?	10
		제시문 (가),(나)의 성질을 이용하여 $f(0)$을 잘 구했는가?	10
2	30	함수 $f(x),g(x)$의 대칭성을 파악하였는가? 즉 $f(8-x)=g(x), g(8-x)=f(x)$를 설명하였는가?	15
		제시문(가)의 $g(x)$의 성질과 $f(x),g(x)$의 대칭성을 이용하여 $f(x+y)=f(x)g(y)+g(x)f(y)$를 논리적으로 설명하였는가?	15
3	50	함수 $g(x)$가 실수 전체에서 미분가능함을 설명하였는가?	25
		정적분을 잘 계산하였는가?	25

한양대학교 2017학년도 신입학전형 수시 논술고사

자 연 계	출제 의도 및 평가 지침	오후(1)-2번

1. 출제 의도 및 문제 해설

고등학교 수학과 교육과정을 정상적으로 이수한 학생은 누구나 해결할 수 있는 문제를 고등학교 교과과정의 범위에서 출제하였다. 특히, 수학의 개념, 원리, 법칙을 정확히 이해하고 수학적 사고력을 바탕으로 논리적으로 문제를 해결할 수 있는 능력을 측정하는데 주안점을 두고 출제를 하였다. 개념과 원리의 이해와 수리적 사고력은 사회 구성원들이 민주 사회를 구현하기 위한 토대가 될 뿐 만 아니라 국가 경쟁력을 갖추는데 필수적인 요소라 할 수 있다.

자연계 오후1의 문제 2번은 다항함수의 도함수를 구하고 이를 활용하여 부등식의 성립여부 및 실근의 존재여부를 판별하는 능력을 측정하는 문제이다. 이 문제는 미적분 II에 해당하고, 고등학교 수학교과에서 중요하게 다루어지는 다항함수의 미분법의 이해 및 활용능력을 측정하는 전형적인 문제이다. 따라서 이 문항을 통해 학생들이 학교교육을 성실한 이수여부와 활용능력을 평가할 수 있다.

세부적으로는 미분법의 올바른 이해와 활용정도를 측정하기 위해 제시한 부등식을 증명할 수 있는지를 묻는 문항과 주어진 다항함수를 수열의 부분합으로 이해하고, 이를 바탕으로 다항함수의 값의 비교를 묻는 문항과 미분법의 활용능력을 측정하는 문항으로 이루어져 있다. 이는 미분법의 이해를 통한 수학적 사고능력과 문제 해결능력을 키우고, 논리적 사고능력과 응용문제에 적용하는 능력을 측정할 수 있다.

2. 종합 평가 기준

문항	배점	세부 평가 기준	세부 배점
1	30	$f(t)=(1+t)-\left(1-\frac{t^2}{2}\right)e^t$의 미분을 구하고, $g(t)=1-(1-t)e^t$와의 크기를 비교했는가?	15
		$g(t)$는 증가함수임을 보이고, $f(t)>0$임을 보였는가?	15
2	30	$p_{2n-1}(0)$의 값을 구했는가?	5
		$p_{2n-1}(-2n)$의 값과 0과의 크기를 비교를 제대로 했는가?	25
3	40	$x \geq 0$인 경우 $p_{2n}(x)=0$을 만족하는 실근이 없음을 보였는가?	5
		$x<0$인 경우 $p_{2n}(x)$의 극값은 $p_{2n-1}(t)=0$인 t에서 가짐을 보였는가?	20
		$x<0$인 경우 $p_{2n}(x)>0$임을 보였는가?	15