한양대학교 2016학년도 신입학전형 수시 논술고사

자 연 계	출제 의도 및 평가 지침	오후(1)-1번

1. 출제 의도 및 문제 해설

고등학교 수학교과 교육의 정상화를 위하여 고등학교 교과과정의 범위에서 출제하였다. 특별히 EBS 수능완성 교재에 있는 문제를 약간 변형하여 출제하였기 때문에, 수능을 대비해서 EBS 수능특강과 EBS 수능완성 교재를 충실히 공부를 한 수험생이면 충분히 풀 수 있는 문제이다. 자연계 오후(1) 문제 1번은 행렬과 일차변환과의 관계, 일차변환에 의한 곡선의 변화를 잘 이해하고 있는지를 평가하고 있으며, 무한등비급수를 잘 이해하고 계산할 수 있는지를 판단하는 종합적인 문제이다.

2. 종합 평가 기준

문항	배점	세부 평가 기준	세부 배점
1	30	일차변환에 의한 곡선의 변화를 이해하는가?	15
		정확하게 이동된 곡선의 방정식을 구했는가?	15
2	30	A_n이 어떤 곡선인지 정확하게 파악하고 그 방정식을 구했는가?	15
		무한급수를 정확하게 계산했는가?	15
3	40	두 일차변환의 합성을 나타내는 행렬을 구할 수 있는가?	10
		B_n이 어떤 곡선인지 정확하게 파악하고 그 방정식을 구했는가?	20
		무한급수를 정확하게 계산했는가?	10

3. 출제 근거

고등학교 수학 I, (주) 고려출판 – 무한등비급수 p. 176

고등학교 기하와 벡터, (주) 교학사 – 일차변환의 합성 p. 24

EBS 수능완성 (2015) – 수학B형 실전편 p.37 문제 13번

한양대학교 2016학년도 신입학전형 수시 논술고사		
자 연 계	**출제 의도 및 평가 지침**	오후(1)-2번

1. 출제 의도 및 문제 해설

본 문제의 첫 번째 문항은 주어진 입체를 회전체로 파악하여 그 부피를 정적분을 활용하여 구할 수 있는지 묻고 있다. 두 번째 문항은 입체의 부피로부터 얻어지는 분수함수의 극한에 관한 것이다. 세 번째 문항은 주어진 확률 변수가 입체의 부피를 결정하는 상황에서 정적분을 활용하여 그 평균을 구할 수 있는지 묻고 있다. 요약하면 정적분과 확률변수의 개념을 주어진 상황에 적용할 수 있는지, 그리고 관련된 정적분 값을 계산할 수 있는지가 본 문제의 출제 의도이다.

2. 종합 평가 기준

문항	배점	세부 평가 기준	세부 배점
1	30	부피를 정적분으로 표현할 수 있는가?	20
		표현된 정적분을 계산할 수 있는가?	10
2	30	입체[가] 또는 [다] 어느 하나의 부피를 유도하였는가?	10
		$\frac{A(\theta)}{B(\theta)}$의 극한을 구하였는가?	20
3	40	평균을 정적분의 수식으로 표현하였는가?	20
		그 정적분을 계산하여 평균을 구하였는가?	20

3. 출제 근거

문항	교과서명	단원명
1	적분과 통계 -(주) 교학사	적분과 통계－적분법－정적분의 활용－도형의 부피
2	수학 II -(주) 금성출판사	함수의 극한과 연속－함수의 극한－극한값의 계산
3	적분과 통계-(주) 교학사	통계－확률분포－평균과 표준편차－연속확률의 평균과 표준편차 적분법－정적분－정적분의 치환적분법과 부분적분법

1.

일차변환 f에 의하여 점 (x,y)가 점 (x',y')으로 옮겨진다고 하면 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 3y \end{pmatrix}$이므로 $x = \frac{x'}{2}, y = \frac{y'}{3}$이다. 이 식을 $(x-1)^2+(y-2)^2=1$에 대입하면 $(\frac{x'}{2}-1)^2+(\frac{y'}{3}-2)^2=1$이 된다. 따라서 곡선 A_1은 타원이고, A_1의 방정식은

$$\frac{(x-2)^2}{2^2}+\frac{(y-6)^2}{3^2}=1$$

이다.

2.

1번에서와 같은 방법을 반복하면 임의의 자연수 n에 대하여 곡선 A_n은 타원이 되고, 그 방정식은

$$\frac{(x-2^n)^2}{(2^n)^2}+\frac{(y-2\cdot 3^n)^2}{(3^n)^2}=1$$

이다. 제시문 <다>에 의해 타원 A_n의 넓이는 $\pi 2^n 3^n = 6^n \pi$ 이다. 따라서

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{S_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{6^n\pi}=\frac{1/6}{1-1/6}=\frac{1}{5}$$

3.

일차변환 $f\circ g$를 나타내는 행렬은 $AB=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$이고, 점 (x,y)가 일차변환 $f\circ g$에 의하여 점 (x',y')으로 옮겨진다고 하면 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2y \\ -3x \end{pmatrix}$이므로 $x=-\frac{y'}{3}, y=\frac{x'}{2}$이다. 이 식을 $(x-1)^2+(y-2)^2=1$에 대입하면 $(-\frac{y'}{3}-1)^2+(\frac{x'}{2}-2)^2=1$이 된다. 따라서 곡선 B_1은 타원이고, B_1의 방정식은

$$\frac{(x-4)^2}{2^2}+\frac{(y+3)^2}{3^2}=1$$

이다. 타원 B_1을 일차변환 $f\circ g$에 의하여 옮긴 곡선 B_2의 방정식은 $\dfrac{(-\frac{y}{3}-4)^2}{2^2}+\dfrac{(\frac{x}{2}+3)^2}{3^2}=1$ 이고, 이를 다시 정리하면

$$\frac{(x+6)^2}{2^2\cdot 3^2}+\frac{(y+12)^2}{2^2\cdot 3^2}=1$$

이 된다. 즉, 곡선 B_2는 반지름의 길이가 6인 원이 된다. 위의 과정을 반복하면 임의의 자연수 m에 대하여 곡선 B_{2m-1}은 타원이 되고 곡선 B_{2m}은 원이 된다. 이 때 B_{2m-1}과 B_{2m}의 방정식은 각각

$$B_{2m-1}:\ \frac{(x-4(-6)^{m-1})^2}{2^2\cdot 6^{2(m-1)}}+\frac{(y+3(-6)^{m-1})^2}{3^2\cdot 6^{2(m-1)}}=1 \quad 과 \quad B_{2m}\ :\ (x-(-6)^m)^2+(y-2(-6)^m)^2=6^{2m}$$

이다. 따라서 타원 B_{2m-1}의 넓이 S_{2m-1}과 원 B_{2m}의 넓이 S_{2m}은 각각

$$S_{2m-1}=\pi(2\cdot 6^{m-1})(3\cdot 6^{m-1})=6^{2m-1}\pi \text{와 } S_{2m}=6^{2m}\pi$$

이다. 결국

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{S_n}=\sum_{m=1}^{\infty}(\frac{\pi}{S_{2m-1}}+\frac{\pi}{S_{2m}})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{6^n\pi}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{6^n}=\frac{1/6}{1-1/6}=\frac{1}{5}$$

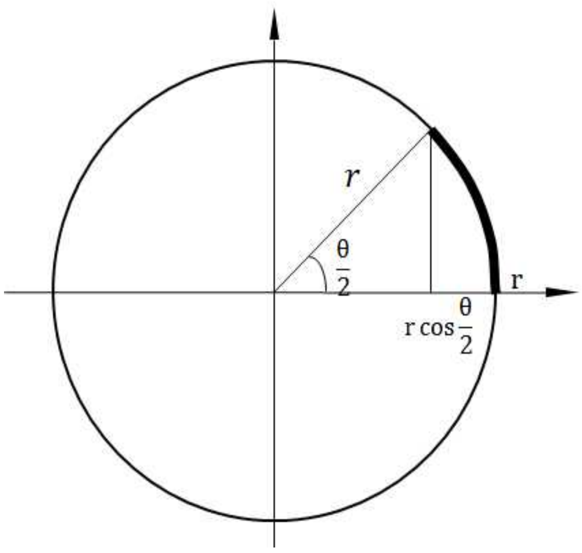
한양대학교 2016학년도 신입학전형 수시

자 연 계

논 술 예 시 답 안

오후(1)-2번

1.



입체 ㉯는 반지름이 r인 원호를 회전하여 얻어지는 입체이므로

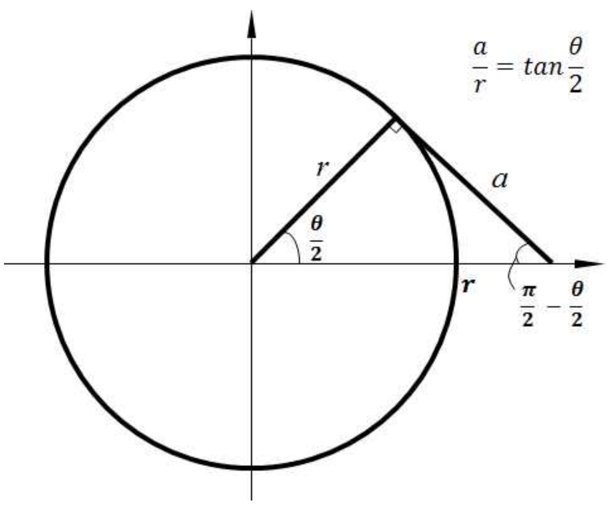
$$A(\theta)=\int_{r\cos\frac{\theta}{2}}^{r}\pi(\sqrt{r^2-x^2})^2dx=\pi\int_{r\cos\frac{\theta}{2}}^{r}(r^2-x^2)dx$$

$$=\pi\left[r^2x-\frac{x^3}{3}\right]_{r\cos\frac{\theta}{2}}^{r}=\pi r^3\left(1-\frac{1}{3}-\cos\frac{\theta}{2}+\frac{1}{3}\cos^3\frac{\theta}{2}\right)$$

$$=\frac{\pi r^3}{3}\left(2-3\cos\frac{\theta}{2}+\cos^3\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\therefore A(\frac{\pi}{3})=\frac{\pi r^3}{3}\left(2-3\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{8}\right)=\frac{\pi r^3}{3}\,\frac{16-12\sqrt{3}+3\sqrt{3}}{8}=\frac{\pi r^3(16-9\sqrt{3})}{24}$$

2.



원뿔 ㉮의 부피를 구하자.

$$\frac{a}{r}=\tan\frac{\theta}{2}$$

원 C의 반지름$=r\sin\frac{\theta}{2}$

원뿔의 높이$=a\cos(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2})=r\tan\frac{\theta}{2}\cos(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2})=r\tan\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}$

$\therefore$ 원뿔의 부피$=\frac{1}{3}\pi r^2\sin^2\frac{\theta}{2}\,r\tan\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}=\frac{\pi}{3}r^3\sin^3\frac{\theta}{2}\tan\frac{\theta}{2}$

$$\therefore B(\theta)=\frac{\pi r^3}{3}\left(\sin^3\frac{\theta}{2}\tan\frac{\theta}{2}-2+3\cos\frac{\theta}{2}-\cos^3\frac{\theta}{2}\right)$$

편의상 $s=\sin\frac{\theta}{2}$, $c=\cos\frac{\theta}{2}$로 쓰자.

$$\lim_{\theta\to+0}\frac{A(\theta)}{B(\theta)}=\lim_{c\to1+0}\frac{2-3c+c^3}{\frac{s^4}{c}-2+3c-c^3}=\lim_{c\to1+0}\frac{2c-3c^2+c^4}{(1-c^2)^2-2c+3c^2-c^4}$$

$$=\lim_{c\to1+0}\frac{2c-3c^2+c^4}{c^2-2c+1}=\lim_{c\to1+0}\frac{c(c-1)^2(c+2)}{(c-1)^2}=3$$

3.

$f(x)=\frac{\sin x}{2}=\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$

$A(X)$의 평균$=\int_0^{\pi} f(x)A(x)dx\ =\frac{\pi r^3}{3}\int_o^{\pi}\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}(2-3\cos\frac{x}{2}+\cos^3\frac{x}{2})dx$

$=\frac{\pi r^3}{3}\int_0^{\pi}(2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-3\sin\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\cos^4\frac{x}{2})dx$

정적분의 첫 번째 항$=\int_0^{\pi}\sin x\,dx=2$

$\cos\frac{x}{2}=t\ \Rightarrow\ -\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}dx=dt \qquad \sin\frac{x}{2}dx=-2dt$

정적분의 나머지 항$=\int_1^0 6t^2-2t^4\,dt=\int_0^1 2t^4-6t^2\,dt=\left[\frac{2}{5}t^5-2t^3\right]_0^1=\frac{2}{5}-2=\frac{-8}{5}$

$\therefore A(X)$의 평균 $=\frac{\pi r^3}{3}(2-\frac{8}{5})=\frac{2}{15}\pi r^3$