한양대학교 2016학년도 신입학전형 수시 논술고사

자 연 계

출제 의도 및 평가 지침

오전-1번

1. 출제 의도 및 문제 해설

고등학교 수학교과를 정상화하기 위하여 고등학교 교육과정을 정상적으로 이수한 학생은 누구나 해결할 수 있는 문제를 고등학교 교과과정의 범위에서 출제하였다. 자연계 오전 문제1번은 일차함수들의 관계를 통해서 삼각함수의 정의 및 의미를 정확히 숙지하고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 성질과 사인법칙과 코사인법칙을 잘 이해하고 있는지 확인할 수 있는 문제이다. 세부적으로 탄젠트 함수의 덧셈정리를 이용하여 주어진 부등식을 이해하고 해를 구할 수 있는지를 묻는 문항, 제한조건과 부등식을 만족하는 정수의 개수와 제한조건하의 전체 정수의 개수의 비율에 대한 수열의 극한값을 구하는 문항과 두 직선들의 교각의 관계를 구하는 문항으로 이루어져 있다. 그러므로 일차함수에 대한 이해와 삼각함수의 덧셈정리의 적용을 통해서 부등식을 만족하는 해를 구할 수 있는지를 평가하는 종합적인 문제이다. 이러한 종합적 사고는 수학적 사고능력의 배양을 통해 여러 가지 문제를 해결하고, 창의적 사고력으로 수학의 개념, 원리, 법칙 등을 자연과학과 공학은 물론 사회과학 등에 활용할 수 있다.

2. 종합 평가 기준

문항	배점	세부 평가 기준	세부 배점
1	40	제한조건하에서 부등식을 만족하는 m의 개수를 구했는가?	20
		수열의 극한값을 정확히 구했는가?	20
2	30	탄젠트 함수의 덧셈정리를 이용하여 ab의 값을 구했는가?	15
		주어진 부등식의 해를 구했는가?	15
3	30	두 직선사이의 교각의 탄젠트 값을 정확히 구했는가?	10
		c를 m으로 정확히 나타내었는가?	20

3. 출제 근거

▶ 교과서:

- ► 수학 I (두산동아, 우정호), 수학 I (천재교육, 최용준)
  - − 세부단원: 수열의 극한
  - − 두산동아: p. 190−195, 천재교육: p. 180−184
- ► 수학 II (교학사, 황석근), 수학 II (금성출판사, 정상권)
  - − 세부단원: 방정식과 부등식 (분수부등식), 삼각함수 (삼각함수의 덧셈정리)
  - − 교학사: p. 28−32, 38−52, 금성출판사: p. 29−36, 43−51

▶ EBS교재:

- ► 수능특강 수학 I B형: 수열의 극한
  - − p. 106−109
- ► 수능특강 수학 II: 부등식, 삼각함수
  - − p. 14−23, 26−34

► 수능완성 수학 B형: 수열의 극한, 부등식, 삼각함수
- p. 46-51, 64-65, 71-77

문항 1: 분수부등식, 삼각함수의 덧셈정리
문항 2: 분수부등식, 삼각함수의 덧셈정리, 수열의 극한
문항 3: 분수부등식, 삼각함수의 덧셈정리

한양대학교 2016학년도 신입학전형 수시 논술고사		
자 연 계	**출제 의도 및 평가 지침**	오전-2번

1. 출제 의도 및 문제 해설

본 문제의 첫 번째 문항과 두 번째 문항은 각각 평면위의 점과 직선을 대상으로 하는 사건에 조합과 확률의 개념을 적용하고 이를 계산할 수 있는지 묻고 있다. 세 번째 문항은 확률변수가 주어졌을 때 이것이 결정하는 원이 사각형과 겹치는 넓이의 평균을 구하는 것으로 연속확률변수의 적용, 그리고 이를 계산하기 위해 필요한 정적분의 활용에 관한 것이다. 요약하면 조합, 확률, 확률변수의 개념을 주어진 상황에 적용할 수 있는가, 이를 위해 정적분을 활용할 수 있는 가를 평가한다. 문제를 해결하기 위해 필요한 기하에 관한 지식은 직선의 기울기, 원의 넓이 뿐이므로 기하에 관련된 학생들의 부담은 없다고 할 수 있다.

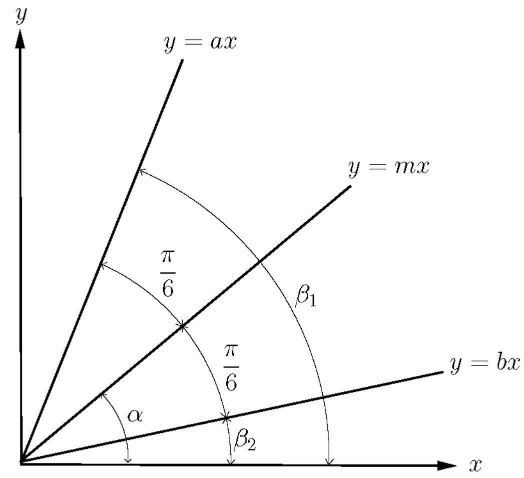
2. 종합 평가 기준

문항	배점	세부 평가 기준	세부 배점
1	30	세 점 이상을 포함하는 직선의 개수를 유도하였는가?	20
		구한 직선의 개수를 이용하여 요구하는 확률을 구하였는가?	10
2	30	Y가 주어진 범위의 값을 가질 확률을 정적분으로 표현하였는가?	20
		구한 정적분을 계산하여 확률을 계산하였는가?	10
3	40	Z의 평균을 정적분으로 표현하였는가?	10
		구한 정적분을 계산하여 평균을 계산하였는가?	30

3. 출제 근거

문항	교과서명	단원명
1	적분과 통계-(주) 교학사	순열과 조합 확률-확률의 뜻과 활용-여사건의 확률
2	적분과 통계-(주) 교학사	통계-확률변수와 확률분포-연속확률변수와 확률밀도함수 적분법-정적분-정적분의 뜻과 성질
3	적분과 통계-(주) 교학사	통계-확률분포-평균과 표준편차-연속확률의 평균과 표준편차 적분법-정적분-정적분의 치환적분법과 부분적분법

자 연 계	한양대학교 2016학년도 신입학전형 수시 **논 술 예 시 답 안**	오전-1번



위의 그림에서 $\tan\alpha = m,\ \tan\beta_1 = a,\ \tan\beta_2 = b$ 이다.
탄젠트 함수의 덧셈공식에 의하여 다음 관계식을 얻는다.

▶ $a = \tan\beta_1 = \tan(\alpha + \frac{\pi}{6}) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\frac{\pi}{6}}{1 - \tan\alpha\tan\frac{\pi}{6}} = \dfrac{m + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - m\frac{1}{\sqrt{3}}} = \dfrac{\sqrt{3}m + 1}{\sqrt{3} - m}$,

▶ $b = \tan\beta_2 = \tan(\alpha - \frac{\pi}{6}) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\frac{\pi}{6}}{1 + \tan\alpha\tan\frac{\pi}{6}} = \dfrac{m - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + m\frac{1}{\sqrt{3}}} = \dfrac{\sqrt{3}m - 1}{\sqrt{3} + m}$

(1) $a + b = \dfrac{\sqrt{3}m+1}{\sqrt{3}-m} + \dfrac{\sqrt{3}m-1}{\sqrt{3}+m} = \dfrac{(\sqrt{3}m+1)(\sqrt{3}+m) + (\sqrt{3}m-1)(\sqrt{3}-m)}{(\sqrt{3}-m)(\sqrt{3}+m)}$

$= \dfrac{3m + \sqrt{3} + \sqrt{3}m^2 + m + 3m - \sqrt{3} - \sqrt{3}m^2 + m}{3 - m^2}$

$= \dfrac{8m}{3 - m^2} \geq 0$

따라서, $m^2 \neq 3$과 $m(m^2 - 3) \leq 0$이고, 이 부등식을 만족시키는 m의 범위를 구하면

$m < -\sqrt{3},\ \ 0 \leq m < \sqrt{3}$ -------------------- ㉠

이다. ㉠과 $|m| \leq N$을 만족시키는 m의 개수 $f(N)$은 $(N-1) + 2 = N + 1$ 이다.

그러므로, 극한값은 $\lim\limits_{N\to\infty}\dfrac{f(N)}{2N+1} = \lim\limits_{N\to\infty}\dfrac{N+1}{2N+1} = \dfrac{1}{2}$이다.

(2) $ab = \dfrac{\sqrt{3}m+1}{\sqrt{3}-m}\cdot\dfrac{\sqrt{3}m-1}{\sqrt{3}+m} = \dfrac{3m^2-1}{3-m^2} \geq k > 0$

① $|m| \geq 2$인 경우

$3m^2 - 1 \leq k(3 - m^2) \Rightarrow (k+3)m^2 - (3k+1) \leq 0$

$\Rightarrow m^2 \leq \dfrac{3k+1}{k+3} = \dfrac{3(k+3)-8}{k+3} = 3 - \dfrac{8}{k+3}$

$\Rightarrow |m| < \sqrt{3}$

$\therefore$ $|m| \geq 2$과 $|m| < \sqrt{3}$을 동시에 만족시키는 정수 m은 없다.

② $|m| \leq 1$인 경우

$3m^2 - 1 \geq k(3 - m^2) \Rightarrow (k+3)m^2 \geq 3k+1$

$\Rightarrow m^2 \geq \dfrac{3k+1}{k+3} = 3 - \dfrac{8}{k+3}$

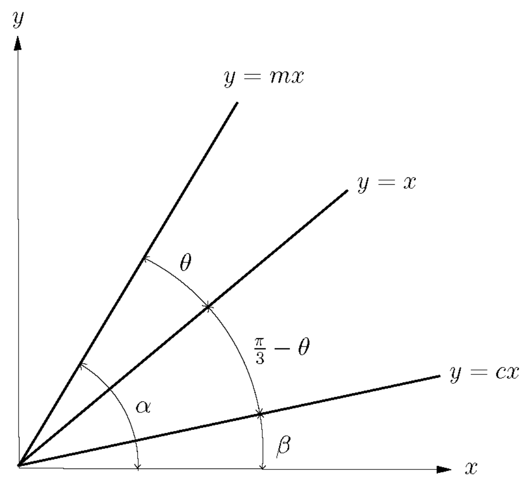
$$\Rightarrow m \le -\sqrt{\frac{3k+1}{k+3}} \text{ 또는 } m \ge \sqrt{\frac{3k+1}{k+3}}$$

▶ $k=1$ 이면, $m \ge 1$ 또는 $m \le -1$ 이다.

$\therefore$ $m=1, -1$ 이다.

▶ $k \ge 2$ 이면, $|m| \le 1$ 과 $m^2 \ge \dfrac{3k+1}{k+3}$ 을 만족시키는 m은 없다.

(3)



$\tan\dfrac{\pi}{3} = \tan(\alpha-\beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta} = \dfrac{m-c}{1+mc} = \sqrt{3}$ 이므로, $m-c = \sqrt{3}(1+mc)$이다.

따라서 $c = \dfrac{m-\sqrt{3}}{\sqrt{3}m+1}$ 이다.

자 연 계	한양대학교 2016학년도 신입학전형 수시 논 술 예 시 답 안	오전-2번

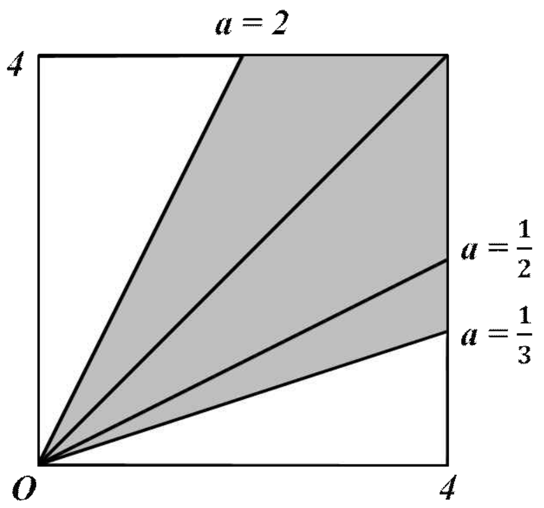
1.

점 5개를 포함하는 직선의 갯수 : 12
점 4개만을 포함하는 직선의 갯수 : 4
점 3개만을 포함하는 직선의 갯수 : 16

$$12\times {}_5C_3 + 4\times {}_4C_3 + 16 = 12\times \frac{5!}{3!\times 2!} + 4\times 4 + 16 = 120 + 16 + 16 = 152$$

확률 $= 1 - \frac{152}{{}_{25}C_3} = 1 - \frac{152}{2300} = \frac{2148}{2300} = \frac{537}{575}$

2.

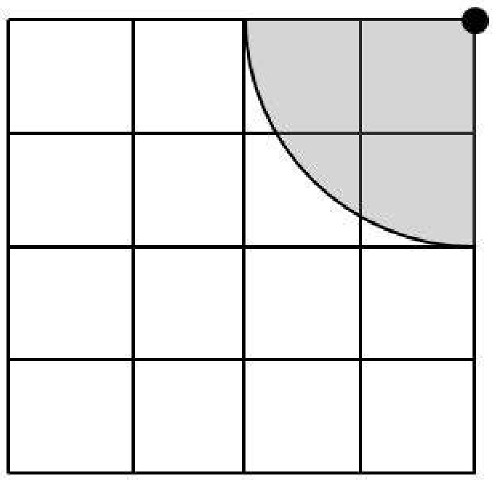


$y=ax$가 영역 R과 겹치는 부분을 살펴보면 그림과 같다.
$0 \le a \le 1$일 때 겹치는 부분의 길이는 $(0,0)$과 $(4,4a)$사이의 거리이다.
$4\sqrt{1+a^2} = \frac{4\sqrt{10}}{3}$이면 $a=\frac{1}{3}$이므로, $Y \ge \frac{4\sqrt{10}}{3}$일 확률은

$$P(Y \ge \frac{4\sqrt{10}}{3}) = \int_{\frac{1}{3}}^{2} \frac{\pi}{4}\sin(\frac{\pi}{2}x)dx = \frac{\pi}{4}\frac{2}{\pi}\left[-\cos(\frac{\pi}{2}x)\right]_{\frac{1}{3}}^{2}$$
$$= \frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$$

[별해] $1-\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{\pi}{4}\sin(\frac{\pi}{2}x)dx$ 를 구하여도 된다.

3.



반지름이 x일때 영역의 넓이 : $\frac{\pi}{4}x^2$

$$E(Z) = \int_0^2 (\frac{\pi}{4}x^2)(\frac{\pi}{4}\sin(\frac{\pi}{2}x))dx = \frac{\pi^2}{16}\underbrace{\int_0^2 x^2 \sin(\frac{\pi}{2}x)dx}_{\bigstar}$$

$\left(x^2\cos(\frac{\pi}{2}x)\right)' = 2x\cos(\frac{\pi}{2}x) - \frac{\pi}{2}x^2\sin(\frac{\pi}{2}x)$ 이므로

$$\bigstar = \frac{2}{\pi}\left(2\int_0^2 x\cos(\frac{\pi}{2}x)dx - \left[x^2\cos(\frac{\pi}{2}x)\right]_0^2\right)$$

$$\left(x\sin(\frac{\pi}{2}x)\right)' = \sin(\frac{\pi}{2}x) + \frac{\pi}{2}x\cos(\frac{\pi}{2}x)$$

$$\int_0^2 x\cos(\frac{\pi}{2}x)dx = \frac{2}{\pi}\left(\left[x\sin(\frac{\pi}{2}x)\right]_0^2 - \int_0^2 \sin(\frac{\pi}{2}x)dx\right)$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{2}{\pi}\cos(\frac{\pi}{2}x)\right]_0^2 = \frac{4}{\pi^2}(-1-1) = -\frac{8}{\pi^2}$$

$$\bigstar = \frac{2}{\pi}\left(2(-\frac{8}{\pi^2}) + 4\right) = \frac{2}{\pi}(4 - \frac{16}{\pi^2})$$

$$\therefore\ E(Z) = \frac{\pi^2}{16}\frac{2}{\pi}(4-\frac{16}{\pi^2}) = \frac{\pi}{8}(4-\frac{16}{\pi^2}) = \frac{\pi}{2}(1-\frac{4}{\pi^2}) = \frac{\pi^2-4}{2\pi}$$