한양대학교 2016학년도 신입학전형 수시

자 연 계

모 의 논 술

수험번호 (　　　　　　　　) 　성명 (　　　　　　　)

1. 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 다항함수 $P(x)=x^2-4$의 그래프 위의 점 $Q_0(3,P(3))$에서 그래프의 접선이 x축과 만나는 점의 x좌표를 a_1이라 하고, 점 $Q_1(a_1,P(a_1))$에서 그래프의 접선이 x축과 만나는 점의 x좌표를 a_2이라 하고, 점 $Q_2(a_2,P(a_2))$에서 그래프의 접선이 x축과 만나는 점의 x좌표를 a_3이라 하자. 이와 같은 방법으로, 자연수 n에 대하여, a_n이 주어졌을 때, 점 $Q_n(a_n,P(a_n))$에서 그래프의 접선이 x축과 만나는 점의 x좌표를 a_{n+1}이라 하자.

(나) 열린구간 (a,b) $(a<b)$의 모든 원소 x에서 $P'(x)>0$이 성립하는 다항함수 $P(x)$에 대하여, 원소 $y,z\in(a,b)$가 $y<z$를 만족하면 $P(y)<P(z)$가 성립한다.

(다) 모든 자연수 n에 대하여, $a_{n+1}<a_n$이 성립하고, 실수 K가 존재하여 모든 자연수 n에 대하여 $a_n>K$이 성립하면 수열 $\{a_n\}$은 수렴한다.

(라) 수렴하는 수열 $\{a_n\}$과 $\{b_n\}$에 대하여

$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n$이 성립하며, $\lim_{n\to\infty}a_n\neq 0$인 경우 $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\frac{\lim_{n\to\infty}b_n}{\lim_{n\to\infty}a_n}$이 성립한다.

(1) a_1을 구하고, 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1}=a_n-\frac{P(a_n)}{P'(a_n)}$이 성립함에 관하여 논하시오.

(2) 수학적 귀납법에 의하여, 모든 자연수 n에 대하여 $a_n>K$이 성립하는 실수 K가 존재함에 관하여 논하고, 모든 자연수 n에 대하여, $a_{n+1}<a_n$이 성립함에 관하여 논하시오.

(3) 열린구간 $(0,3)$에서 $P(x)=0$의 해는 하나만 존재함을 보이고, $\lim_{n\to\infty}a_n=a$라 할 때, 그 해가 a임에 관하여 논하시오.

뒷면에 계속 ☞

2. 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 함수 $f(x)$가 정의역의 임의의 두 수 x_1, x_2에 대하여

① $x_1 < x_2$ 일 때, $f(x_1) < f(x_2)$가 성립하면 $f(x)$는 **증가함수**라고 한다.

② $x_1 < x_2$ 일 때, $f(x_1) > f(x_2)$가 성립하면 $f(x)$는 **감소함수**라고 한다.

(나) 함수 $f(x)$가 열린구간 (a,b)에서 미분가능하고, 그 구간의 모든 x에 대하여

① $f'(x) > 0$ 이면 함수 $f(x)$는 이 구간에서 증가한다.

② $f'(x) < 0$ 이면 함수 $f(x)$는 이 구간에서 감소한다.

(다) 함수 $g:(0,\infty)\to(0,\infty)$는 증가함수이고, 다음 성질을 만족한다고 하자.

① $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$.

② $\frac{g(x)}{x}$는 구간 $(0,\infty)$에서 감소함수이고, $\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{x} = 0$.

(1) 열린구간 $(0,\infty)$에서 정의된 함수 $h(x) = (1+\frac{1}{x})^x$는 증가함수임을 보이시오.

(2) 제시문 (다)를 만족하는 함수 $g(x)$는 다음 부등식을 만족함을 보이시오.

임의의 실수 $s, t \in (0,\infty)$에 대하여, $g(s+t) \le g(s)+g(t)$이 성립한다.

(3) 양의 정수 $n, m \ge 2$에 대하여 함수 $f(x) = x^{\frac{1}{n}} + x^{\frac{1}{m}}$, $(x>0)$가 주어져 있을 때, $f(x)$는 제시문 (다)의 성질 ①과 ②를 만족하는지 논하고, 임의의 양의 실수 $s \in (0,\infty)$에 대하여 극한값 $\lim_{t\to\infty}(f(s+t) - f(t))$를 구하시오.